

532

A-91

A91

Студенческое Издательское Общество  
при Императорском Московском Техническом Училище.

# ГИДРАВЛИКА.

А. И. Астровъ,

инженер-механикъ, докторъ-профессоръ Императорскаго Московскаго  
Техническаго Училища.

223 фигуры въ текстѣ и чертежи въ 4 таблицахъ.

Цена 5 руб.

МОСКВА.

1911.

76 26





П

Студенческое Издательское Общество  
при Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ.

У 53. А-

---

# ГИДРАВЛИКА.

А. И. Астровъ,

инженеръ-механикъ, адъюнктъ-профессоръ Императорскаго Московскаго  
Техническаго Училища.

31626 с/а

проверено  
1966 г.

---

223 фигуры въ текстѣ и чертежи на IX таблицахъ.

Цена 5 руб.

---

МОСКВА.  
1911.

Изданіємъ завѣдывали студенты:

*В. Н. Литновъ, А. Н. Малиновскій, А. В. Назимовъ и М. И. Фелинскій.*



Типо-литографія Т-на И. Н. КУШНЕРЕВЪ и К<sup>о</sup>. Пименовская ул., соб. д.  
МОСКВА—1911.

## ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ основномъ своемъ содержаніи настоящій курсъ гидравлики представляетъ сводъ лекцій, читаемыхъ авторомъ по этому предмету въ Императорскомъ Московскомъ Техническомъ Училищѣ—школѣ съ опредѣленно выраженнымъ машиностроительнымъ характеромъ. Этимъ уже опредѣлилось въ значительной мѣрѣ содержаніе этой книги: въ нее не вошелъ рядъ вопросовъ, имѣющихъ значеніе преимущественно для строителей, какъ-то: опредѣленіе величины мостовыхъ отверстій, движеніе воды въ размываемомъ руслѣ, движеніе подпочвенныхъ водъ, волнообразное движеніе и т. д. Этимъ же должно быть объяснено отсутствіе въ этой книгѣ цѣлаго важнаго отдѣла гидравлики о взаимодѣйствіи потока жидкости и твердаго тѣла. Дѣло въ томъ, что, по условіямъ преподаванія въ Училищѣ, удобно отнести весь этотъ отдѣлъ къ читаемому авторомъ же курсу водяныхъ двигателей, для котораго этотъ отдѣлъ является основнымъ положеніемъ при развитіи такъ называемой теоріи этихъ машинъ.

Въ то же время среди вопросовъ гидравлики, трактуемыхъ на лекціяхъ, могутъ быть выдѣлены такіе, которые являются основными, и такіе, которые рассматриваются въ качествѣ поясняющаго дополненія, въ качествѣ нѣкотораго развитія основныхъ положеній. Умѣстные на лекціяхъ, гдѣ ихъ подборъ можетъ мѣняться годъ отъ году, такіе вопросы могли бы и не входить въ составъ учебника, если считать, что учебникъ долженъ содержать исключительно основныя положенія предмета, поясненныя ограниченнымъ числомъ примѣровъ.

Не желая однако при изданіи настоящей книги ограничиваться узкими рамками учебника, авторъ, наоборотъ, считалъ полезнымъ ввести въ нее разсмотрѣніе нѣкоторыхъ вопросовъ практической гидравлики, преимущественно изъ области машиностроенія, которые лежатъ за предѣлами общепринятыхъ программъ, но могутъ встрѣтиться въ практикѣ инженера-машиностроителя. Сюда относятся, напримѣръ, водоструйные приборы, гидравлическій ударъ въ водопроводныхъ трубахъ и нѣкоторыя другія задачи. Такимъ расширеніемъ программы книги авторъ надѣется придать ей характеръ не только учебника, но и болѣе широкаго руководства по гидравликѣ въ ограниченной выше области. По той же причинѣ авторъ считалъ необходимымъ приводить ссылки на литературу.

Для того чтобы, сообразно съ двойкой задачей курса, выдѣлить наиболѣе существенное для первоначальнаго изученія, въ книгѣ приняты два шрифта: основной матеріалъ—около двухъ третей общаго числа страницъ—набранъ крупнымъ шрифтомъ; болѣе мелкій сохраненъ для подробностей, специальныхъ вопросовъ, опытныхъ данныхъ и т. п.

Въ числѣ подробностей, кромѣ охарактеризованныхъ выше дополнительныхъ вопросовъ, помѣщены начальныя положенія гидродинамики. За послѣдніе годы все болѣе выдвигается вѣроятность того, что въ близкомъ будущемъ общепринятая теорія гидравлическихъ машинъ будетъ опираться на уравненія гидродинамики. На этотъ путь вступили многіе иностранные и русскіе авторы основной и журнальной литературы, трактующіе о водяныхъ турбинахъ и турбинныхъ насосахъ. Для того, чтобы дать возможность войти въ кругъ этихъ пріемовъ разсмотрѣнія, авторъ счелъ необходимымъ удѣлить гидродинамикѣ болше мѣста, нежели это обыкновенно дѣлается въ курсахъ гидравлики. Однако приводимыя свѣдѣнія по гидродинамикѣ не идутъ далѣе основныхъ положеній и понятій и двухъ примѣровъ плоскихъ теченій, важныхъ для вышеуказанной цѣли и въ то же время не требующихъ болѣе глубокихъ знаній анализа.

Многія статьи гидравлики сопровождаются нерѣдко тяжеловѣсными и утомительными выкладками. Въ то же время очень часто приходится наблюдать, что изъ-за этихъ вычисленій начинающіе перестаютъ замѣчать основной ходъ мысли въ развиваемыхъ положеніяхъ, иногда какъ бы не замѣчаютъ всю постановку задачи, сдѣланныя въ началѣ упрощающія допущенія и т. п. и, наоборотъ, готовы видѣть суть дѣла въ интегрированіяхъ, преобразованіяхъ и прочихъ чисто служебныхъ операціяхъ. Чтобы съ самаго начала въ возможной мѣрѣ воспрепятствовать этому ошибочному и даже, можно сказать, пагубному представленію, цѣлый рядъ такихъ операцій вынесенъ, въ качествѣ подробностей, въ мелкій шрифтъ; ибо, съ другой стороны, было нежелательно ни прибѣгать къ новымъ предположеніямъ, въ видахъ упрощенія выкладокъ, ни приводить эти выкладки въ сильно сокращенномъ видѣ.

Всякая прикладная наука неизбѣжно опирается на болѣе или менѣе обширный экспериментальный матеріалъ. Въ гидравликѣ эти данныя являются не столько матеріаломъ для обобщеній, сколько вводятся силою вещей какъ необходимыя поправки къ слишкомъ далекимъ отъ дѣйствительности предположеніямъ. Такимъ образомъ знаніе гидравлики неизбѣжно складывается изъ двухъ частей—изъ знанія основныхъ схемъ, число которыхъ довольно ограничено, и изъ умѣнія исправлять ихъ или, говоря общѣе, примѣнять къ даннымъ частнымъ случаямъ; послѣднее сводится въ значительной мѣрѣ къ умѣнію пользоваться данными опыта. По этимъ соображеніямъ въ настоящемъ курсѣ удѣлено много мѣста, конечно, главнымъ образомъ среди мелкаго шрифта, своду эмпирическихъ данныхъ. При этомъ были употреблены всѣ старанія къ провѣркѣ приводимыхъ данныхъ: разыскивались оригинальныя



изданія, сличались между собою разные источники, нѣкоторыя таблицы, напримѣръ 39, пересчитывались заново. Для облегченія пользования многія данныя приведены въ формѣ таблицъ. Въ концѣ книги приложены также двѣ числовыя таблицы величинъ, часто встрѣчающихся при вычисленияхъ и не всегда приводимыхъ въ общеупотребительныхъ справочникахъ.

Отчасти для той же цѣли ознакомленія съ опытнымъ матеріаломъ, а главнымъ образомъ ради облегченія усвоенія основныхъ схемъ, въ курсѣ помѣщено 85 задачъ въ качествѣ матеріала для упражненій, независимо отъ нѣсколькихъ числовыхъ примѣровъ, приводимыхъ въ текстѣ. Для значительнаго большинства задачъ приведены отвѣты, для того чтобы дать упражняющемуся увѣренность въ правильности принятаго имъ способа рѣшенія задачи. Въ этихъ случаяхъ почти всегда указываются также тѣ эмпирическіе коэффициенты, которые были приняты при рѣшеніи. Кроме того, въ очень большомъ числѣ случаевъ приведенъ и весь процессъ рѣшенія задачи: это дѣлалось особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда въ текстѣ не было прямыхъ указаній на способъ рѣшенія такихъ вопросовъ. Сюда, напр., относятся задачи на опредѣленіе времени затопленія сосудовъ разной формы, задачи на водопроводную сѣть, задачи на трубу, питаемую съ двухъ концовъ и т. д.

Наконецъ, нѣсколько словъ о вѣднѣности изданія. Въ силу крайняго недостатка свободнаго времени у автора, печатаніе этой книги растянулось болѣе чѣмъ на два года. Этимъ объясняется нѣкоторая непослѣдовательность въ расположеніи матеріала, наличие ряда «дополненій» и т. п. Изданіе начато Студенческой Издательской Комиссіей и закончено возникшимъ въ замѣну Комиссін Студенческимъ Издательскимъ Обществомъ. Длительностью изданія и происшедшими при этомъ измѣненіями въ составѣ непосредственныхъ исполнителей нужно объяснить такіе, напримѣръ, недочеты, какъ разный стиль рисунковъ, ошибочная ихъ номерация и т. п. Длинный списокъ опечатокъ, отнюдь не украшая изданія, все же, надо считать сдѣланъ его годнымъ для пользования, особенно если принять во вниманіе, что громадное большинство исправленій не носитъ характера существенныхъ измѣненій. Авторъ съ благодарностью отмѣчаетъ здѣсь, что оба названныхъ выше учрежденія не останавливались передъ затратами для достиженія вѣсему изданію желательной четкости и вообще хорошей вѣднѣности.

Средства для изданія даны Учебнымъ Комитетомъ Училища, за что авторъ считаетъ приятной обязанностью выразить ему здѣсь свою глубокую признательность.

Ад.-проф. Ал. Астровъ.

Москва.

2 ноября 1910 г.

Прежде чѣмъ пользоваться этой книгой, необходимо сдѣлать въ ней слѣдующія исправленія.

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
7	11 снизу	$+ X\rho \cdot \frac{1}{6} dx dy dz =$	$+ X\rho \cdot \frac{1}{8} dx dy dz =$
11	11 сверху	... извѣстно, силы, ...	... извѣстно, центральныя силы, ...
14	8 снизу	распространенія	распредѣленія
18	18 "	13.560.0,760	13560.0,760
"	14 "	поправками	поправками на
22	15 "	плоскостями параллельными	плоскостями, параллельными
26	21 "	на рабочую	параболу
29	8 сверху	Полное давленіе	О давленіи
34	14 снизу	$g \sin \alpha$	$\gamma \sin \alpha$
"	12 "	$A'F'B'N'$	$AMB$
35	20 сверху	(2 ),	(20),
39	1 "	до давленія	до избыточнаго давленія
"	12 снизу	$BC$	$AC$
41	Фиг. 27	Размѣръ „90“ нужно считать отъ оси вращенія клапана до его центра.	
42	13 сверху	съ концомъ	съ верхнимъ концомъ
43	5 "	діаметромъ 60 <i>mm</i> ;	діаметромъ 0,6 <i>mtr</i> ;
"	7 "	$2 \times 2$	$1 \times 2$
"	14 снизу	въ точкѣ —	въ точкѣ $B$ —
48	11 "	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial y}$	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}$
50	1 "	$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ ;	$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ ;
51	14 сверху	матеріальной системы	матеріальной деформируемой системы
52	22 "	обуславливаютъ	обусловливаютъ
"	1 снизу	Нужно добавить: Уравненіе неразрывности обращается въ случаѣ такого движенія въ уравненіе Лапласа:	
		$\frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dt} \right) + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0$	
54	1 сверху	изъ нихъ;	изъ нихъ,
59	8 снизу	удѣльнымъ вѣсомъ	вѣсомъ единицы объема,
"	6 "	$+ \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} \right) =$	$+ \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\gamma_0} - \frac{p}{\gamma} \right) =$
61	12 сверху	этого параграфа	предыдущаго параграфа

Строчка:	Ссылка:	Напечатано:	Должно быть:
2	сверху	принята и за	принята за
•	•	$1 \frac{d\rho}{dt} -$	$1 \frac{d\rho}{dt} +$
•	•	$\frac{d}{dt} -$	$\frac{d}{dt} -$
•	сверху	съ ними обращаются	съ ними по уравнениям (f) обращаются
•	•	рассмотрить случай	рассмотрить одинь случай
•	•	$\frac{d\rho}{dz} = 2Kz.$	$\frac{d\rho}{dz} = - 2Kz.$
•	сверху	$= \frac{P_0 - P}{\gamma} + const =$	$const - \frac{P}{\gamma}$
22	•	давления тоже...	давления, для которых величина $P$ не мѣняется, тоже...
•	1	монитинга	тааиниога
•	12	добавить ссылку на (уравненія (3) на стр. 46).	
•	2	фиг. 37	фиг. 36
•	13 снизу	$(r + dz)$	$(r + dr)$
•	3	производныя отдѣльных:	производныя по $t$ отъ отдѣльныхъ
•	7	$w = \frac{dF}{dz} = 4Kr;$	$w = \frac{dF}{dz} = 4Kz;$
•	1 сверху	словами, обычное	словами — обычное
•	13	$\left. \begin{array}{l} \rho = 2g \\ \gamma = 16K^2 \end{array} \right\} \dots$	$\left. \begin{array}{l} \rho = 16K^2 \\ \gamma = 2g \end{array} \right\} \dots$
•	19 снизу	прямой	прямыхъ
•	14	$-\frac{\omega^2 r_0^2}{2g r^2}$	$-\frac{\omega^2 r_0^4}{2g r^2} =$
•	15 сверху	moments	moment
•	18	Mécanique. Physique.	Mécanique physique.
•	5 снизу	стр. 8,	стр. 9),
•	10	часть запасъ	часть приращеніе запаса
•	8	на что этотъ запасъ уходитъ	за счетъ чего этотъ запасъ создается
•	4	первая часть траты запаса	первая работа, создающая часть запаса
•	19 и 18	на развтіе которой уходитъ слѣдующая	которая создаетъ слѣдующую
•	16 и 15	такъ какъ на преодоленіе давленій на боковыя поверхности струи работы не требуется,	такъ какъ давленія на боковыхъ поверхностяхъ струи работы не даютъ,
•	9 сверху	Добавить: Геометрическое мѣсто точекъ $M$ называется пьезометрической линіей.	
•	16 снизу	Всю строчку замѣнить такъ: Потому ур-е (16) даетъ:	
•	10 сверху	(фиг. 38)	(фиг. 42)
•	8	(фиг. 36)	(фиг. 43)
•	19	силъ	тѣлъ
•	13	(фиг. 39)	(фиг. 46)
•	1 и 18	Центръ окружности радиуса $r$ нужно отмѣтить буквой $O'$ , а не $O$	
•	сверху	$M$ , есть	$M$ есть
•	7	$-\frac{\omega^2}{\gamma} (r_2^2 - r_1^2)$	$-\frac{\omega^2}{2g} (r_2^2 - r_1^2)$
•	сверху	Schaw	Schaw

Строчка и:	Строчка	Напечатано:	Должно быть:
108	6 сверху	стѣнкѣ, только	стѣнкѣ только
112	2	Последній членъ ур-ня (13''') долженъ быть $-\int_{H_1}^{H_2} \dots$	
"	5 снизу	на 1 <i>mm</i> .	на 1 <i>mm</i> въ секунду.
122	7 "	Видону,	Бидоне,
125	5 и 6 "	Въ крайнемъ правомъ столбцѣ таблицы звѣздочку нужно поставить строчкой выше, соответственно напору 1,6 <i>atr</i> .	
129	27 сверху	таблицы II отъ	таблицы III отъ
	4 снизу	0,667	0,676
133	2 сверху	на ударъ при входѣ	на ударъ и при входѣ
135	1 снизу	$\mu = 0,5$ , — наблюдается	$\mu = 0,5$ : наблюдается
137	5 "	$= \frac{1}{1 + \xi_1} =$	$\frac{1}{1 + \xi_1} =$
140	6 сверху	70,5	70,7
141	10 "	хорошіе	худшіе
146	Въ таблицѣ 17	добавить 6-й вертикальный столбецъ, расположивъ въ нисходящемъ порядкѣ слѣдующее:	
$\xi = \frac{1}{g^2} - 1; \quad 0,05; \quad 0,49; \quad 0,075; \quad 0,04; \quad 4,29.$			
148	14 снизу	есть скорость	есть какъ бы скорость
161	11	$v = \sqrt{2g(h - a) + \frac{v_0^2}{2h}}$	$v = \sqrt{2g(h - a) + \frac{v_0^2}{2h}}$
163	13 сверху	таблицѣ III	таблицѣ IX
164	Соответственно	$h = 0,16 \text{ atr}$ въ графѣ <i>a</i> нужно читать 0,4216, а не 0,4646	0,4216, а не 0,4646
"	"	$h = 0,46 \text{ atr}$ и $H - h = 1,50$ "	0,425 " " 0,435
169	27 снизу	0,1890	1,1890
173	18 "	(фиг. 89)	(фиг. 86)
175	Въ таблицѣ 22	ссылку на фиг. 95 нужно замѣнить 4 раза ссылкой на фиг. 94.	
182	3 снизу	$(0,05 - \frac{0,3}{0,2})^2$	$(0,05 - \frac{0,3}{1,2})^2$
183	9 сверху	$h_1 : p'' = 0,8$ ,	$h : p'' = 0,8$ ,
"	16 "	Dubuat	Du Buat
"	12 снизу	стѣнкѣ $\mu_2$	стѣнкѣ подь уровень $\mu_2$
"	10 "	$+ 0,62 \cdot 2 \cdot 0,5 \sqrt{2g \cdot 0,15} =$	$+ 0,62 \cdot 2 \cdot 0,25 \sqrt{2g \cdot 0,15} =$
186	4-й вертикальный столбецъ	0,472	0,474
"	"	" 0,445	0,438
"	6-й "	" 0,495	0,501
"	"	" 0,502	0,507
"	7-й "	" 0,508	0,503
187	18 снизу	0,470	0,446
188	11 сверху	0,401	0,400
"	12 снизу	0,415	0,410
190	1 сверху	рѣкѣ.	рѣкѣ.
"	5 снизу	соответственно	соответственно
193	17 сверху	стѣней	стѣненіа
199	14 снизу	$t' =$	$t'_s =$
204	10 "	этотъ	данный
"	Фиг. 118	Размѣръ $\epsilon_1$ отсчитывается отъ уровня $A_1 B_1$ , <i>по оси трубы</i>	
206 207	Табл. IV	Кларкъ	Кларкъ
209	5 сверху	слово „дви-“ нужно уничтожить.	

Страница	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
216	10 снизу	то, что...	то, что называется потерянными напоромъ и что...
218	3 сверху	Dubuat	Du Buat
221	16 сверху	по Зонне	по Зонне для новыхъ трубъ
222	6 снизу	Добавить Работа Рейнольда	напечатана: Papers on mechanical and physical subjects, By Osborne Reynolds, Cambridge, 1901, Vol. II, page 51 и слѣд.
	1	менуаръ	менуары
223	9 сверху	$k = 0,005813$	$k = 0,005816$
224	7 "	$+ 0,0336 t +$	$+ 0,0337 t +$
	18—20 "	Вместо приведенныхъ по Блану значений показателя $n$ , нужно принять слѣдующія его значенія, приводимыя самимъ Рейнольдсомъ (см. его Papers, Vol. II, page 104):	
		для свинцовыхъ и стеклянныхъ трубъ . . . . .	$n = 1,79$
		" асфальтированныхъ трубъ . . . . .	$n = 1,82$
		" новыхъ чугунныхъ трубъ . . . . .	$n = 1,88$
		" вычищенныхъ трубъ . . . . .	$n = 1,91$
		" загрязненныхъ трубъ . . . . .	$n = 2,00$
226	5 снизу	не только и даже	не только, и даже
229	9 сверху	$= 0,00639 +$	$= 0,00636 +$
"	10 "	для $d = 21 \text{ mm}$	для $d = 26 \text{ mm}$
"	20 снизу	температурн. коэффициенты	температурн. (15—20°) коэффициенты
"	14 "	20 <i>mm</i>	200 <i>mm</i>
"	" "	при значительной длинѣ.	при значительной длинѣ до 2000 <i>mm</i> .
234	18 сверху	поверхней	по верхней
235	15 "	Dubuat	Du Buat
236	12 "	трѣніе, къ длинѣ...	трѣніе во всей трубѣ, къ длинѣ...
238	1 снизу	uber	uber
240	7	$(\pi d - ie)h = 0,87 f$	$(\pi d - ie)h \geq 0,87 f$
242	2 "	" $h$ ", гдѣ" совсѣмъ вычеркнуть.	
243	10 и 11 сверху	$c'$	$c'$
"	11 снизу	кольцо	кольцо
"	5 "	$r_1'$	$r_1$
248	2 сверху	отъ горизонта до	отъ горизонта въ слѣдствіе до
	Фиг. 143	$P - b$	$P_2 - b$
		$\gamma$	$\gamma$
249	11 сверху	$+ \sum_{\text{ср}} \frac{4L}{D}$	$+ \sum_{\text{ср}} + \sum_{\text{нр}} \frac{4L}{D}$
"	15 "	$= \text{число в.} \cdot f v_1$	$= \text{число в.} \cdot f \left  2g \frac{P_2 - b}{\gamma} \right $
"	5 снизу	and	and
"	9 "	5,030	6,030
251	28 "	8,200	8,100
252	5 сверху	0,1499	0,1388
"	15 "	2,902	3,902
"	16 снизу	0,00888	0,00688
"	11 "	0,9393	0,3933
"	10 сверху	67,33	67,35
"	10 "	0,06461	0,06465
"	11	0,08388	0,08389

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
257	21 снизу	197,5	197,8
261	12 "	0,00461	0,00468
"	11 "	0,00473	0,00461
"	" "	+ 7,15	+ 9,33
269	14 сверху	$+ \zeta \frac{4(L - L_0)}{D}$	$+ \zeta_r \frac{4(L - L_0)}{D}$
272	9 "	(34),	(34)',
274	9 "	... диаметра.	... диаметра, образующих один непрерывный трубопровод.
285	14 снизу	давления	давление
289	10 "	гидростатического	гидравлического
309	8 "	0,64 определяются	0,64, определяются
314	19 "	0,48 $mtr^3 sec.$	0,481 $mtr^3 sec.$
322	1 сверху	5,54 $mm.$	5,54 $mtr.$
326	1 "	что когда В закрыто то,	что, когда В закрыто, то
327	18 снизу	$\dots \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} \dots$	$\dots \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} \dots$
"	16 "	0,4084	0,0484
"	" "	0,7854	0,7654
329	19 "	$y = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{z^2}{2b}$	$y = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{z^2}{6b}$
"	18 "	$z = b \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}$	$b = z \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{n}{3(n-2)}}$
"	Два последние строчки нужно читать так:		
"	треугольником. $y = \frac{z}{3} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{z^2}{2} \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$ . — Чтобы высота $z_2$ была любая, нужно удовлетворить условию		
	$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2}{(\gamma_1 + \gamma_2)(n-3)}} = 2n \gamma_2$		
	При $n = 3$ , что обычно требуется в инженерной практике, получаем $\operatorname{ctg} \alpha > \frac{1}{2}$ , т.е. $\alpha > 45^\circ$ , совершенно независимо от материала стенки и веса жидкости.		
330	4 сверху	выполненный	выполненной
"	Весь ответ нужно читать так:		
	1 погонный метр первой стенки весит $\gamma_{1,2} a^2 = 1,5 a^2 tn = 1,225 a^2 tn$ ; то же для второй стенки весит $0,5 \gamma_{1,2} a^2 = 0,6125 a^2 tn$ ; при третьей конструкции весь погонного метра — $= 0,5 \gamma_1 a^2 = 0,5 \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \cdot \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} a^2 = 0,6125 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} a^2 = 0,75 a^2 tn$ .		
333	8 снизу	0,054.	0,055 <sup>2</sup> / <sub>100</sub> .
338	4 "	25	29
"	3 "	29	25
341	10 сверху	$B = \alpha,$	$B = 2g\alpha,$
343	2 снизу	$Td$	$T$
346	строка $R=1,40:$	76,3	76,6
350 и 351	Табл. VIII.	На чертеж изоталей по Базену, в левой его части на нижней горизонтали нужно переставить местами буквы $t$ и $c$ .	
"	"	На 6-й строке снизу напечатано 10191 $mtr$ вместо 10191 $mtr^2$ .	
351	3 сверху	сажени.	сажени в секунду.

Страница:	Строка:	Напечатано:	Должно быть:
356	12 снизу	Перед словом „Легко“ вставить: Из построения видно, что длина откоса $BD$ равна $OD$ , т.е. половине ширины свободной поверхности. Так как дано $OF = h_0$ , и угол откоса известен, то этим удобно воспользоваться для построения профиля, неходя из треугольника $OFO$ и засѣкая на продолженномъ катетѣ $OF$ точку $B$ радиусомъ $OB = OD$ .	
359	12 „	крупнаго	круглаго
361	10 „	Dubuat	Da Buat
371	3 „	Кариолису	Кориолису.
381	12 сверху	0,75	0,57
392	6 и 5 снизу	направление вѣтъ ..	направление импульсовъ вѣтъ ..
403	15 и 16 сверху	достаточно измѣрить точку лишь одно живое сѣчение	достаточно произвести всѣ измѣренія скоростей и всѣ измѣры глубинъ лишь въ одномъ живомъ сѣчении
407	6 снизу	зубцами	зубцами и
411	17 сверху	лабораторія	лабораторіи
415	Между 9 и 10 строками	сверху вставить слова: - за отѣтку свободной поверхности	
421	2 сверху	воздухъ	воздухъ,
42	3 „	водоизмѣненія	водоизмѣненія
„	14 снизу	..... иллюстраціи	а въ видѣ иллюстраціи
„	1 „	что изъ	что въ этомъ случаѣ изъ
431	17 сверху	ординаты	ординатъ
432	21 „	той точки,	т.-е. та точка,
438	3 „	<i>ndr sec</i>	<i>ndr sec</i>

# ОГЛАВЛЕНІЕ.

Предисловіе . . . . .	III
Необходимыя исправленія . . . . .	VI
Оглавленіе . . . . .	XII
Содержаніе таблицъ чертежей . . . . .	XVIII
Введеніе . . . . .	1—4
Понятіе о жидкости, раздѣленіе жидкостей на капельныя и упругыя. Свойства и составъ воды и воздуха. Нѣкоторые обозначенія.	

## ГЛАВА I.

Гидростатика и гидродинамика въ примѣненіи къ гидравликѣ . . . . .	5—98
§ 1. Гидростатическое давленіе . . . . .	5—8
Внутри жидкаго тѣла могутъ быть только давленія (5). Гидростатическое давленіе не зависитъ отъ направленія (6).	
§ 2. Основное уравненіе гидростатики . . . . .	8—11.
Дифференціальное уравненіе равновѣсія жидкаго тѣла (8). Условія его интегрируемости (10). Потенціалъ силъ (10).	
§ 3. Поверхности уровня . . . . .	11—14
Опредѣленіе и свойства этихъ поверхностей.	
§ 4. Видъ поверхностей уровня и законъ распредѣленія давленій въ частныхъ случаяхъ равновѣсія жидкости . . . . .	14—29
Случай тяжелой жидкости (15). Манометры разной конструкции (16). Принципъ Паскаля (19). Случай тяжелой упругой жидкости (19). Случай жидкости, подверженной притяженію къ центру (19). Случай вращенія тяжелой жидкости около какой нибудь оси; ур-е поверхностей уровня (20). Положеніе свободной поверхности, когда ось вращенія вертикальна (23). Распредѣленіе давленій (24). Двухжидкостный тахометръ (25). Поверхности уровня при горизонтальной оси вращенія (27).	
§ 5. О давленіи жидкости на стѣнку . . . . .	29—38
Плоская стѣнка: полное давленіе (31); центръ давленія (30); графическое представленіе полнаго давленія (32). Кривая стѣнка: давленіе по	



заданному направлению (33); полное давление (35). Давление на сосуды и отдельные его стѣнки (36). Законъ Архимеда (37).

*Дополнение къ § 5. Устойчивость равновѣсія плавающихъ тѣлъ . . . . . 422—435*

Погруженное тѣло (422). Плавающее тѣло (423). Основные термины и понятія (423). Теорема Эйлера (425). Теорема Ювена (427). Метацентр (429). Измѣненіе степени устойчивости при перемѣщеніи груза въ предѣлахъ судна по вертикали (431) и по горизонтали (432). Опредѣленіе оси качанія судна (433). Вліяніе жидкаго груза на устойчивость (435).

**Задачи на гидростатику . . . . . 38—43 и 328—330**

§ 6. Уравненія движенія совершенной жидкости . . . . . 43—54

Уравненія гидродинамики въ формѣ Эйлера (44); характеристическое уравненіе (46); уравненіе неразрывности (47). Коэффициентъ кубическаго расширенія (49). Общее выраженіе относительнаго перемѣщенія (50). Слагающія вихря и потенциалъ скоростей (52). Условія на границахъ жидкости (53).

§ 7. Интегрированіе общихъ уравненій движенія жидкости. Установившееся движеніе . . . . . 54—81

Установившееся движеніе (54). Теорема живыхъ силъ для твердаго тѣла (57), жидкаго капельнаго (57) и жидкаго упругаго (58). Линія тока (60). Уравненія движенія капельной жидкости, когда есть потенциалъ скоростей (60). Прямолинейное теченіе (62). Теорема Гельмгольца о сохраненіи вихря (63). Плоское невихревое движеніе тяжелой жидкости, симметричное относительно вертикальной плоскости и имѣющее горизонтальную направляющую плоскость (65). — Уравненія гидродинамики въ цилиндрическихъ координатахъ (70). Теченіе жидкости, симметричное относительно вертикальной линіи, имѣющее горизонтальную направляющую плоскость (74). Вращеніе тяжелой жидкости около вертикальной оси (78).

§ 8. Теорема Д. Бернулли для совершенныхъ и действительныхъ жидкостей . . . . . 81—92

Сохраненіе плоскаго вѣда сѣченій (81). Уравненіе расхода (83). Распределеніе давленій въ плоскомъ сѣченіи (83). Теорема Д. Бернулли, какъ теорема живыхъ силъ (85). Графическое изображеніе теоремы (87). Гидродинамическое и гидростатическое давленія (89). Признакъ отсутствія разрыва (90). Потерянный напоръ (90). Коэффициентъ сопротивленія (92).

**9. Теорема Борда-Карно . . . . . 92—96**

Теорема (92); повышеніе давленія при ударѣ (95).

Уравненіе Д. Бернулли для относительнаго движенія, если движеніе влеченія есть равномерное вращеніе около неподвижной оси . . . . . 96—98

## ГЛАВА II.

**Истеченіе жидкости изъ отверстій . . . . . 99—208**

Истеченіе изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ . . . . . 99—106

Формула Торричелли (99). Сжатіе струи; опыты Hele Shaw (100). Изчисленіе коэффициентовъ сопротивленія, скорости, сжатія и расхода (102). Опредѣленіе. Несовершенное сжатіе (105).

- § 12. Истечение изъ большихъ отверстій . . . . . 106—115  
 Общее выраженіе расхода (106). Прямоугольное отверстие (108), круг-  
 лое (109) и треугольное (111). Исслѣдованія Понселе и Лебро (112). Несо-  
 вершенное и неполное сжатіе (113).
- § 13. Истеченіе подъ уровеньъ . . . . . 116—119
- § 14. Результаты опытовъ надъ истеченіемъ изъ отверстій . 119—129  
 I. Малая отверстия въ тонкой стѣнкѣ; опыты Боссю (119), Венс-  
 баха (120), Бовой (120); поправка на несовершенство сжатія (121) и на его  
 неполноту (122).  
 II. Большія отверстия. Коэффициенты расхода по Смису для ква-  
 дратныхъ (123) и круглыхъ (124) отверстій. Опыты Понселе и Лебро (125).  
 Несовершенство и неполнота сжатія (126). Вліяніе желоба (127). Опыты  
 Графа (127).
- § 15. Истечение черезъ отверстия съ насадками . . . . . 130—147  
 Насадокъ Вентури (130), Борда (136), наклонный насадокъ Вен-  
 тури (137), конические насадки (138), насадки по формѣ сжатой струи (140),  
 расходящіяся насадки Зителъвейна (141) и Франсиса (142). Сравненіе  
 вкладокъ (145). Принципъ лабиринтоваго сальника (146).
- § 16. Истечение черезъ водосливы . . . . . 147—160  
 Водосливъ, какъ частный случай прямоугольнаго отверстия (147).  
 Истечение черезъ совершенный водосливъ безъ бокового сжатія по Бу-  
 стону (149). Принципъ наибольшаго расхода (150). Основныя предположенія  
 (152). Вліяніе давленія подъ струею (153 и 159).
- § 17. Практически данныя объ истеченіи черезъ водосливы 161—190  
 А. Свободное истечение въ воздухъ (161). Вліяніе глубины канала (161).  
 Вліяніе наклона стѣнки водослива (163). Вліяніе толщины стѣнки (167).  
 Вліяніе сжатія съ боковъ (169).  
 В. Водосливъ безъ доступа воздуха подъ струю (170). Три вида струи  
 отжатая, прилипающая и снизу затопленная (171). Вліяніе толщины по-  
 рогоа (173). Опредѣленіе коэффициентовъ расхода при прилипающей  
 струѣ (174) при затопленной снизу струѣ безъ скачка (176) и съ покрыва-  
 ющимъ ее скачкомъ (177).  
 С. Затопленный водосливъ (179). Коэффициенты расхода по базису  
 для затопленной и для волнистой поверхности водослива (181). Формула  
 расхода по Дюбюа (183).  
 D. Вліяніе толщины стѣнки и формы порога при истеченіи безъ  
 доступа воздуха подъ струю (183) и въ затопленномъ водосливѣ (184).  
 E. Вліяніе бокового сжатія (187). Вліяніе наклона водослива къ  
 направленію русла потока (189).
- § 18. Истечение изъ сосудовъ, находящихся въ движеніи . . 190—196  
 Общія соображенія (190). Случай вращающагося сосуда (191) и  
 о уда, движущагося прямолинейно (192). Замедленное и ускоренное дви-  
 женія по вертикальной или горизонтальной прямой (194).
- § 19. Истечение при переменномъ уровнѣ . . . . . 196—204  
 Общее выраженіе промежутка времени, нужнаго для изліянія нѣко-  
 тораго количества жидкости (196). Призматическій сосудъ (197) и время

тращения (199). Прекращение излияния через водослив (199).  
 Устье неправильной формы (200). Время, необходимое для заданного  
 снижения уровня воды в прудѣ (201). Рабочий объем пруда (201).  
 Часы работы в прудѣ (202). Промежутки времени для расходования  
 запасовъ работъ изъ пруда (202). Опреѣленіе горизонталь-  
 ныхъ сѣченій пруда и притока воды въ него изъ наблюдений времени  
 пониженія уровня и наполненія пруда (203).

Течение при переменномъ уровнѣ подъ переменный  
 уровень . . . . . 204—208

Перетеканіе изъ сосуда въ сосудъ (204) Время наполнения и опорож-  
 нения призматическихъ камеръ (206). Типы шлюзовъ (207).

Г Л А В А III.

Движеніе воды въ трубахъ . . . . . 209—330

21. Средняя скорость. Трение въ жидкостяхъ . . . . . 209—229

Разныя скорости внутри сѣченія трубы (209) Средняя скорость (210)  
 Ошибка въ оцѣнкѣ по средней скорости запаса живой силы сѣка (211)  
 и количества движенія (212). Трение внѣшнее (213) и внутреннее (214)  
 Невозможность струйчатого теченія въ трубѣ (215). Общее сопротивленіе  
 тренія (216). Эмпирическія данныя (217). Зависимость коэффициента тренія  
 отъ скорости по Вейсбаху (218), отъ размѣровъ трубы и отъ степени  
 шероховатости по Дарси (219), Кристену (220), Зонне (221). Болѣе общія  
 выраженія потеряннаго на трение напора съ тробными показателями  
 степени у скорости (221). Трение въ капиллярныхъ трубахъ (222). Наблю-  
 денія и выводы Рейнольдса (223). Общія таблицы значеній коэффициента  
 въ формулѣ Шези (225). Вліяніе загрязненія трубы (226) Трение керо-  
 сина, нефти, бензина (227).

22. Особня сопротивленія . . . . . 229—242

Сопротивленіе при входѣ въ трубу (230). Внезапное измѣненіе сѣче-  
 нія трубы (230). Изломъ трубы (232) Закругленное кольцо (234). Отвѣт-  
 вленіе (236) Задвижка и поворотный клапанъ (237). Крапъ и шарнирный  
 клапанъ (238). Тарельчатые клапаны (239).

23. Задача о простомъ водопроводѣ . . . . . 242—267

Уравненіе простого водопровода (242). Пьезометрическая линия въ  
 ищемъ случаѣ трубопровода, состоящаго изъ трубъ разнаго диаметра, съ  
 разными мѣстными сопротивленіями (244). Труба постояннаго диаметра (247).  
 Задачи о трубѣ заданныхъ размѣровъ (248). Опреѣленіе диаметра трубы  
 по заданнымъ условіямъ (262). О выборѣ скорости въ водопроводныхъ тру-  
 бкахъ (265). Сравненіе потерь напора въ одной трубѣ и въ системѣ малыхъ  
 трубъ той же площади (266). Таблица Фаннинга (250—261).

24. О давленіи внутри водопроводной трубы. Сиронъ.  
 Воздушной насосъ для выкачиванія воздуха. . . . . 267—274

Условіе отсутствія разрыва въ жидкости (267). Опреѣленіе возмож-  
 ной высоты сѣфона (267) Воздушнѣръ Вентури (270). Воздушный насосъ  
 для воздуха (271).

25. Правило Дюпюи. . . . . 274—275

§ 26. Сложный водопроводъ . . . . .	275—281
Точка развѣтвленія (275). Два случая распределеія расхода въ сѣти (276). Аналитическій признакъ каждаго изъ нихъ (277). Гидравлическии смыслъ этого признака (278). Рѣшеніе системы уравненій путемъ послѣдовательныхъ приближеній (278). Питаніе трубы съ двухъ концовъ (280).	
§ 27. Непрерывная раздача . . . . .	281—282
§ 28. Водоструйные приборы . . . . .	283—288
Измѣненіе давленій и уравненіе работъ въ двухъ коняксіальныхъ соплахъ, смѣнивающихъ двѣ струи (283). Водоструйный насосъ (284). Нѣкоторыя замѣчанія о соотношеніяхъ между начальными данными (287).	
§ 29. О гидравлическомъ ударѣ въ водопроводныхъ трубахъ.	289—309
Определеіе величины повышенія давленія (291). Скорость распространенія ударной волны (294). Диаграмма ударной волны (297). Диаграмма измѣненія давленій въ точкѣ трубы у задвижки (300), по серединѣ длины трубы (301, и у магистралки (301). Измѣненія состояній внутри трубы, опредѣляемыя вышеуказаннымъ ходомъ измѣненія давленій (303). Общая картина гидравлическаго удара (304). Наблюденія проф. Жуковскаго надъ гидравлическимъ ударомъ (305).	
<i>Дополненіе къ § 29</i> . . . . .	436
Задачи на вопросы объ истеченіи и о движеніи жидкости по трубамъ (къ главамъ II и III) . . . . .	309—328

Г Л А В А IV.

<b>Движеніе воды въ каналахъ . . . . .</b>	<b>331—422</b>
--	----------------

§ 30. Уравненіе равномернаго теченія въ каналахъ . . . . .	331—341
Основные термины и понятія (331). Паденіе въ каналахъ и рѣкахъ (333). Средняя скорость (334). Уравненіе Шези (335). Формулы Дарси и Базена (336), Гаггилье и Куттера (338), новаго Базена (341). Сравненіе ихъ между собою (342).	
§ 31. Распределеіе скоростей въ сѣченіи канала . . . . .	344—354
Мѣстонахожденіе наибольшей скорости (344). Параболическій законъ измѣненія скорости по вертикали (347). Вытекающее отсюда выраженіе для силы внутренняго тренія (348). Мѣстонахожденіе средней скорости на вертикали (349). Измѣненіе скорости по ширинѣ канала (350). Изотактен (350). Способъ Тейхмана изысканія точекъ въ прямоугольномъ сѣченіи, ищущихъ со среднею скоростью сѣченія (351). Формулы Прони и Вагнера (353). Пульсація (354).	
§ 32. Замѣчанія о выборѣ профиля, скорости и паденія въ каналахъ. Расчетъ каналовъ . . . . .	354—366
Наивыгоднѣйшій профиль (354). Измѣненіе расхода съ глубиною при данной конфигураціи профиля (357). Характеристика сѣченія и ихъ прихмѣненіе къ расчету (359). Выборъ отдѣльныхъ элементовъ профиля ширины и глубина (360), скорость (361), паденіе (362). Ходъ расчета каналовъ (363). Составные профили (365).	

Неравнобѣрное установившееся движеніе въ каналахъ и рѣкахъ. Дифференціальное уравненіе профили неравнобѣрнаго теченія. . . . . 367—391

Опредѣленія (367). Ур-е Л. Бернулли для неравнобѣрнаго теченія, какъ ур-е профили (369). Изслѣдованіе этого уравненія: случай предѣльнаго уклона, когда  $\frac{c_i}{b_j} = 1$  (371). Случай пологихъ уклоновъ (373). Кривая подпруды (374). Ур-е Бресса (375) и его таблица (378) для вычисленія кривой подпруды. Уравненіе подпруженнаго профили по Дюпюи (381). Уравненіе Флаяана подпруженнаго профили въ широкихъ каналахъ (383). Скачокъ пониженія (384) и скачокъ повышенія (385) при малыхъ уклонахъ канала. Случай крутыхъ паденій, приводящій къ скачку повышенія (387), скачку пониженія (387) и къ покойному теченію (388). Покойное и бурное теченіе (389). Критическая глубина (389) и критическая скорость (390).

§ 34. О скачкѣ воды . . . . . 392—401

Вычисленіе высоты скачка (392). Прямѣры скачковъ (394). Выявленіе условій, когда образуется скачокъ при малыхъ паденіяхъ и когда имѣеть мѣсто истеченіе подъ уровень (395). Два вида скачка (399). Потеря энергіи при скачкѣ (399).

§ 35. Гидрометрическіе приборы . . . . . 401—418

Поплавки простые (401 и 417) и двойныя (402). Гидрометрическіи писть (402). Трубка Франка (403). Трубки Пито (404). Приборъ Дарси (405). Вертушка Вольмана (407). Счетчикъ Амслера (408). Крылья Гарахера (408). Вертушка Гайонга (409) и Отта (409). Формулы для вертушекъ (411). Вычисленіе расхода (412). Приемъ Гарахера (412). Порядокъ измѣреній расхода помощью вертушки (415).

Задачи на вопросъ о движеніи воды въ каналахъ. . . . . 418—422

Дополненіе къ § 5 . . . . . 422—435

Дополненіе къ § 29. . . . . 436

Таблица значеній скоростныхъ напоровъ . . . . . 437

Таблица значеній скоростей свободнаго паденія . . . . . 438

Алфавитный указатель предметовъ и именъ. . . . . 439—441

## Содержаніе таблицъ чертежей.

- Табл. I, къ стр. 25. Двухжидкостный тахометръ.
- Табл. II, къ стр. 100. Окрашенная струя глицерина по опытамъ Hele Shaw
- Табл. III, къ стр. 115. Устройство отверстія въ опытахъ Лебра съ исполнимъ скатіемъ.
- Табл. IV, къ стр. 207. Гидравлическій подъемникъ-позюзъ по системѣ Кларка и Дьюера.
- Табл. V, къ стр. 225. Значенія коэффициента  $c$  въ формулѣ Шези, по Симсу для трубъ діаметромъ отъ 0,05 до 8 футъ и при скоростяхъ отъ 1 до 11 футъ въ секунду.
- Табл. VI, къ стр. 298. Диаграммы измѣненія давленія въ водопроводной трубѣ при гидравлическомъ ударѣ.
- Табл. VII, къ стр. 342. Графическое изображеніе формулъ Гангилле и Куттера и новой Базена.
- Табл. VIII, къ стр. 350. Изотакси въ прямоугольномъ каналѣ и въ живомъ сѣченіи р. Волга подъ Самарою.
- Табл. IX, къ стр. 163. Коэффициенты расхода въ водосливѣ съ вертикальной тонкой стѣнкой, безъ бокового сжатія и при истеченіи въ атмосферу. Ихъ измѣненіе, по Базену въ зависимости отъ напора и глубины передъ водосливомъ.

## ВВЕДЕНИЕ.

Вопросы теоретической механики, изучающие вопросы о равновесии и движении жидкостей, называются гидростатикой и гидродинамикой. Подобно тому, как и вообще в теоретической механике, основываясь на нескольких положениях и гипотезах, можно, действуя, волею опытного характера, логически выводить ряд законов и фактов, или чемъ къ опыту если и обращаются, то какъ къ источнику доверья. Не говоря уже о томъ, что основныя гипотезы не всегда соответствуютъ действительности, большинство явленій, съ которыми приходится имѣть дѣло практику, настолько сложны и запутаны изъ-за множества приводящихъ факторовъ, что до сихъ поръ не поддаются ни какому умозрительному изучению. Такимъ образомъ возникаетъ другая наука — прикладная механика. Широко пользуясь экспериментальными методами, эта наука обыкновенно бываетъ принуждена отказываться отъ точнаго математическаго анализа явленій, напротивъ, сложныя явленія изучаются на опытѣ; законы, которымъ подчиняются эти явленія и которые устанавливаются при этомъ, стараются выразить аналитически, заботясь не только о томъ, чтобы формула возможно полно выражала явленіе, но также чтобы она была удобна для пользования. Но положения теоретической механики не лишены своего значенія для прикладной механики. безъ нихъ часто не удается бы разобраться въ явленіяхъ, классифицировать ихъ и подобрать наилучшее подходящее выраженіе для эмпирической формулы. Такимъ образомъ прикладная механика, въ частности гидравлика, широко пользуется экспериментальнымъ методомъ, въ то же время опирается на теоретическіе выводы. Поэтому необходимой главой курса гидравлики будетъ изложеніе, хотя бы въ краткихъ чертахъ, основъ гидростатики и гидродинамики.

Жидкостью называютъ тѣло, обладающее въ высокой степени подвижностью частицъ. Если твердое тѣло деформируется только путемъ затраты большого количества работы, то, наоборотъ, деформация жидкаго тѣла происходитъ очень легко, настолько, что только въ очень небольшихъ количествахъ вѣсомая капельная жидкость имѣетъ свою опредѣленную форму (капля — сфероидъ); въ сколько-нибудь большихъ количествахъ она подъ влияніемъ собственнаго вѣса принимаетъ форму сосуда, ее содержащаго.

Трудно провести границу между жидкимъ и твердымъ тѣломъ. Не только при различныхъ условіяхъ температуры, но также и давленій, одно

и то же тѣло является то жидкимъ, то твердымъ. Въ первомъ случаѣ переходъ изъ одного состоянія въ другое совершается путемъ затраты или отдачи извѣстнаго количества тепла. Во второмъ случаѣ явленіе еще не вполне изслѣдовано: интересные опыты Треска надъ свинцомъ, мѣдью и др. металлами и опыты Кюка надъ каменной солью, мраморомъ и т. п. показали, что при извѣстныхъ давленіяхъ (для каменной соли, напримѣръ, 36 ат) твердые тѣла становятся жидкообразными, принимаютъ форму сосуда, вытекаютъ изъ отверстій, передаютъ давленіе по всемъ направленіямъ и т. п. Однако при обыкновенныхъ условіяхъ указанная характеристика жидкостей достаточно точна: если коэффициентъ крѣпости желѣза на разрывъ равенъ 36—40 *kgr mm<sup>2</sup>*, то для разрыва воды (Heimann) достаточно напряжение только въ 3,6 *kgr mtr<sup>2</sup>*, т.-е. крѣпость воды на разрывъ болѣе, чѣмъ въ  $10^7$  разъ, меньше, нежели для желѣза.

Такая малая связь между частицами жидкости даетъ поводъ теоретической механикѣ разсматривать жидкость, какъ обладающую абсолютной подвижностью частицъ безъ всякаго видимаго сдвѣженія и тренія. Гидравлика называетъ такую жидкость совершенной и для примѣненія теоретическихкихъ выводовъ механики къ дѣйствительнымъ жидкостямъ исправляетъ ихъ эмпирически.

Различаютъ капельныя и газообразныя совершенныя жидкости. Первые характеризуются полной несжимаемостью и, слѣдовательно, отсутствіемъ упругости; вторыя, напротивъ, слѣдуютъ законамъ Мариотта и Гей-Люссака и стремятся всегда расширяться. И тутъ дѣйствительность расходится съ механикой. капельныя жидкости сжимаемы, хотя и весьма мало; наприм., вода при 0° С подъ давленіемъ въ 1 ат сжимается на 1/20'000 первоначальнаго объема; совершеннаго газа тоже нѣтъ ни одного.

Мы будемъ изучать исключительно капельныя жидкости, и если будемъ касаться иногда газообразныхъ, то только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ; именно, чаще всего будемъ предполагать температуру газовъ неизмѣняемой, такъ какъ изученіе условій равновѣсія и движенія газовъ вообще есть предметъ термодинамики.

Наиболѣе важнымъ для техники представителемъ капельныхъ жидкостей является вода ( $H_2O$ ). Ея ничтожная крѣпость на разрывъ (3,6 *kgr mtr<sup>2</sup>*) была уже указана выше; была также отмѣчена ея малая сжимаемость: при 0° С напряжение въ 1 *kgr cm<sup>2</sup>* вызываетъ уменьшеніе первоначальнаго объема на 1/20'000. Коэффициентъ расширенія при нагреваніи нѣсколько болѣе: максимумъ плотности наблюдается при 4° С. при чемъ 1 литръ (1 *dm<sup>3</sup>*) вѣситъ 1 *kgr*; при 0° С вода имѣетъ ту же плотность, что и при 8° С, а именно 1 *kgr* занимаетъ объемъ 1,00172 литра; при 100° С объемъ одного килограмма воды равенъ 1,043 литра, такъ что коэффициентъ кубическаго расширенія воды равенъ 0,00043. Въ виду того, что въ техникѣ приходится имѣть дѣло чаще всего съ водою обыкновенной температуры и не подъ слишкомъ большимъ давленіемъ, безъ большой погрѣбности можно признать воду тѣломъ постоянной плотности и считать при всѣхъ условіяхъ вѣсъ 1 литра воды равнымъ 1 *kgr*, а слѣд., вѣсъ ея въ объемѣ одного кубическаго метра равнымъ 1000 *kgr*.



Представителемъ упругихъ жидкостей будемъ считать воздухъ, представляющий собою смѣсь элементарныхъ газовъ,—азота (N) 76%, кислорода 21%, и аргона (Arg) 1%, по вѣсу; кромѣ того, воздухъ содержитъ всегда нѣкоторое количество углекислоты (CO<sub>2</sub>) и водяныхъ паровъ (H<sub>2</sub>O). Это одинъ изъ газовъ, весьма близкихъ къ совершеннымъ, т.-е. при обычныхъ условияхъ температуры и давленія подчиняется закону Марриотта и Гей-Люссака, который, какъ извѣстно, пишется такъ:

$$p v = RT,$$

гдѣ  $p$  есть давленіе, отнесенное къ единицѣ площади,  $v$ —удѣльный объемъ, т.-е. объемъ единицы вѣса,  $T$  есть температура, считаемая отъ абсолютнаго нуля, т.-е.

$$T = 273^{\circ} + t,$$

гдѣ  $t$  есть температура въ градусахъ Цельсія; наконецъ  $R$  есть постоянное, зависящее отъ природы газа. Такъ, для чистаго сухаго воздуха, по Реньо,  $R = 29,269$ ; при среднихъ условияхъ, т.-е. при  $t$ , близкомъ къ  $15^{\circ}$  C, и при 76%, влажности, Zeuner даетъ значеніе  $R = 29,375$ , а потому для обыкновеннаго атмосфернаго воздуха:

$$p \bar{v} = 8490.$$

Такъ какъ среднюю величину атмосфернаго давленія принято считать равною  $1,0333 \text{ kg/cm}^2$  или  $10333 \text{ kg/mtr}^2$ , то отсюда слѣдуетъ, что подъ такимъ давленіемъ  $1 \text{ kg}$  обыкновеннаго атмосфернаго воздуха занимаетъ объемъ  $0,8187 \text{ mtr}^3$ , а потому, обратно,  $1 \text{ mtr}^3$  обыкновеннаго атмосфернаго воздуха подъ среднимъ атмосфернымъ давленіемъ вѣситъ  $1,2214 \text{ kg}$ .

Въ послѣдующемъ принято выражать вѣса въ килограммахъ, а длины—въ метрахъ\*). Поэтому давленія, отнесенныя къ единицѣ площади,—эту величину мы будемъ всегда обозначать буквой  $p$ ,—будутъ выражаться въ  $\text{kg/mtr}^2$ . Кромѣ того, всегда будемъ обозначать:

\*)  $g$ —ускореніе силы тяжести; для нашихъ широтъ можно считать  $g = 9,81 \text{ mtr/sec}^2$ ;

•  $\rho$ —плотность, т.-е. массу тѣла въ объемѣ  $1 \text{ mtr}^3$ ;

•  $\gamma$ —вѣсъ тѣла въ объемѣ  $1 \text{ mtr}^3$  \*\*);

•  $\bar{v}$ —удѣльный объемъ, т.-е. объемъ (въ  $\text{mtr}^3$ ) 1 килограмма.

Изъ силу самаго смысла этихъ обозначеній заключаемъ, что для одной и той же тѣлы вѣсъ ихъ получаемъ, умножая ихъ объемъ на соответствующую имъ массу находимъ, какъ произведеніе изъ ихъ объема и соответствующей плотности  $\rho$ . Такъ какъ, сверхъ того, вѣсъ тѣла равенъ его

\* Объемы мы будемъ выражать въ  $\text{mtr}^3$ , хотя часто удобно принимать за единицу объема 1 литръ  $1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ mtr}^3$ . Въ Россіи въ практикѣ водоснабженій часто за единицу объемовъ принимаютъ 1 ведро—12,299 литровъ; легко видѣть, что вѣсъ 1 ведра равенъ  $12,299 \text{ kg} = 29,979$  фунтовъ, т.-е. почти 30 фунтовъ.

\*\* Согласно вышесприведеннымъ даннымъ, для воды  $\gamma = 1000 \text{ kg/mtr}^3$ , а для атмосфернаго воздуха подъ атмосфернымъ давленіемъ  $\gamma = 1,2214 \text{ kg/mtr}^3$ .

массѣ, умноженной на ускореніе тяжести, то легко устанавливается слѣдующее соотношеніе:

$$\gamma = \rho g$$

или

$$\rho = \frac{\gamma}{g}.$$

Такъ какъ величины  $\bar{v}$  и  $\gamma$  по смыслу являются взаимно-обратными, то:

$$v = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho g}.$$

Само собою разумѣется, что эти послѣднія соотношенія имѣютъ мѣсто и для тѣлъ неоднородныхъ, при чемъ значенія всѣхъ величинъ  $\rho$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$  и  $v$  должны быть отнесены къ весьма малымъ элементамъ площади, объема и вѣса.

Желающимъ болѣе подробно ознакомиться съ гидравликой рекомендуются, кромѣ монографій по отдѣльнымъ вопросамъ, упомянутыхъ въ курсѣ, слѣдующія specialныя книги:

А. Сатковичъ. Гидромеханика. 1-я часть курса гидравлики Николаевской Инженерной Академіи. Спб. 1904 г.

И. А. Евневичъ. Курсъ гидравлики (для студентовъ Спб. Технологическаго Института) Спб. 1891 г. Преимущественно гидродинамика.

Д. С. Зерновъ. Гидравлика и теорія турбинъ (лекція, читанныя въ Императорскомъ Техническомъ Училищѣ). Москва. 1897 г. Распродано.

Ф. Максименко. Гидравлика (для студентовъ Института инженеровъ путей сообщенія). Распродано.

Ив. Тиме. Курсъ гидравлики (для студентовъ Горнаго Института). Спб. 1891—94 г. Распродано.

G. Zeuner. Vorlesungen über Theorie der Turbinen. Bd. 1. Leipzig. 1899. Переводъ инж.-мех. В. Маѣева. Спб. 1904 г.

F. Grashof. Theoretische Maschinenlehre. Bd. 1. Leipzig. 1875.

Оба послѣднія сочиненія содержатъ преимущественно теоретическую часть. По живости и простотѣ изложенія сочиненіе Zeunera положительно образцово; программа его значительно отличается отъ принятой въ настоящемъ курсѣ. Работа Грасгофа исключительно теоретическая; весьма полезна при изученіи гидродинамики.

M. Ruhlmann. Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper. Hannover. 1879. Обширный курсъ съ массою таблицъ, практическихъ примѣровъ и указаній литературы. Къ сожалѣнію, нѣсколько устарѣлъ.

Julius Weisbach. Lehrbuch der theoretischen Mechanik. I. Teil. Abschnitt 6—7. Braunschweig. 1863. Наиболѣе развитъ отдѣлъ объ истеченіи черезъ отверстія.

Haton de la Gourpillerie. Cours de machines. Hydraulique. Tome 1. Paris. 1886. Свообразное изложеніе. Указанія по литературѣ.

Vresse. Cours de mécanique appliquée. 2-me partie. Hydraulique. Paris. 1868. Очень подробно разработаны отдѣлы о движеніи въ трубахъ и кавалахъ.

Flamanl. Mécanique appliquée. 2-me partie. Hydraulique. Paris. 1891. Обширный курсъ, составленный по болѣе широкой программѣ, нежели упомянутые до сихъ поръ.

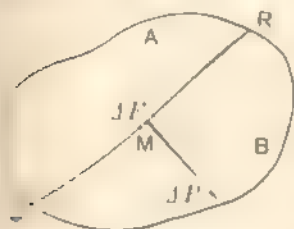
## ГЛАВА I.

### Гидростатика и гидродинамика въ примѣненіи къ гидравликѣ.

#### § 1. Гидростатическое давленіе.

Изъ самаго опредѣленія совершенной жидкости вытекаетъ слѣдствіе: *жидкое тѣло находится въ равновѣсіи, то внѣшнія силы, дѣйствующія на частицы поверхности, въ ограничивающей, направлены по перпендикулярнымъ нормалямъ къ этимъ поверхностямъ*; иначе не можетъ быть, такъ какъ всякая другая сила или оторвала бы или сдвинула бы эти поверхностныя частицы, т.-е. нарушила бы равновѣсіе.

Точно также и внутри жидкаго тѣла существуютъ *только отталкивательныя силы*. Въ самомъ дѣлѣ, выдѣлимъ внутри жидкаго тѣла малый элементъ  $M$  (фиг. 1) и проведемъ черезъ него мысленно поверхность  $QR$ ;



Фиг. 1.

элементъ этотъ на поверхности  $QR$  пусть занимаетъ площадь  $1F$ . Отнимемъ мысленно часть  $A$  отъ  $B$ . Чтобы равновѣсіе части  $B$  сохранилось, нужно по всей поверхности  $QR$  приложить внѣшнія силы, замѣняющія дѣйствіе  $A$  на  $B$ , въ томъ числѣ и на элементъ  $1F$ . Но такъ какъ  $QR$  есть поверхность, ограничивающая жидкое тѣло, то внѣшняя сила  $1P$ , приходящаяся на этотъ элементъ, можетъ дѣйствовать только нормально въ  $M$

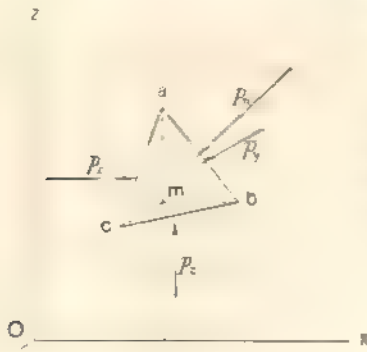
поверхности  $QR$  и быть направленною внутрь части  $B$ , т.-е. на этомъ элементѣ часть  $A$  отталкиваетъ часть  $B$ . Какъ бы мы ни проводили поверхности  $QR$  и какъ бы на нихъ ни брали элементъ  $M$ , это разсужденіе приложимо къ слѣдующему, *во всей массѣ жидкаго тѣла существуютъ только взаимныя усилія, — давленія, распространяющіяся по всемъ направлениямъ*.

Квадратъ отношенія  $\frac{1P}{1F}$ , при уменьшеніи  $1P$  и  $1F$  до нуля, т.-е.,

называется *гидростатическимъ давленіемъ* въ данной точкѣ и обозначается буквою  $p$ . Ясно, что давленіе это является результатомъ воздѣйствія на элементъ со стороны всей окружающей жидкости. По измѣренію, въ качествѣ единицы давленія, принятаго къ единицѣ площади, эта величина тож-

дественна съ разсматриваемымъ въ сопротивленіи материаловъ *напряженіемъ*. Поэтому предыдущія положенія можно выразить такъ: внутри (и на поверхности) жидкости могутъ быть только напряженія сжатія, напряженій разрыва и срѣза жидкость не выдерживаетъ. Если условиться считать положительнымъ направленіе сжимающей силы, то сила растягивающая должна быть признана отрицательной. Поэтому можно далѣе сказать, что внутри жидкаго тѣла величина  $p$  всегда положительна, и если при изслѣдованіи какого-нибудь вопроса значеніе  $p$  выходитъ отрицательнымъ, то это необходимо считать за признакъ разрыва въ этомъ мѣстѣ жидкаго тѣла.

Далѣе, можно показать, что величина этого давленія не зависитъ отъ положенія элемента поверхности, проводимой черезъ разсматриваемую частцу; другими словами, что *величина гидростатическаго давленія во всякой точкѣ жидкаго тѣла по всемъ направленіямъ одинакова*. Въ жидкомъ тѣлѣ, находящемся въ равновѣсіи, обратимъ вниманіе на частицу  $m$



Фиг. 2.

(фиг. 2), данную координатами  $x, y, z$ . Вообразимъ при ней безконечно малый тетраэдръ  $mabc$ , съ ребрами  $dx, dy, dz$ , параллельными соответствующимъ осямъ координатъ. Частицу  $m$  расположимъ въ вершинѣ тетраэдра. Напишемъ условия равновѣсія этого тетраэдра:

$$\Sigma X = 0,$$

$$\Sigma Y = 0,$$

$$\Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0,$$

$$\Sigma (Yx - Xy) = 0,$$

$$\Sigma (Xz - Zx) = 0,$$

гдѣ  $X, Y, Z$  суть проекціи на оси координатъ вѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло; вѣшнія же силы таковы:

1) Давленія отъ окружающей массы жидкости на поверхности, ограничивающія элементъ. Эти давленія перпендикулярны къ каждой элементарной площади  $tab, tac, tbc$  и  $abc$  и, кромѣ того, могутъ считаться постоянными для каждой изъ нихъ; такъ какъ сама площадь  $tab$  (или всякая другая) безконечно мала, то давленія въ различныхъ ея точкахъ могутъ отличаться другъ отъ друга только на безконечно малую величину, которая въ выраженіи всей равнодѣйствующей на грань  $tab$  будетъ уже безконечно малой высшаго порядка, исчезающей передъ прочими безконечно малыми ур-я. Итакъ, назовемъ нормальныя давленія на единицу площади элемента въ  $tac, tab, tbc$  и  $abc$  соответственно черезъ

$$p_x, p_y, p_z, p_n;$$

площади этих элементов соответственно выразятся такъ:

$$\frac{1}{2} dy dz, \quad \frac{1}{2} dz dx, \quad \frac{1}{2} dx dy, \quad dF,$$

такъ что силы давленій на эти площадки напишутся такъ:

$$p_x \cdot \frac{1}{2} dy dz, \quad p_y \cdot \frac{1}{2} dz dx, \quad p_z \cdot \frac{1}{2} dx dy, \quad p_n \cdot dF.$$

2) Вторая категория вѣншихъ силъ—это такъ называемыя массовыя силы, т.-е. силы, пропорциональныя массѣ разсматриваемаго элемента (напр., сила тяжести). При условіи однородности, жидкости, т.-е. если жидкость такова, что ея плотность  $\rho$  (масса единицы объема) или постоянна, или измѣняется отъ точки до точки непрерывно, безъ скачковъ,—пропорциональность массѣ равносильна пропорциональности объему. Если проекціи на оси координатъ такой объемной силы, отнесенной къ единицѣ массы,—другими словами,—проекціи ускоренія такой силы, назвать черезъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , то, въ виду того, что объемъ нашего тетраэдра выражается черезъ  $\frac{1}{6} dx dy dz$ , проекціи полной силы будутъ:

$$X\rho \cdot \frac{1}{6} dx dy dz, \quad Y\rho \cdot \frac{1}{6} dx dy dz, \quad Z\rho \cdot \frac{1}{6} dx dy dz.$$

Назовемъ черезъ  $n$  направленіе нормали къ грани  $abc$ . Тогда уравненіе проекцій силъ на ось  $x$ -овъ, принимая во вниманіе направленіе давленій, напишется такъ:

$$p_x \cdot \frac{1}{2} dy dz - p_n \cdot dF \cos(n, x) - X\rho \cdot \frac{1}{6} dx dy dz = 0.$$

Замѣняемъ  $dF \cos(n, x)$  равной ему величиной  $\frac{1}{2} dy dz$ : дѣля все уравненіе на  $\frac{1}{2} dy dz$ , получаемъ:

$$p_x - p_n + X\rho \cdot \frac{1}{3} dx = 0,$$

или, съ приближеніемъ  $dx$  къ нулю,

$$p_x = p_n.$$

Точно также получимъ:

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Уравненій моментовъ можно и не писать,—они удовлетворяются сами собою, такъ какъ начало координатъ мы могли бы выбрать въ  $m$ , т.-е. положить  $x = y = z = 0$ ; въ то же время весь тетраэдръ мы свели бы къ точкѣ.

Итакъ, гидростатическое давление въ данной точкѣ жидкости есть величина вполне определенная, одинаковая для всѣхъ направлений, какія можно провести черезъ данную точку. Такъ какъ мы разсматриваемъ жидкость въ состояніи равновѣсія, то давление  $p$  въ какой-либо точкѣ ся не можетъ зависѣть отъ времени, и, слѣдовательно,  $p$  есть функция только координатъ.

## § 2. Основное уравненіе гидростатики.

Выразимъ величину гидростатическаго давления  $p$  въ функции координатъ  $x, y, z$ , ставя одно только условіе, чтобы эта функція была непрерывной.

Вообразимъ въ жидкомъ тѣлѣ (фиг. 3), отнесенномъ къ прямоугольнымъ осямъ  $x, y, z$ , прямоугольный параллелепипедъ  $abcd$ , съ безконечно малыми ребрами  $dx, dy, dz$ , со-

ответственно параллельными осямъ координатъ; координаты вершины  $a$  назовемъ черезъ  $x, y, z$ . Напишемъ условія равновѣсія этого выдѣленнаго объема жидкости.

Внѣшнія силы таковы:

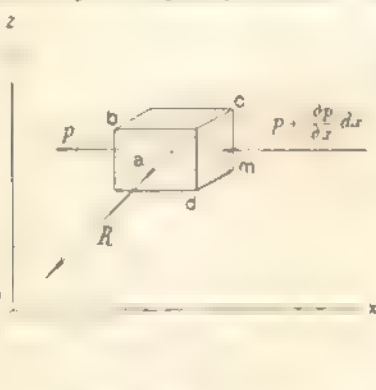
1) Гидростатическое давление. Пусть въ точкѣ  $a$  оно равно  $p$ . Въ ур-іе проекцій силъ войдетъ съ плюсомъ давление по всей площадкѣ  $ab$  и съ минусомъ давление по всей площадкѣ  $cd$ .

Иско, что эти двѣ элементарныя силы разнятся между собою лишь постольку, поскольку измѣнилось гидростатическое давление съ перемѣной координаты  $x$ . При томъ, въ силу непрерывности измѣненія давления, можно утверждать, что для выраженія полной безконечно малой разности этихъ двухъ силъ достаточно взять разницу гидростатическихъ давленій въ двухъ любыхъ точкахъ, лежащихъ на одной и той же линіи, параллельной оси  $x$ —овъ, напр., въ точкахъ  $a$  и  $m$ , ибо безконечно малыя разности давленій въ точкахъ  $a$  и  $m$  и въ точкахъ  $b$  и  $n$  отличаются между собой только на безконечно малыя величины высшаго порядка. Въ силу этого упомянутую разность силъ по гранямъ  $ab$  и  $cd$  можно выразить черезъ

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz,$$

такъ какъ давленіе въ точкѣ  $m$  по давленію  $p$  въ точкѣ  $a$  должно быть выражено черезъ

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$



Фиг. 13

2) Объемная сила  $R$ , приложенная въ центрѣ тяжести параллелепипеда и отнесенная къ единицѣ массы, пусть даетъ по осей  $x$ -овъ слагающую  $X$ ; тогда вся ея проекція на ось  $x$ -овъ есть

$$X\rho dx dy dz.$$

Больше силъ нѣтъ. Слѣдовательно, для равновѣсія нужно выполнение условія:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + X\rho dx dy dz = 0.$$

Относя это уравненіе къ единицѣ объема, т. е. дѣля его на  $dx dy dz$ , получаемъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Умножая эти уравненія соответственно на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , складывая и замѣчая, что сумма  $\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$  есть полный дифференціалъ такъ какъ  $p$  можетъ зависѣть только отъ  $x$ ,  $y$  и  $z$ , получимъ:

$$\rho(X dx + Y dy + Z dz) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp. \dots \dots (2)$$

Три остальныхъ уравненія равновѣсія нечего и писать, — они тождественно выполняются, ибо всѣ силы пересекаются въ центрѣ тяжести выдѣленнаго объема, и вращенія быть не могутъ.

Для капельной жидкости  $\rho = const$ ; поэтому уравненіе (2) можно написать такъ:

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = X dx + Y dy + Z dz \dots \dots \dots (2')$$

Въ ртутной газообразной жидкости, при условіи  $T = const$ , имѣемъ:

$$p\rho = const = B$$

$$p = \frac{B}{\rho} = B\gamma = Bg\rho.$$

$$\rho = \frac{B}{p},$$

гдѣ  $l = \frac{1}{B\gamma}$  есть постоянный для каждаго газа коэффициентъ; поэтому уравненіе (2) перепишется такъ:

$$\frac{dp}{lp} = d\left(\frac{Lp}{l}\right) = X dx + Y dy + Z dz \dots \dots \dots (2'')$$

Какъ въ ур. (2'), такъ и въ ур. (2'') имѣемъ въ первыхъ частяхъ полныя дифференциалы. Слѣдовательно, для равновѣсія жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ силы  $R$  со слагающими  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , и вторыя части должны быть также полными дифференциалами; а для этого нужно, чтобы силы  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  удовлетворяли условіямъ:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Разъ условія эти соблюдены, то вторыя части уравненій (2') и (2'') интегрируются, и можно найти нѣкоторую функцію  $U = t(x, y, z)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравненію:

$$dU = X dx + Y dy + Z dz \dots \dots \dots (3)$$

Эта функція  $U$  называется *силовой функціей* или *потенціаломъ*. Слѣдовательно, равновѣсіе жидкости возможно только въ томъ случаѣ, когда силы, на нее дѣйствующія, имѣютъ потенциалъ; и будетъ ли равновѣсіе или нѣтъ, будетъ зависетьъ отъ того, удовлетворяется ли численно уравненіе (2).

По уравненію (3) очевидно, что:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

т.-е. слагающія внѣшней силы по осямъ координатъ равны соответственнымъ частнымъ произвольнымъ силовой функціи. Также очевидно, что написанныя выше условія существованія силовой функціи сводятся къ основнымъ положеніямъ дифференціального исчисленія.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right), \text{ и т. д.}$$

Послѣ интеграціи уравненіе (2) даетъ:

$$p = \int \rho (X dx + Y dy + Z dz) = U_1(x, y, z) + C,$$



причемъ эта новая функція  $U_1$  связана съ силовою функціей простымъ соотношеніемъ, которое легко получить, интегрируя уравненія (2') и (2''), а именно:

для капельной жидкости

$$U_1 = \rho U,$$

для тѣлъ газообразныхъ

$$U_1 = e^{k'}$$

гдѣ  $e$  есть основаніе натуральныхъ логарифмовъ.

Итакъ, для равновѣсія жидкости должно быть удовлетворено уравненіе (2), т.-е. силы, дѣйствующія на жидкость, должны имѣть силовою функцію. Какъ извѣстно, <sup>у центра тяжести</sup> силы, представляющіяся функціями однихъ только координатъ, имѣютъ потенциалъ, а потому подъ дѣйствіемъ такихъ силъ равновѣсіе жидкости возможно всегда.

### § 3. Поверхности уровня.

Въ аналитической механикѣ указывается, что называется этимъ именемъ и каковы свойства этихъ поверхностей. Повторимъ это вкратцѣ.

Изъ ур-ій (2) и (3) находимъ, что

$$\frac{dp}{\rho} = dU,$$

или, послѣ интегрированія,

$$\int \frac{dp}{\rho} = U - C,$$

гдѣ  $C$  есть произвольное постоянное. Если будемъ мѣнять координаты такъ, чтобы первая часть уравненія сохраняла то или другое, но для даннаго случая постоянное значеніе, то, въ виду того, что  $U = f(x, y, z)$ , получимъ въ результатѣ уравненіе

$$U = const.$$

или

$$f(x, y, z) = const,$$

представляющее ур-іе семейства поверхностей, которыя и называются **поверхностями уровня**. Итакъ,

поверхностями уровня называются такія поверхности, уравненія которыхъ имѣютъ видъ силовою функціи, гдѣ координаты которыхъ обращаютъ силовою функцію въ постоянную величину.

Въ примѣненіи къ жидкому тѣлу *поверхности уровня суть поверхности постоянного гидростатическаго давленія*, въ чемъ легко убѣдиться,

такъ какъ если  $\int \frac{dp}{\rho} = const$ , то  $\frac{dp}{\rho} = 0$ , а это равносильно какъ для капельныхъ, такъ и для газообразныхъ жидкостей, положенію  $p = const$  (уравненія (2') и (2'') предыдущаго параграфа).

Дифференцированіе уравненія  $U = const$  даетъ  $dU = 0$ , следовательно, дифференціальное уравненіе поверхности уровня, по уравненію (3), есть

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

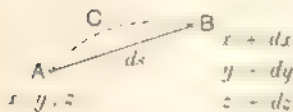
Физическое значеніе поверхности уровня слѣдующее. Свободная поверхность, т. е. поверхность, не прикасающаяся къ стѣнкамъ сосуда, вообще подвержена постоянному давленію, напримѣръ, атмосферному, а потому свободная поверхность жидкости есть, въ то же время, одна изъ поверхностей уровня. Далѣе, изъ самаго опредѣленія поверхности уровня слѣдуетъ, что это есть не только поверхность постояннаго давленія, но и постоянной плотности. Поэтому, если мы имѣемъ нѣсколько несмѣшивающихся жидкостей разныхъ плотностей, то онѣ при равновѣсіи могутъ расположиться только такъ, что разделяющія ихъ поверхности будутъ поверхностями уровня; подходя къ этой поверхности разъ со стороны одной, а другой разъ—со стороны другой жидкости, найдемъ въ уравненіи этой поверхности двѣ разные постоянныя величины.

Механическое значеніе поверхностей уровня слѣдующее

1) Равнодѣйствующая  $R$  вѣтвннхъ объемныхъ силъ  $X, Y, Z$  въ любой точкѣ поверхности уровня *нормальна* къ ней и направлена въ сторону *большаю* значенія силовой функціи.

2) Двѣ поверхности разныхъ гидростатическихъ давленій (или, что все равно, разныхъ потенциаловъ) *не перестыкаются*.

Доказывается это такъ. Пусть  $ds$  есть расстояние двухъ безконечно близкихъ точекъ жидкости  $A$  и  $B$  (фиг. 4), координаты одной пусть будутъ  $(x, y, z)$ , а другой  $(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Можемъ написать:



Фиг. 4.

$$dx = ds \cdot \cos(ds, x);$$

$$dy = ds \cdot \cos(ds, y);$$

$$dz = ds \cdot \cos(ds, z).$$

Для силъ  $X, Y, Z$  и ихъ равнодѣйствующей  $R$  можно написать

$$X = R \cos(R, x)$$

$$Y = R \cos(R, y);$$

$$Z = R \cos(R, z).$$

Тогда уравненіе (2) напишется такъ:

$$dp = \rho R \cdot ds \{ \cos(ds, x) \cos(R, x) + \cos(ds, y) \cos(R, y) + \cos(ds, z) \cos(R, z) \}$$

$$dp = \rho R \cdot ds \cos(R, ds) \dots \dots \dots (4)$$

Если бы точки *A* и *B* принадлежали одной поверхности уровня; тогда имѣемъ

$$p = \text{const.}$$

$$dp = 0;$$

Слѣдовательно, такъ какъ ни  $\rho$ , ни  $R$ , ни  $ds$  не равны нулю, то

$$\cos(R, ds) = 0$$

т. е.

$$\angle(R, ds) = 90^\circ \text{ или } 270^\circ \text{ и т. д.,}$$

т. е. вѣншая сила  $R$  перпендикулярна любому перемѣщенію  $ds$  въ пределахъ поверхности уровня, т. е. перпендикулярна къ самой поверхности.

Пусть *M* есть поверхность уровня давления  $p$  (фиг. 5), а весьма близкая къ ней поверхность *N* пусть имѣетъ давленіе  $(p + dp)$ .

Въ какой-нибудь частицѣ *m* первой поверхности вѣншая сила направлена по нормали  $mn$ , но въ какую сторону? Примемъ за положительное направление оси  $x$ -овъ направление  $mn$  въ сторону поверхности большаго давленія.

Такъ какъ  $R$  направлено по нормали, то уравненіе (4) получить видъ:

$$dp = + \rho R dx.$$

Таково измѣненіе давленія при переходѣ отъ *m* къ *n*. Такъ какъ здѣсь  $dx$  принято однозначнымъ съ  $dx$ , а  $\rho$  само по себѣ знака не имѣетъ, то передъ  $R$  надо поставить плюсъ. т. е. оно направлено въ сторону большаго гидростатическаго давленія. Поэтому, если имѣемъ двѣ не смѣшивающіяся жидкости разныхъ плотностей, то онѣ располагаются при равновѣсїи такъ, что плотность возрастаетъ въ направленїи дѣйствїя силы, т. е. болѣе тяжелая жидкость располагается ниже болѣе легкой.

Наконецъ, изъ выраженїя (4) имѣемъ:

$$ds = \frac{dp}{\rho R \cos(R, ds)}.$$

Минимумъ этого выраженїя имѣетъ мѣсто, когда  $\cos(R, ds) = 1$ ; тогда

$$ds = \frac{dp}{\rho R}.$$



Фиг. 5.

При переходѣ отъ одной поверхности уровня къ другой всегда имѣемъ  $dp > 0$ ; такъ какъ  $R$  и  $q$  вообще имѣютъ конечную величину, то  $ds$  не можетъ быть равно нулю. Но  $ds$ , при  $\cos(R, ds) = 1$ , и есть нормальное разстояніе двухъ поверхностей уровня, которое, такимъ образомъ, никогда въ нуль не обращается, а, слѣдовательно, двѣ поверхности уровня никогда не пересѣкаются.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о значеніи потенциала. Будемъ разсматривать на фиг. 4 длину  $AB$  не какъ разстояніе между двумя точками жидкости, а какъ какое-нибудь перемѣщеніе жидкой точки, находящейся при этомъ подъ вліяніемъ силъ  $X, Y, Z$ , изъ положенія  $A(x, y, z)$  въ положеніе  $B(x + dx, y + dy, z + dz)$ . Тогда трехчленъ  $X dx + Y dy + Z dz$ , который, по смыслу уравненія (3), есть  $dU$  (приращеніе силовой функціи), подобно предыдущему дастъ:

$$dU = R ds \cdot \cos(R, ds) \dots \dots \dots (5)$$

Вторая часть равенства есть, очевидно, работа силы  $R$  на пути  $ds$ ; по этому уравненію слѣдуетъ, что она равна приращенію потенциала.

Такъ какъ числовое значеніе потенциала мѣняется только съ переходомъ отъ одной поверхности уровня къ другой, то заключаемъ:

1) пока перемѣщеніе частицы происходитъ въ поверхности уровня ( $dU = 0$ ), силы, соответствующія этому потенциалу, никакой работы не даютъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ  $\cos(R, ds) = 0$ ;

2) какъ бы ни происходило перемѣщеніе жидкой частицы изъ  $A$  въ  $B$  (по  $AB$ , по  $ACB$  или какъ нибудь иначе), работа силъ  $X, Y, Z$  на этомъ пути равна разности значеній ихъ силовой функціи въ точкахъ  $A$  и  $B$  и не зависитъ отъ вида пути.

Итакъ, приращеніе потенциала силы есть работа, которую эта сила могла бы развить, если бы точка съ массой, равной единицѣ, получила бы весьма малое перемѣщеніе. Самый же потенциалъ есть нѣкоторый запасъ работы, могущій быть израсходованнымъ; величина этого запаса остается неопредѣленной, такъ какъ интегрированіе уравненія (2) или (4) вводитъ произвольное постоянное; но всякому перемѣщенію отъ одной поверхности уровня къ другой (внутри однородной среды) соответствуетъ вполне опредѣленное измѣненіе этого запаса работы, такъ какъ это равносильно интегрированію ур-ня (2) внутри опредѣленныхъ предѣловъ \*).

#### § 4. Видъ поверхностей уровня и законъ распределенія давленій въ частныхъ случаяхъ равновѣсія жидкости.

Займемся опредѣленіемъ вида поверхностей уровня въ слѣдующихъ частныхъ случаяхъ.

\* Хорошее представленіе о силовой функціи можно получать изъ курсовъ математической физики. См., напр., Шиллеръ. Теорія потенциальной функціи и ея applicatіи къ вопросамъ физики. Кіевъ, 1885 г. Также Г. Суслзовъ. Теорія потенциала и гидродинамика. Кіевъ, 1904 г.

1. Тяжелая жидкость. Пусть оси  $x$  и  $y$  горизонтальны, а ось  $z$  направлена вертикально вверх; тогда въ уравненіи (2) (стр. 10) нужно положить:

$$X=0; Y=0; Z=-g^*).$$

Поэтому дифференціальное уравненіе поверхностей уровня напишется такъ:

$$X dx + Y dy + Z dz = dU = -g dz = 0.$$

Интегрированіе его даетъ уравненіе семейства поверхностей уровня:

$$U = -gz + C = const.$$

Это есть уравненіе плоскостей, параллельныхъ плоскости  $xy$ . Итакъ, поверхности уровня тяжелой покоящейся жидкости, — безъ различія, капиллярной или упругой, суть горизонтальныя плоскости. Свободная поверхность капиллярной жидкости, слѣдовательно, тоже горизонтальна. Законъ распределенія давленій получимъ, интегрируя уравненіе (2). Сначала рассмотримъ случай капиллярной жидкости, когда  $\rho = const.$

Изъ ур. (2) и (3) имѣемъ:

$$dp = \rho dU = -\rho g dz = -\gamma dz,$$

откуда

$$p - \gamma z = H'. \dots \dots \dots (6)$$

Произвольное постоянное  $H'$ , введенное интеграціей, опредѣляется по начальнымъ даннымъ: пусть при  $z = z_0$  дано  $p = p_0$ . Тогда, для ур-іе (6)  $\gamma$  и называя постоянное  $\frac{H'}{\gamma}$  черезъ  $H$ , имѣемъ:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = H = const \dots \dots \dots (7)$$

Величина  $\frac{p}{\gamma}$  имѣетъ измѣреніе  $\frac{kgf \cdot mtr^3}{mt^2 \cdot kgf} = mtr$ , т.-е. это есть длина;

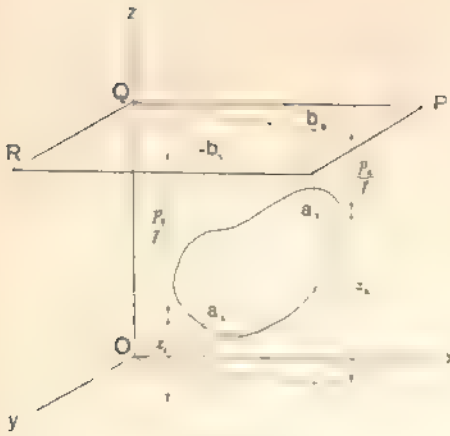
называютъ *высотой, соответствующей давленію*

Ур-іе (7) представляетъ собою законъ измѣненія гидростатическаго давленія въ жидкости, покоящейся подъ влияніемъ силы тяжести, и можетъ быть прочтено такъ:

*Сумма высоты жидкой точки надъ принятымъ горизонтомъ и высоты, соответствующей давленію, есть величина постоянная,*

зная  $H$ : такъ что (фиг. 6), если въ жидкомъ тѣлѣ будемъ брать двѣ точки  $a_1$  и  $a_2$  и къ ихъ координатамъ  $z$  будемъ прибавлять соответствен-

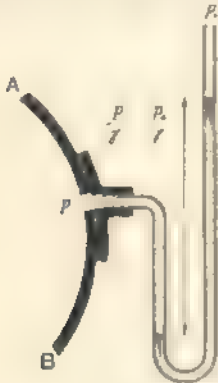
\* Силы  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  суть проекціи вѣншей силы, отнесенной къ единицѣ массы, т.-е. ускоренія, сообщаемого тѣлу, а потому для тяжелой жидкости  $Z = -g$  (ускореніе тѣла тяжести).



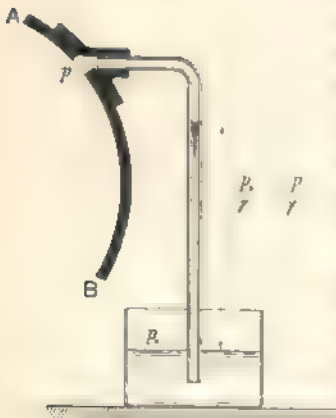
Фиг. 6.

т.-е.

Разность давлений в двух точках равна весу столба жидкости с основанием, равным единице площади, и с высотой, равной вертикальному расстоянию этих точек.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

ных высоты  $\frac{p}{\gamma}$ , то концы  $b_1$  и  $b_2$  этих суммарных отрезков всё будут лежать в одной горизонтальной плоскости  $PQR$ . Эта плоскость называется *плоскостью напора*. При равновесии ни одна частица тяжелой жидкости не может быть выше ее (такъ какъ иначе  $p$  стало бы отрицательнымъ, т.-е. перешло бы въ растяжение).

Уравнение (7) можемъ написать такъ:

$$p - p_0 = \gamma (z_0 - z),$$

На этомъ основано устройство всѣхъ тѣхъ приборовъ, — манометровъ, вакуметровъ, барометровъ и т. д., которыми измѣряется давленіе въ какой-нибудь средѣ помощью вѣса неподвижнаго столба жидкости. Эти приборы, называемые также *пьезометрами*, устриваются, вообще, такъ, что среда, въ которой измѣряется давленіе, сообщается помощью трубки съ средою, давленіе которой извѣстно, но притомъ такъ, что эта трубка остается наполненною жидкостью, для которой вѣсь единицы объема извѣстенъ. Должны быть приняты мѣры къ тому, чтобы эта жидкость была неподвижна. Тогда, по послѣднему ур-ю, достаточно знать вертикальное разстояние между тѣми точками этого жидкаго столба, которыми онъ соприкасается съ той и другой средами, чтобы найти разность ихъ давленій, такъ какъ эта разность пропорциональна указанной высотѣ, а коэф-тъ пропорциональности, — вѣсь единицы объема жидкости, т.-е.  $\gamma$ , — извѣстенъ.

На фиг. 7 и 8 представлены двѣ обычныя формы пьезометровъ. Въ стѣнкѣ  $AB$  сосуда, наполненнаго средою, находящеюся подъ давленіемъ  $p$ , укрѣплена стеклянная трубка. На фиг. 7 она имѣетъ форму буквы  $U$ ; ея вѣтви располагаются, для удобства отсчетовъ, вертикально. Если давленіе  $p$  въ сосудѣ больше, нежели въ средѣ, гдѣ давленіе равно  $p_0$ , то уровни жидкости располагаются, какъ показано на

чертежѣ, и разстояніе между ними даетъ непосредственно разность высоту, соответствующихъ въ жидкости, наполняющей трубку, давленіямъ  $p$  и  $p_0$ . Самую разность давленій находимъ, умножая эту высоту на  $\gamma$ . Очевидно, что какъ высота, такъ и объемъ, принятый за единицу, должны быть выражены въ соответствующихъ другъ другу мѣрахъ, т.-е., если, напр., высота измѣрена въ метрахъ, то  $\gamma$  должно быть взято, какъ вѣсъ 1 куб. метра; разность давленій получится въ тѣхъ же вѣсовыхъ единицахъ, отнесенныхъ къ 1 квадр. метру.

Если  $p_0$  больше, чѣмъ  $p$ , то, при нежеланіи имѣть длинную колѣнчатую трубку, можно устроить приборъ по схемѣ фиг. 8: поднятый въ этомъ *обратномъ пьезометрѣ* или *вакуметрѣ* столбъ жидкости опять пропорционаленъ разности давленій  $p - p_0$ , но на этотъ разъ отрицательной.

Имѣя въ виду такой приемъ измѣренія разности давленій, въ техническомъ языкѣ часто употребляютъ сокращенное выраженіе: «давленіе во столько то сантиметровъ ртути или миллиметровъ воды» и т. д. (мысль такого обозначенія величины давленія ясна). Упоминаемъ здѣсь о немъ только для того, чтобы подчеркнуть, что оно будетъ определено только тогда, когда будетъ указана та жидкость, высотой которой измѣряется это давленіе. Такъ, разность давленій въ 1  $kg/cm^2$  или въ 10000  $kg/mtr^2$ , т.-е. та разность давленій, которая въ технику часто называется *одной атмосферой*, уравновѣшивается столбомъ воды высотой въ

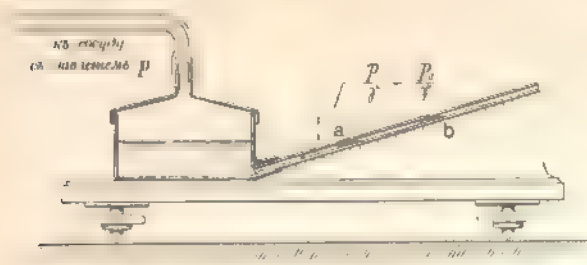
$(z - z_0) = \left( \frac{p - p_0}{\gamma} \right) = \frac{10000}{1000} mtr = 10 mtr$ . Если ту же разность давленій уравновѣшивать столбомъ ртути, удѣльный вѣсъ которой при  $0^\circ C$  равенъ 13,59, т.-е. вѣсъ куб. метра которой при  $0^\circ C$  есть 13590  $kg$ , то для этого потребуются столбъ въ  $\frac{10000}{13590} mtr$  или въ 0,7358  $mtr$ . Поэтому понятно, что

компактность такихъ приборовъ зависитъ отъ рода употребляемыхъ жидкостей.

Точность показаній такихъ приборовъ находится также въ зависимости отъ рода жидкости. Поэтому небольшія разности давленій (давленія въ воздухопроводахъ къ вагранкамъ, горнамъ и т. п.) измѣряютъ обыкновенно столбомъ воды; для большихъ разностей давленій употребляютъ ртуть\*). Для очень малыхъ разностей давленій, напр., тѣхъ, которыя достаточны для горѣнія при тягѣ дымовою трубою, употребляютъ алкоголь (при  $15^\circ C$  его  $\gamma = 793 kg/mtr^3$ ) и, кромѣ того, располагаютъ трубку пьезометра не вертикально, а съ очень малымъ наклономъ къ горизонту (фиг. 9), такъ какъ при этомъ даже очень небольшому измѣненію  $\frac{p - p_0}{\gamma}$  вертикальной высоты столба будетъ соответствовать замѣтное и легко отсчитываемое пере-

\*) При употребленіи такихъ приборовъ необходимо принимать во вниманіе влияние температуры, особенно при такихъ сильно расширяющихся при нагреваніи тѣлахъ, какъ ртуть. Кромѣ того, нужно всякій разъ обращать вниманіе на положеніе вуля той шкалы, которая употребляется для измѣренія высоты столба жидкости. Остановившись на всѣхъ деталяхъ этихъ приборовъ мы здѣсь, однако, не будемъ и отсылаемъ интересующихся къ курсамъ физики.

мѣщеніе  $ab$  уровня вдоль трубки. Такой приборъ применяется Креллемъ въ его анализаторѣ\*) продуктовъ горѣнія въ топкахъ паровыхъ котловъ.



Фиг. 9.

До сихъ поръ мы говорили про среду съ известнымъ давлениемъ  $p_0$ . Такою средою обыкновенно считаютъ атмосферный воздухъ, если только измѣреніе производится не слишкомъ высоко надъ уровнемъ моря и, вообще, при обыкновенномъ среднемъ состояніи атмосферы. Само со-

бою понятно, что и атмосферное давленіе можетъ быть измѣрено вѣсомъ столба жидкости, съ одной стороны соприкасающагося съ атмосфернымъ воздухомъ, а съ другой—оканчивающагося въ безвоздушномъ пространствѣ, вѣрнѣе въ такъ называемой Торричеллиевой пустотѣ. Для этихъ измѣреній употребляются общезвѣстные барометры, по существу ничѣмъ не отличающіеся отъ пьезометровъ.

Для жидкости внутри барометра ур-іе (7) попрежнему имѣетъ мѣсто, при чемъ давленіе  $p^{**}$  въ Торричеллиевой пустотѣ настолько мало, если температура окружающей среды не высока, что имъ можно пренебречь и сказать, что барометрическое давленіе

$$p_0 = \gamma(z - z_0),$$

гдѣ  $(z - z_0)$  есть высота столба жидкости въ барометрѣ. Въ среднемъ это давленіе соответствуетъ столбу ртути въ 0,760 *mtr* или воды въ 10,33 *mtr*, слѣдоват., оно равно  $13,590 \cdot 0,760 \text{ kgr } mtr^2 = 10330 \text{ kgr } mtr^2 = 1,033 \text{ kgr } cm^2$ , т.-е. весьма близко къ упомянутой выше «технической атмосферѣ». Само собою разумѣется, что когда рѣчь идетъ о точныхъ наблюденіяхъ, то недостаточно наблюдать высоты въ пьезометрахъ: необходимо отмѣчать также барометрическое давленіе, со вѣми предосторожностями и поправками на температуру помѣщенія, какъ объ этомъ подробно трактуется въ курсахъ физики.

Вернемся теперь къ ур-ю (7). Раньше мы направляли ось  $z$ —овъ къверху. Если направить ее внизъ, то измѣнится только знакъ въ уравненіи (6), и мы получимъ:

$$dp = \gamma dz.$$

Слѣдовательно:

$$p = \gamma z + H'.$$

Пусть плоскость  $xy$  выбрана на свободной поверхности, гдѣ задано давленіе  $p_0$ ; тогда при  $z=0$  уравненіе дастъ

$$H' = p_0,$$

\*) Имѣется въ лабораторіи И. Т. У.

\*) Оно опредѣляется упругостью насыщенныхъ паровъ жидкости, заключенной въ барометрѣ, при температурѣ окружающей среды.



а потому:

$$p = \gamma z + p_0 \dots \dots \dots (8)$$

Отсюда видно, что если на свободной поверхности приложено внешнее давление  $p_0$ , то во покоящейся жидкости оно цѣликомъ передается во все стороны. Это есть принципъ Паскаля, нашедшій себѣ широкое примѣненіе въ технику послѣ того, какъ Брамá изобрѣлъ кожаныя манжеты (гидравлическій прессъ, гидравлическіе вѣсы, аккумуляторы и т. п.).

Ур-іе (8) разъясняетъ также, почему однородная жидкость, налитая въ двухъ сообщающихся сосудахъ, располагается въ нихъ такъ, что высоты стоянія въ обѣихъ вѣтвяхъ одинаковы; почему жидкости разныхъ плотностей располагаются въ сообщающихся сосудахъ такъ, что высоты стоянія ихъ надъ плоскостью раздѣла обратно пропорціональны плотностямъ и т. д.

Законъ распредѣленія давленій въ покоящейся упругой жидкости получимъ такъ. Имѣемъ:

$$dp = \rho dU.$$

Для случая, когда оси  $x$  и  $y$  горизонтальны, а ось  $z$  направлена вертикально внизъ, мы уже имѣли

$$dU = g dz,$$

слѣдовательно,

$$dp = g\rho dz.$$

Кромѣ того, при постоянной температурѣ, на основаніи закона Мариотта, мы получили въ § 2 ур-іе (2"). Связывая его съ вышезаписаннымъ и интегрируя, получимъ:

$$Lp = kgz + const$$

или

$$L \frac{p}{p_0} = kg(z - z_0),$$

гдѣ  $p_0$  есть давленіе въ точкѣ, находящейся на разстояніи  $z_0$  отъ плоскости извѣстнаго давленія. Этимъ ур-іемъ, надлежащимъ образомъ видоизмѣненнымъ, чтобы считаться съ возможными переизмѣненіями температуры, пользуются при барометрическомъ нивелированіи, т.-е. при опредѣленіи высоты  $z$  данной мѣстности по измѣренному въ ней давленію атмосферы  $p$ . (Подробности см., стр. 107, въ курсѣ гидравлики Евневича).

2) Всѣ точки невѣсомой, неподвижной и несжимаемой жидкости притягиваются къ одному, неподвижному же центру по закону, выражающемуся нѣкоторой функціей притяженія между точкой и центромъ притяженія.

Начало координатъ возьмемъ въ центрѣ притяженія. Беремъ точку съ координатами  $(x, y, z)$ ; разстояніе ея отъ центра назовемъ черезъ  $r$ . Сила

притяженія, отнесенная къ единицѣ массы, т.-е. ускореніе этого притяженія, пусть выражается черезъ  $f(r)$ . Тогда имѣемъ:

$$X = f(r) \cdot \frac{x}{r},$$

$$Y = f(r) \cdot \frac{y}{r},$$

$$Z = f(r) \cdot \frac{z}{r},$$

такъ какъ отношенія  $\frac{x}{r}$ ,  $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{z}{r}$  суть косинусы угловъ между векторомъ  $r$  и соответственными осями.

Дифференціальное уравненіе для поверхности уровня будетъ имѣть видъ:

$$\frac{f(r)}{r} (x dx + y dy + z dz) = 0.$$

Отношеніе  $\frac{f(r)}{r}$  въ этомъ уравненіи можно сократить, такъ какъ оно хотя и переменнo, но для всякаго конечнаго значенія  $r$  имѣетъ конечную величину. Поэтому поверхность уровня опредѣлится уравненіемъ

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = C.$$

Это есть уравненіе шара; слѣдовательно, при такихъ силахъ поверхности уровня суть концентрическія сферы съ центрами въ центрѣ притяженія.

3. Сосудъ, содержащій тяжелую жидкость, равномерно вращается вокругъ какой-либо оси.

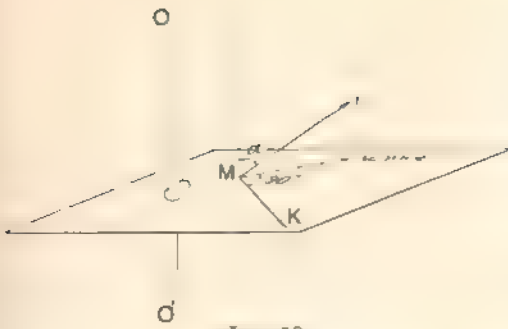
Это есть собственно случай движенія. Но по принципу д'Аламбера всякое движеніе можно разсматривать какъ случай покоя, если только прибавить къ внѣшнимъ силамъ всѣ силы инерціи. Такъ мы и поступимъ. Въ общемъ случаѣ нужно вводить слѣдующія силы инерціи:

- а) силу инерціи въ переносномъ движеніи, •
- б) силу инерціи, соответствующую поворотному ускоренію, и
- с) силу инерціи въ относительномъ движеніи.

Такъ какъ мы разсматриваемъ случай равномернаго вращенія, то сила инерціи движенія влеченія (вращеніе сосуда) есть центробѣжная, и ея ускореніе въ какой-нибудь точкѣ есть  $\omega^2 r$ , гдѣ  $\omega$  есть угловая скорость вращенія, а  $r$  — разстояніе разсматриваемой точки отъ оси вращенія.

Сила инерціи поворотнаго ускоренія обращается въ нашемъ случаѣ относительнаго покоя въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, поворотное ускореніе  $k$  выражается по теоремѣ Кориолиса такъ:

$$k = 2\omega w \sin \alpha.$$

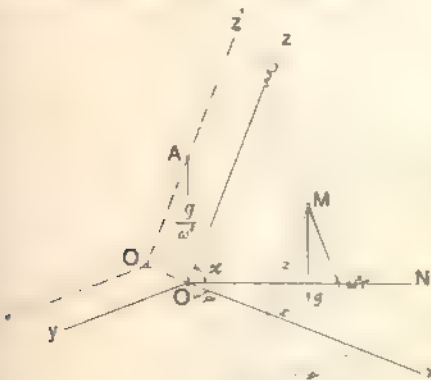


Фиг. 10.

Здесь  $\omega$  есть мгновенная угловая скорость вращения около мгновенной оси  $OO'$  \*) (фиг. 10); направление вращения примемъ по часовой стрѣлкѣ если смотрѣть по оси  $OO'$  сверху вниз;  $w$  есть скорость относительнаго движенія,  $\alpha$  — ея уголъ съ осью вращения. Слѣдовательно,  $w \sin \alpha$  есть проекція относительной скорости на плоскость, перпендикулярную къ оси вращения. Поворотное ускореніе по величинѣ равно этой проекціи, умноженной на двойную угловую скорость вращения. Направленіе его ( $MK$ ) получимъ, если эту проекцію повернемъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращения, на  $90^\circ$  въ сторону вращения.

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ относительнаго перемѣщенія нѣтъ, т. е.  $x = 0$ , то и  $k = 0$ . По той же причинѣ сила инерціи въ относительномъ движеніи также равна нулю.

Итакъ, пусть жидкость вращается въ сосудѣ около оси  $x$  (фиг. 11), составляющей съ горизонтомъ  $ON$  уголъ  $\alpha$  и лежащей въ вертикальной плоскости чертежа; ось  $x$  — овь расположимъ также въ плоскости чертежа; ось  $y$  — овь тогда будетъ горизонтальна (перпендикулярна къ плоскости чертежа). Какая нибудь частица  $M$  подвержена дѣйствию вертикальной силы тяжести, съ ускореніемъ  $g$ , и центробѣжной силы, съ ускореніемъ  $\omega^2 r$ , — послѣдняя, конечно, перпендикулярна къ оси вращения  $Ox$ . Эти двѣ силы даютъ проекціи по осямъ



Фиг. 11.

ординатъ:

$$\begin{aligned} X &= g \cos \alpha + \omega^2 r \cos \varphi = g \cos \alpha + \omega^2 x, \\ Y &= \omega^2 r \sin \varphi = \omega^2 y, \\ Z &= -g \sin \alpha. \end{aligned}$$

Дифференціальное уравненіе поверхностей уровня будетъ имѣть видъ:

$$(\omega^2 x + g \cos \alpha) dx + \omega^2 y dy - g \sin \alpha dz = dU = 0 \quad \dots \quad (9)$$

Послѣ интегрированія получимъ:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + g \cos \alpha x + \frac{\omega^2 y^2}{2} - g \sin \alpha z = const.$$

\* Такъ какъ въ нашемъ случаѣ движеніе влеченія есть вращеніе, то  $OO$  есть не мгновенная, а неподвижная ось вращения сосуда.

Для все уравнение на  $\frac{\omega^2}{2}$  и прибавляя къ обѣимъ частямъ уравнения постоянную величину  $\frac{g^2 \cos^2 \alpha}{\omega^4}$ , получаемъ:

$$\left(x + \frac{g}{\omega^2} \cos \alpha\right)^2 + y^2 - \frac{2g \sin \alpha}{\omega^2} z = \text{const.} \quad (10)$$

причемъ, конечно, числовое значеніе постояннаго измѣнилось. Это есть уравнение параболоида вращенія, но не вокругъ оси  $Oz$ , а нѣкоторой другой, положеніе которой можно опредѣлить такъ:

Отложимъ по вертикали  $OA$  отрѣзокъ  $OA = \frac{g}{\omega^2}$ . Черезъ точку  $A$  проводимъ линію  $O'A' \parallel Oz$  до пересѣченія съ продолженной осью  $Ox$ . Очевидно, что отрѣзокъ  $OO' = \frac{g}{\omega^2} \cos \alpha$ . Если перенести начало координатъ въ  $O'$ , то уравненіе (10) приметъ видъ:

$$x_1^2 + y_1^2 - \frac{2g \sin \alpha}{\omega^2} z_1 = \text{const.} \quad (11)$$

Если въ этомъ уравненіи положить  $z_1$  равнымъ какому нибудь постоянному, то получимъ уравненіе круга, отнесеннаго къ его центру, что показываетъ, что поверхность, выражаемая уравненіемъ (10), пересѣкается съ плоскостями, параллельными  $xy$ , по кругамъ, центры которыхъ лежатъ на оси  $O'z'$ ; слѣдовательно, это есть поверхность вращенія около оси  $O'z'$ .

Если взять какое-либо меридіональное сѣченіе, — напримѣръ, сѣченіе плоскостію  $xz'$ , для чего нужно положить въ уравненіи (11)  $y_1 = 0$ , — то получимъ:

$$x_1^2 = \frac{2g \sin \alpha}{\omega^2} z_1 + \text{const.}$$

Это есть уравненіе параболы, отнесенной къ оси; параметръ ея, очевидно, есть  $O'A = \frac{g \sin \alpha}{\omega^2}$ .

Итакъ, когда тяжелая несжимаемая жидкость вращается равномерно вокругъ какой-нибудь оси, то

*поверхности уровня суть параболоиды вращенія съ параметромъ  $\frac{g \sin \alpha}{\omega^2}$ ; ось этихъ параболоидовъ параллельна оси вращенія и получается, если ось вращенія перемѣститъ по вертикали на величину  $\frac{g}{\omega^2}$ .*

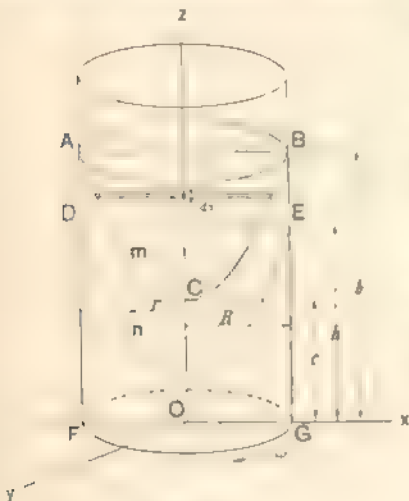
\*) Легко видѣть, что величина  $\frac{g}{\omega^2}$ , равная ускоренію дѣльному на квадратъ угловой скорости, есть нѣкоторая длина.

Разсмотримъ слѣдующіе частные случаи:

а) Ось вращенія вертикальна, т.-е. уголъ  $\alpha = 90^\circ$ . Уравненіе (11) приметъ видъ:

$$x^2 + y^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = \text{const.} \quad (12)$$

Параметръ параболы меридіаннаго сѣченія будетъ равенъ  $\frac{g}{\omega^2}$ , а разстояние  $OO'$  между осью вращенія сосуда и осью параболоида, равно  $\frac{g}{\omega^2} \cos \alpha$ , обращается въ нуль, т.-е. оси совпадаютъ. Свободная поверхность, какъ одна изъ поверхностей уровня, опредѣлится изъ уравненія (12), если при извѣстныхъ начальныхъ данныхъ можно опредѣлить числовую величину постояннаго. Такъ, напр., зададимъ себѣ сосудъ, — для простоты круглый цилиндръ радиуса  $R$ , — вращающійся около своей геометрической оси  $Ox$  (фиг. 12). Пусть дано, что въ покоящемся сосудѣ жидкость стоитъ на уровнѣ  $DE$ , на высотѣ  $h$ . Вращеніе происходитъ по стрѣлкѣ съ постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Свободная поверхность даетъ въ сѣченія съ плоскостью  $xz$  параболу  $ACB$ , уравненіе которой изъ (12), при  $y = 0$ , есть



Фиг. 12.

$$x^2 = \frac{2gz}{\omega^2} + \text{const.}$$

Назовемъ координату вершины  $C$  черезъ  $c$ . Ей соответствуетъ координата  $x = 0$ . Изъ послѣдняго уравненія имѣемъ, слѣдовательно.

$$\text{const} = - \frac{2g}{\omega^2} c.$$

Итакъ, уравненіе параболы свободной поверхности есть

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} (z - c) \quad (13)$$

Чтобы выразить неизвѣстное  $c$  въ функціи радиуса сосуда  $R$ , высоты  $h$  и скорости  $\omega$ , напишемъ выраженіе того, что объемъ жидкости въ сосудѣ при вращеніи не измѣняется, т.-е. что

$$\text{объемъ } ACBGF = \text{объему } ABGF - \text{объемъ } ACB - \text{объему } DEGF.$$

Назовемъ черезъ  $h$  ту высоту, до которой жидкость поднимается у стѣнокъ сосуда. Тогда это условие выразится такъ:

$$\pi R^2 h = \pi R^2 b \text{ — объемъ } ACS.$$

Выражаемъ объемъ параболоида  $ACS$  по уравненію параболы; онъ равенъ:

$$\int_c^h \pi x^2 dz = \frac{2\pi q}{\omega^2} \int_c^h (z - c) dz = \frac{2\pi q}{\omega^2} \left( \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} - bc + c^2 \right) = \frac{\pi q}{\omega^2} (b - c)^2.$$

Примѣняя ур-е (13) къ точкѣ  $B$ , получаемъ, очевидно,

$$R^2 = \frac{2q}{\omega^2} (b - c) \text{ . . . . . (14)}$$

Поэтому объемъ параболоида  $ACS$  можно представить черезъ  $\frac{1}{2} \pi R^2 (b - c)$ , послѣ чего написанное выше соотношеніе объемовъ приведетъ къ соотношенію

$$h = b - \frac{1}{2} (b - c) = \frac{b + c}{2} \text{ . . . . . (15)}$$

Наконецъ, изъ ур-й (14) и (15) находимъ:

$$c = h - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Итакъ, съ угловою скоростью мѣняется и параметръ параболъ поверхностей уровня,  $\frac{g}{\omega^2}$ , и координата вершины свободной поверхности,  $c$ .

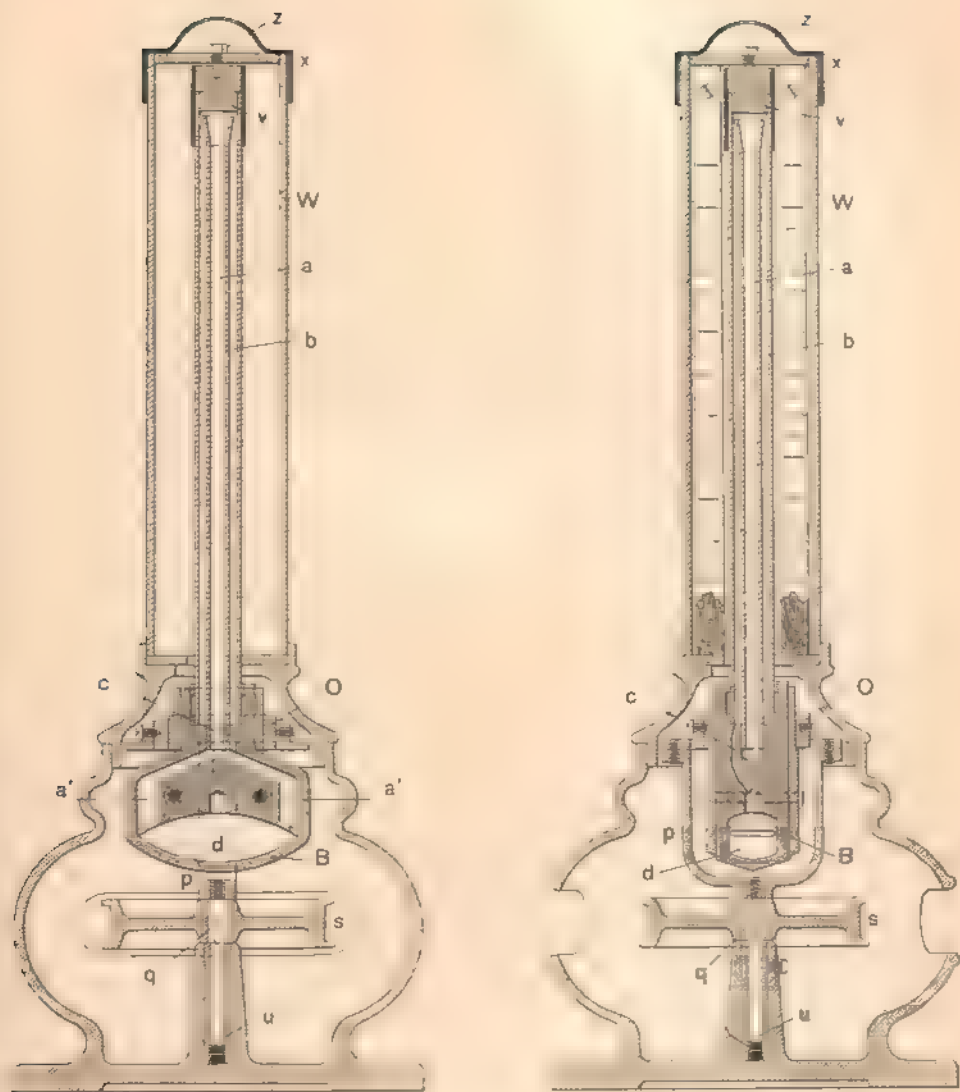
Законъ распредѣленія давленій въ этомъ случаѣ получимъ, интегрируя ур-е

$$\frac{1}{\rho} dp = \omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz,$$

которое получается изъ (9), по замѣнѣ въ немъ  $dU$  равной ему величиной  $\frac{1}{\rho} dp$  и при углѣ  $\alpha = 90^\circ$ . Получаемъ

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz + const.$$

Постоянное опредѣлимъ изъ условія, что на свободной поверхности имѣется извѣстное давленіе  $p_0$ . Если текуція координаты свободной поверхности обозначить черезъ  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$ , а координату ея вершины, по преды-



Двухжидкостный тахометръ,  
 исполняемый фирмой  
 Rheinische Tachometerbau-Gesellschaft въ Кельнѣ.

дущему, черезъ  $c$ , то, подобно ур-ю (12), получимъ ур-е свободной поверхности въ такомъ видѣ

$$x_0^2 + y_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} (z_0 - c),$$

а законъ распределенія давленій найдемъ по уравненію:

$$\frac{p}{\gamma} - p_0 = \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - y^2 - r_0^2 + y_0^2) - (z - z_0),$$

при чемъ координаты  $r_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  связаны вышенаписаннымъ ур-емъ свободной поверхности. Отсюда ясно, что пока мы разсматриваемъ точки одной и той же вертикальной цилиндрической поверхности какого нибудь радиуса  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , то давленія по ней будутъ возрастать пропорционально ихъ вертикальному разстоянію до свободной поверхности. При этомъ очевидно, что эти разстоянія можно брать или по линіи  $mn$ , проведенной черезъ данную точку  $m$  до свободной поверхности, или по любой вертикали, но какъ ея отрѣзокъ между свободной поверхностью и поверхностью уровня, проходящей черезъ данную точку  $m$ . Если же мы остаемся въ предѣлахъ горизонтальной плоскости, то ур-е показываетъ, что давленіе возрастаетъ въ ней пропорционально квадрату радиуса; въ точкахъ одной и той же горизонтальной плоскости и одинаково удаленныхъ отъ оси вращения давленіе будетъ одно и то же.

Тѣмъ обстоятельствомъ, что съ измѣненіемъ угловой скорости вращенія измѣняется видъ свободной поверхности и координата ея вершины, пользуются для устройства *тахометровъ*, — приборовъ, дающихъ возможность опредѣлять число оборотовъ вала. Для примѣра опишемъ устройство *двухжидкостнаго тахометра* (Bifluid-Tachometer), исполняемаго фирмой Rheinische Tachometerbau-Gesellschaft во Фрейбургѣ въ Баваріи (нѣмецкій патентъ № 114323). Онъ устроенъ слѣдующимъ образомъ (см. отд. табл. I):

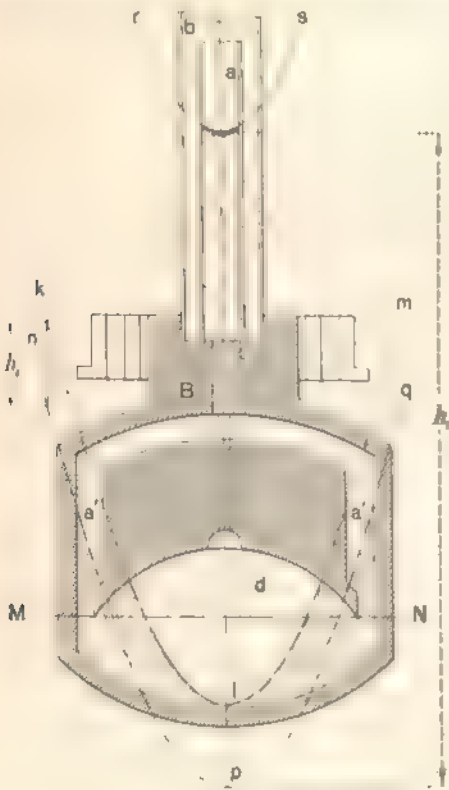
Внутренняя стеклянная трубка  $a$ , открытая сверху, примыкаетъ внизу къ сосуду  $B$  (изъ твердаго каучука или целлюлоида), нижняя часть котораго расширена и имѣетъ полость  $d$ ; эта полость двумя боковыми каналами  $a'$  соединена съ внутреннею трубкою  $a$ ; кромѣ того, въ сосудѣ  $B$  есть еще каналъ  $c$ , мало отклоняющійся отъ оси сосуда и соединяющій верхнюю часть полости  $d$  съ промежуткомъ между трубкою  $a$  и охватывающею ее трубкою  $b$ . Верхній конецъ трубки  $b$ , свободно покрывающій трубку  $a$ , герметически закрытъ металлической пробкой  $v$ . Сосудъ  $B$ , помощью кардановаго подвѣса  $O$ , соединенъ съ обоймой  $p$ , которая приводится во вращеніе двигателемъ  $s$  черезъ валикъ  $q$ , пята  $u$  котораго помѣщена въ металлической станинѣ; на этой станинѣ укрѣплена третья толстѣнная стеклянная трубка  $W$ , внутри которой помѣщены двѣ двухстороннія шкалы съ дѣлениями. Наконецъ, на трубкѣ  $W$  вверху надѣтъ колпачокъ  $x$ , въ которомъ укрѣпленъ отвѣтъ  $z$ , ограничивающій размахи системы трубокъ  $a$  и  $b$ .

Въ полость  $d$  наливается до уровня боковыхъ отверстій, соединяющихъ каналы  $a'$ , жидкость съ большимъ удѣльнымъ вѣсомъ (ртуть), а



выше ея, вплоть до начала трубки *b*, легкая жидкость, не смѣшивающаяся съ первой и, по возможности, мало расширяющаяся при нагреваніи. Само собою разумѣется, что въ покоящемся приборѣ уровень жидкости въ трубкахъ *a* и *b* стоитъ на одной высотѣ, такъ какъ обѣ эти трубки вверху свободно сообщаются между собою; по этой же причинѣ на свободной поверхности жидкости въ обѣихъ трубкахъ всегда имѣется одно и то же давленіе.

Послѣ того, какъ сосудъ приведенъ во вращеніе, поверхность раздѣла обѣихъ жидкостей, первоначально плоская, обращается въ поверхность параболоида вращения. При этомъ часть ртути вытѣсняется въ боковые каналы *a'*, выгоняя оттуда легкую жидкость въ центральную трубку; въ силу этого вмѣстимость полости *d*, за вычетомъ пространства, занятого ртутью, увеличивается, и сюда стекаетъ легкая жидкость изъ вольцевой трубки *b*.



Фиг. 13.

Очевидно, что, въ виду этого, давленія на поверхностяхъ соприкосновенія обѣихъ жидкостей въ каналахъ *a'* и въ полости *d* перестаютъ быть одинаковыми, а слѣдовательно, обѣ жидкости соприкасаются между собою по двумъ разнымъ поверхностямъ уровня, т.-е. по двумъ разнымъ параболоидамъ, какъ показано на фиг. 13, гдѣ *klm* есть поверхность соприкосновенія обѣихъ жидкостей въ полости *d*, *prq* — такая же поверхность въ каналахъ *a'*, *rs* — на параболоидѣ свободной поверхности въ центральной трубкѣ *a*; свободная поверхность въ трубкѣ *b*, обнаруживающаяся въ боковомъ обходномъ каналѣ, на чертежѣ не показана, — ее легко вообразить гдѣ-нибудь выше параболоида *klm*, но ниже параболоида *rs*.

Само собою разумѣется, что всѣ эти параболоиды имѣютъ одинъ и тотъ же параметръ, т.-е. тождественны между собою и различаются только

положеніями ихъ вершинъ на оси вращенія сосуда. Легко, далѣе, убѣдиться, что вертикальное разстояніе  $h_1$  между одноименными точками параболоидовъ *klm* и *prq* относится къ такому же разстоянію  $h_2$  между параболоидами *rs* и *prq*, но уменьшенному на вертикальное разстояніе между параболоидомъ свободной поверхности въ трубкѣ *b* и параболоидомъ *klm*, — какъ удѣльные вѣса обѣихъ жидкостей. Наконецъ, очевидно, положеніе поверхности *rs* мѣняется съ числомъ оборотовъ, т.-е. съ видоизмѣненіемъ параболоидовъ *klm*, *prq* и т. д. Благодаря этому, съ приведеніемъ прибора во вращеніе, жидкость быстро поднимается въ его центральной трубкѣ, отчего

отсчеты производятся легко. Если бы въ приборѣ была одна только жидкость, то, несмотря на его форму, при его вращеніи во внутренней трубкѣ она стала бы опускаться и поднималась бы въ наружной; одновременно пострадали бы какъ точность отсчета, такъ и чувствительность прибора.

Приборъ тарируется сообщеніемъ ему опредѣленной угловой скорости и нанесеніемъ на шкалахъ соответствующихъ положеній поверхности *mn*; если передаточное число отъ вала машины къ валуку тахометра сохраняется одно и то же, то на шкалахъ можно прямо записывать числа оборотовъ вала машины. Понятно, что при употребленіи прибора это передаточное число должно точно соблюдаться. Имѣя въ виду, что съ переменной передаточнаго числа одни и тѣ же числа оборотовъ тахометра соответствуютъ новымъ числамъ оборотовъ вала машины, удобнѣе всего шкалы одной стороны прибора градуировать на одно передаточное число, а шкалы другой стороны—на другое; благодаря этому одинъ и тотъ же приборъ можетъ служить для измѣренія чиселъ оборотовъ въ очень широкихъ предѣлахъ. Такъ, напр., въ приборѣ, принадлежащемъ гидравлической лабораторіи И. Т. У., по одной сторонѣ шкалы читаемъ числа оборотовъ отъ 180 до 440, а по другой—отъ 360 до 880.

Изъ предыдущаго описанія слѣдуетъ, что для точности отсчетовъ совершенно необходимо, чтобы количества обѣихъ жидкостей съ теченіемъ времени не мѣнялись и чтобы положеніе поверхности раздѣла *mn* оставалось постояннымъ. Этому можетъ помѣшать всякая деформация сосуда подъ влияніемъ случайныхъ обстоятельствъ или подъ влияніемъ измѣненія температуры. Равнымъ образомъ, измѣненія объемовъ той и другой жидкости подъ влияніемъ температуры тоже отражаются на точности показаній тахометра. Впрочемъ, это имѣетъ мѣсто и для всѣхъ вообще центробѣжныхъ тахометровъ. Чувствительности этого прибора мѣшаетъ развѣ только инерція жидкости (и то при измѣреніи переменныхъ чиселъ оборотовъ), такъ какъ треніе жидкости о стѣнки прибора вообще мало и, конечно, гораздо меньше тренія въ органахъ центробѣжнаго тахометра. Въ смыслѣ удобства отсчетовъ эта конструкція не оставляетъ желать ничего лучшаго.

б) Ось вращенія горизонтальна. Эта задача впервые рѣшена Кошетъ въ 1832 г. Положивъ въ уравненіи (10)  $\alpha = 0$ , получимъ:

$$\left(x + \frac{g}{\omega^2}\right)^2 + y^2 = const. \dots \dots \dots (16)$$

Это есть цилиндрическая поверхность съ осью  $O'x'$ , параллельной оси  $Oz$  т.е. оси вращенія сосуда (фиг. 14). Чтобы получить положеніе оси  $O'x'$  цилиндра, надо, по предыдущему, поднять по вертикали на величину  $\frac{g}{\omega^2}$  самую ось вращенія сосуда. Переходимъ къ новой системѣ координатъ  $(x_1, y_1, z_1)$ , полагая

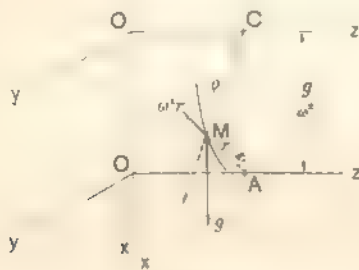
$$x = x_1 - \frac{g}{\omega^2},$$

$$y = y_1$$

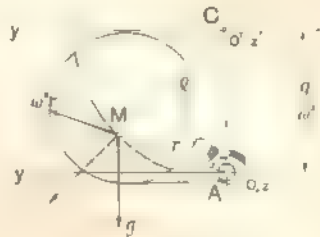
Въ новыхъ координатахъ ур-е (16) напишется такъ:

$$x_1^2 - y_1^2 = const. \dots \dots \dots (16')$$

Это есть круглый цилиндръ съ осью  $O'z'$ , которая отстоитъ отъ оси вращения сосуда по вертикали на высоту  $\frac{g}{\omega^2}$  и лежитъ съ ней въ одной вертикальной плоскости. Такой случай имѣемъ, напр., въ водяномъ наливномъ колесѣ, гдѣ порція воды, попавъ въ ковшъ, вмѣстѣ съ нимъ вращается около горизонтальной оси колеса.



Фиг. 14.



Фиг. 15.

Слѣдуетъ отмѣтить существенное различіе между этими двумя случаями вращения. Въ первомъ геометрическая ось свободной поверхности и ось вращения сосуда совпадаютъ. Поэтому форма поверхности за одинъ оборотъ не измѣняется; на ея измѣненіе оказываетъ влияние только  $\omega$ ; но пока  $\omega = const$ , форма поверхности неизмѣнна.

Не то имѣеть мѣсто во второмъ случаѣ: здѣсь ось свободной поверхности и ось вращения не совпадаютъ. Слѣдовательно, радиусъ цилиндрической свободной поверхности все время измѣняется, что видно изъ той же фиг. 15; по мѣрѣ того, какъ точка  $M$ , лежащая на свободной поверхности, поднимается вмѣстѣ съ сосудомъ, радиусъ  $\rho$  поверхности уменьшается; его величина при углѣ поворота  $\varphi$  выражается формулой:

$$\rho^2 = r^2 + \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 - \frac{2rg}{\omega^2} \cos \varphi.$$

Слѣдовательно, если  $\rho$  измѣняется одновременно съ  $\varphi$ , то измѣняется за одинъ оборотъ и видъ свободной поверхности, а потому жидкость въ ковшѣ не остается въ покоѣ относительно него даже при  $\omega = const$ . Изъ этого нужно заключить, что, въ сущности, наше уравненіе (9) несправедливо, такъ какъ при его выводѣ мы считали  $w = 0$  (относительный покой). Однако, для цѣлей практики можно довольствоваться и этимъ выводомъ, такъ какъ, вообще, скорость  $w$  не велика и во время полного оборота, если ковшъ выполненъ въ видѣ закрытаго со всѣхъ сторонъ сосуда, мѣняется и знакъ и величину, потому что относительное движеніе въ этомъ случаѣ есть движеніе колебательное.

Замѣтимъ еще, что въ числахъ этотъ случай рѣшается очень сложно: все сводится къ опредѣленію числовой величины постояннаго въ уравненіяхъ (16) и (16'). Приемъ остается тотъ же самый, который примѣненъ выше, — нужно сравнить объемъ жидкости въ сосудѣ при отсутствіи вращенія и при вращеніи. Здѣсь то и лежитъ вся трудность: форма ковша вообще сложна, и развѣ только графически можно болѣе или менѣе просто найти его вмѣстимость при разныхъ расположеніяхъ свободной поверхности.

### § 5. Полное давленіе жидкости на стѣнку.

Когда мы рассматривали равновѣсіе тяжелой несжимаемой жидкости, то пришли къ заключенію, что давленіе  $p$  въ какой-нибудь ея точкѣ выражается формулой (8):

$$p = \gamma z - p_0,$$

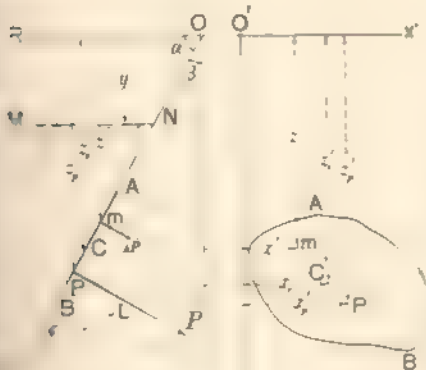
гдѣ  $p_0$  есть давленіе въ горизонтальной плоскости сравненія, а  $z$  — вертикальное разстояніе рассматриваемой точки до той же плоскости. Изъ этого выраженія видно, что давленіе  $p$  возрастаетъ пропорціонально глубинѣ и равно суммѣ 1) вѣса столба жидкости съ площадью поперечнаго сѣченія, равной единицѣ, и высотой, равной глубинѣ, считая отъ плоскости сравненія, и 2) давленія въ плоскости сравненія.

Удобно принимать плоскость сравненія на свободной поверхности. — тогда  $p_0$  представитъ собою давленіе на свободную поверхность; въ открытомъ сосудѣ  $p_0$  равно давленію атмосферы.

Очевидно, что законъ измѣненія давленія сохраняетъ свою силу и тамъ, гдѣ жидкость соприкасается со стѣнками сосуда. Тутъ надо помнить, что во всякомъ элементѣ ограничивающей поверхности перпендикулярно къ нему.

Опредѣлимъ прежде всего величину полного нормального давленія на плоскую стѣнку.

Пусть  $BAO$  есть стѣнка, омываемая водою, нефтью или иною жидкостью, стоящей на горизонтѣ  $MN$  (фиг. 16). Стѣнка эта плоска, перпендикулярна къ плоскости чертежа и образуетъ съ горизонтомъ уголъ  $\alpha$ . Пусть въ ней выдѣленъ нѣкоторый контуръ  $AB$ . Отложимъ по вертикали высоту  $y = \frac{p_0}{\gamma}$ , гдѣ  $\gamma$  есть вѣсъ единицы объема жидкости. Проводимъ на этой высотѣ параллельно  $MN$  плоскость  $RO$ ,



z z'  
Фиг. 16.

плоскость напора. Принявъ ее за плоскость сравненія, получимъ, что  $p = \gamma z$ . Въ плоскости стѣнки возьмемъ систему осей такую:

одна из осей,  $Ox$ , пусть идет въ пересѣченіи плоскости стѣнки съ плоскостью напора, другая пусть будетъ къ ней перпендикулярна и лежитъ въ плоскости  $BAO$ .

Повернемъ стѣнку  $BAO$  около оси  $Ox$  на уголъ  $\beta = 90^\circ - \alpha$  и затѣмъ совмѣстимъ ее съ плоскостью чертежа. Контуръ  $AB$  представится тогда въ натуральную величину въ видѣ нѣкоторой плоской фигуры  $A'B'$ . Пусть ея площадь будетъ равна  $F$ . Система нашихъ осей расположится въ  $O'x'$  и  $O'z'$ . На какой-нибудь элементъ  $m'$  стѣнки, съ площадью  $dF$  и съ координатами  $x'$  и  $z'$ , дѣйствуетъ сила  $dP$ , связанная съ давлениемъ  $p$  и площадью  $dF$  уравненіемъ:

$$dP = p dF = \gamma z dF.$$

Изъ построенія совмѣщенія видно, что

$$z = z' \sin \alpha,$$

такъ что можемъ еще написать, что

$$dP = \gamma z' \sin \alpha dF.$$

Суммируя такія выраженія элементарныхъ силъ для всей площади  $AB = F$ , получимъ полное нормальное усиленіе:

$$P = \int_0^F \gamma z dF = \int_0^F \gamma z' \sin \alpha dF = \gamma \sin \alpha \int_0^F z' dF = \gamma \sin \alpha z'_c F = \gamma z_c F \dots (17)$$

гдѣ  $z'_c$  есть координата центра тяжести  $C'$  въ плоскости стѣнки, а  $z_c$  — его вертикальное разстояніе до плоскости напора. Отсюда видно, что

*полное давленіе на плоскую стѣнку равно вѣсу столба жидкости съ основаніемъ, равнымъ площади стѣнки, и высотой, равной глубинѣ ея центра тяжести.*

Спрашивается теперь, гдѣ же находится точка приложенія равнодѣйствующей всѣхъ давленій, — такъ называемый центръ давленій? Положеніе его можно найти изъ уравненія моментовъ, выражающаго, что моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ. Напишемъ его для оси  $O'x'$ , называя черезъ  $z'_p$  координату центра давленія  $P'$  въ плоскости стѣнки. Имѣемъ:

$$P z'_p = \int_0^F \gamma z dF \cdot z' = \gamma \sin \alpha \int_0^F z'^2 dF,$$

такъ что

$$z'_p = \frac{\int_0^F z'^2 dF}{\int_0^F z' dF} = \frac{J_z}{F z'_c} = \frac{\text{моментъ инерціи площади стѣнки относ. оси } Ox'}{\text{статич. моментъ площади стѣнки относ. оси } O'x'}$$

Но

$$J_x = J_o + Fz'_c{}^2,$$

гдѣ  $J_o$  есть моментъ инерціи площади стѣнки относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести стѣнки. Слѣдовательно:

$$z'_p = z'_c + \frac{J_o}{Fz'_c} \dots \dots \dots (18)$$

Такъ какъ второй членъ имѣеть одинъ знакъ съ  $z'_c$ , то заключаемъ, что центръ давленій всегда ниже центра тяжести стѣнки.

Напишемъ уравненіе моментовъ относительно оси  $Oz'$ . Имѣемъ:

$$Pr'_p = \int_c^P \gamma z' \sin \alpha dF \quad r',$$

откуда затѣмъ

$$r'_p = \frac{\int_c^P z' x' dF}{\int_c^P x' dF}.$$

Когда стѣнка имѣеть ось симметріи въ вертикальной плоскости, то, такъ это легко видѣть, центръ давленія лежитъ на ней. Беря ее за ось  $Oz'$ , увидимъ, что каждому данному значенію  $z'$  будутъ отвѣчать два значенія — одно съ плюсомъ, другое съ минусомъ; въ суммѣ, очевидно, получимъ:

$$\int_c^P z' x' dF = 0.$$

Слѣдъ что

$$r'_p = 0.$$

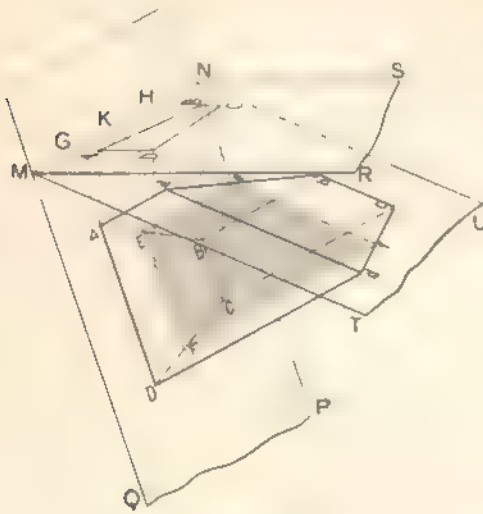
Если бы рѣчь шла не о нормальномъ давленіи на стѣнку, а о давленіи по какому-нибудь опредѣленному направленію, напр., по направленію  $KL$ , образуемому угломъ  $\varphi$  со стѣнкой, то мы нашли бы, что

$$P_n = P \sin \varphi = \gamma F z_c \sin \varphi = \gamma z_c \cdot F \sin \varphi,$$

т. е. давленіе на плоскую стѣнку по какому-нибудь направленію равно вѣсу столба жидкости, высота котораго равна  $a$  — высотѣ центра тяжести стѣнки до плоскости напора, а основаніе равно проекціи площади стѣнки на плоскость, перпендикулярную къ разсматриваемому направленію.

Примѣненіе ур-ій (17) и (18) затрудненій, вообще, не представляет. Однако часто графическая передача механическихъ положеній, лежащихъ въ основѣ ур-ій (17) и (18), быстрѣе приводитъ къ рѣшенію, нежели вычисления по этимъ ур-ямъ. Поэтому остановимся нѣсколько на этомъ.

Пусть  $MNPQ$  (фиг. 17) есть стѣнка, въ которой выдѣленъ нѣкоторый контуръ, напр., трапеція  $ABCD$ ; пусть  $AMNS$  есть свободная поверхность жидкости, омывающей эту стѣнку, при чемъ контуръ  $A_1B_1C_1D_1$  представляетъ проекцію нашего контура  $ABCD$  на эту плоскость. Изъ всѣхъ точекъ контура  $ABCD$  возставимъ перпендикуляры  $Aa, Bb, ..$  къ плоскости стѣнки  $PN$ , и на какомъ-нибудь изъ нихъ отложимъ длину  $Cc = CC_1$ , т.-е. равную соответственному вертикальному разстоянію точки  $C$  до свободной поверхности. Черезъ эту точку  $c$  и линию  $MN$  проведемъ плоскость  $TMMU$ , на которой выдѣлится такимъ образомъ контуръ  $abcd$ ; очевидно, что  $Aa = AA_1, Bb = BB_1$ , и т. д. Непараллельно усѣченная призма  $ABCDdabc$  представляетъ по величинѣ и по положенію полное давленіе на стѣнку  $ABCD$ , если вообразить эту призму наполненной жидкостью; это ясно изъ того, что на каждомъ элементѣ



Фиг. 17.

$dF$  площади, взятой внутри нашего контура, тяготѣетъ вѣсь элементарнаго столба жидкости съ высотой  $z$ , равной вертикальному разстоянію этого элемента до свободной поверхности. Поэтому подсчетъ вѣса жидкости въ объемѣ такой призмы равноцѣненъ подсчету ур-ія (17), а находя центръ тяжести такой призмы и проектируя его на плоскость стѣнки, мы, очевидно, продѣлаемъ операцию, равноцѣвную подсчету ур-ія (18).

Эти двѣ послѣднія операциі удобно произвести такимъ образомъ. Вообразимъ бесконечно тонкій вертикальный слой  $FEef$ , выдѣленный внутри этой призмы вертикальной плоскостью  $FKf$ . Ясно, что заштрихованная площадь пред-

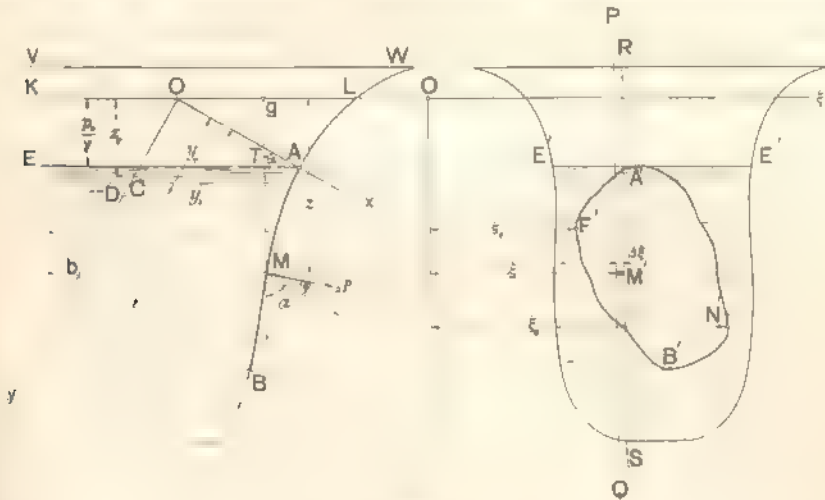
ставляетъ истинное положеніе нагрузки на линию  $EF$ . Поэтому, проектируя центръ тяжести трапеціи  $FEef$  на ея высоту  $EF$ , найдемъ центръ давленія на этотъ элементъ площади  $EF$ . Дальнѣйшее нахожденіе центра давленія на всю площадь  $ABCD$  можетъ быть сдѣлано по правиламъ графостатики.— нахожденіемъ величины и положенія равнодѣйствующей ряда параллельныхъ силъ, имѣющихъ данныя точки приложенія. Все дѣло значительно упрощается, когда выдѣленный контуръ имѣетъ сторону, совпадающую со свободной поверхностью, т.-е. съ линіей  $MN$ . Если, напр., мы имѣемъ контуръ въ видѣ прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ , при чемъ сторона  $a$  совпадаетъ съ линіей  $MN$ , то это графическое построеніе позволяетъ сразу заключить,

что центр давления на такую стѣнку отстоитъ отъ  $MN$  въ разстояніи, равномъ  $\frac{2}{3}b$ , ибо таково расположеніе центра тяжести любого тр-ка  $FKI$ . Само собою разумѣется, что ур-іе (18) дастъ тотъ же результатъ, а именно.

$$\bar{x}_p = \frac{b}{2} + \frac{ab^3 \cdot 2}{12 \cdot ab \cdot b} = \frac{2}{3} b.$$

Если стѣнка кривая, то вопросъ объ опредѣленіи давления на нее по данному направленію рѣшается такъ (фиг. 18):

Пусть данъ какой нибудь сосудъ  $VWAB$ ; на стѣнкѣ его вообразимъ произвольный контуръ  $A'F'B'N'$ ; требуется опредѣлить давление по данному направленію жидкости, налитой въ этомъ сосудѣ до уровня  $AE - A'E'$ , на часть поверхности стѣнки, заключающуюся внутри этого контура. Давление на свободную поверхность есть  $p_0$ , такъ что плоскость  $KL$ , параллельная  $AE$  и отстоящая отъ нея на высоту  $\frac{p_0}{\gamma}$ , представить собою плоскость напора.



Фиг. 18.

Черезъ данное направленіе вообразимъ вертикальную плоскость  $Oxy$ . Левая половина фиг. 18 представлена въ плоскости, параллельной этой вертикальной плоскости, такъ что  $Ox$  есть заданное направленіе; сама эта фигура представляетъ сѣченіе сосуда плоскостью  $PQ$   $Oxy$ . Правая половина фиг. 18 есть проекція сосуда на вертикальную плоскость, перпендикулярную къ плоскости  $Oxy$ . Примемъ слѣдующую систему осей координатъ: ось  $x$  проведемъ черезъ точку  $A$  параллельно данному направленію, до пересѣченія въ  $O$  съ плоскостью напора; ось  $y$  овъ беремъ въ одной вертикальной плоскости съ  $Ox$ ; понятно, что третья ось,  $Oz$ , будетъ горизонтальна и лежать въ плоскости напора  $KL$ . Пусть, наконецъ, заданное направленіе тяжести съ направленіемъ тяжести  $gM$  уголъ  $\alpha$ .

Возьмемъ элементъ  $M$ , занимающій по контуру  $AB$  длину  $ds$  и проецирующійся отъ плоскости  $PQ$  до смежной плоскости  $RS$  на длину  $ds'$ . На элементъ  $M$  стѣнкѣ, приходится нормальное давленіе  $dP$ , образующее



сть разсматриваемымъ направлениемъ уголъ  $\varphi$ ; понятно, что его проекцію на направление  $Ox$  можно выразить такъ:

$$dP_x = dP \cos\varphi = \gamma z ds ds' \cos\varphi,$$

гдѣ  $z$  есть вертикальное разстояніе элемента  $M$  до плоскости напора. Понятно, что  $ds ds' \cos\varphi$  есть проекція этого кривого элемента поверхности на плоскость  $\xi Oy$ , такъ какъ  $\varphi$  есть уголъ между нормалью къ элементу и нормалью къ этой плоскости; поэтому можемъ написать, что

$$dP_x = \gamma z dy d\xi.$$

Суммируя эти элементарныя давленія для всей площади  $A'F'B'N$ , получимъ полное давленіе по оси  $x$ -овъ:

$$P_x = \int_{\xi = \xi_1}^{\xi = \xi_2} d\xi \int_y^y \gamma z dy \dots \dots \dots (19)$$

Изъ разсмотрѣнія контура  $gODM$ , въ которомъ уголъ  $MTx = \alpha$ , можемъ написать:

$$z = x \cos\alpha + y \sin\alpha.$$

Поэтому выраженіе (19) можно переписать такъ:

$$P_x = \gamma \cos\alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_0^{y_2} x dy + \gamma \sin\alpha \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_0^{y_2} y dy.$$

Первый двойной интегралъ представляетъ объемъ  $V$  призмы, образуемой стѣнкой  $A'F'B'N$ , плоскостью проекціи  $\xi Oy$  и проектирующими поверхностями; второй двойной интегралъ представляетъ собою статическій моментъ проекціи всей стѣнки относительно оси  $O\xi$ ; а эта величина равна площади  $F$  этой проекціи, умноженной на координату  $y_c$  ея центра тяжести  $C$ . Такимъ образомъ послѣднее уравненіе переписется такъ:

$$P_x = \gamma V \cos\alpha + \gamma F y_c \sin\alpha.$$

Замѣчая, наконецъ, что  $y_c \sin\alpha$  можно замѣнить черезъ  $z_c$ , т.-е. напоромъ въ центрѣ тяжести проекціи стѣнки, получимъ окончательно:

$$P_x = \gamma z_c F + \gamma V \cos\alpha, \dots \dots \dots (20)$$

т.-е.

давленіе на кривую стѣнку по заданному направленію равно давленію на проекцію этой стѣнки на плоскость, перпендикулярную къ этому на-



гдѣ  $n$  есть направлѣніе нормали къ каждому элементу стѣнки, а  $h$  есть перемѣнное для каждаго элемента вертикальное разстояніе его до плоскости напора;

б) суммируемъ затѣмъ выраженія моментовъ элементарныхъ силъ относительно каждой оси. Называя моментъ равнодѣйствующей пары черезъ  $L$ , а его проекціи на оси координатъ соответственно черезъ  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ , можемъ написать:

$$dL_x = \gamma h \cdot dF \cdot \cos(n, z) \cdot y - \gamma h \cdot dF \cdot \cos(n, y) \cdot z,$$

$$dL_y = \gamma h \cdot dF \cdot \cos(n, x) \cdot z - \gamma h \cdot dF \cdot \cos(n, z) \cdot x,$$

$$dL_z = \gamma h \cdot dF \cdot \cos(n, y) \cdot x - \gamma h \cdot dF \cdot \cos(n, x) \cdot y.$$

Суммируя эти 6 выраженій по всей площади стѣнки, получимъ какъ величину равнодѣйствующей  $P$ , такъ и моментъ пары  $L$ , если, конечно, поверхность стѣнки задава уравненіемъ, т.-е. если существуетъ аналитическое выраженіе зависимости между координатами точекъ поверхности и углами, которые образуетъ нормаль въ каждой точкѣ этой поверхности съ осями координатъ.

Замѣтимъ, что во всѣхъ случаяхъ мы вводили плоскость напора. Если на свободной поверхности и внѣ стѣнки давленіе одно и то же, напр.,  $p_0$ , то этого дѣлать не слѣдуетъ, такъ какъ стѣнка въ этомъ случаѣ будетъ испытывать давленіе, соответствующее высотѣ  $\frac{p_0}{\gamma}$ , съ обѣихъ сторонъ. вмѣсто плоскости напора нужно вводить тогда свободную поверхность жидкости.

Съ вопросомъ объ опредѣленіи давленія на стѣнку приходится часто сталкиваться, напр., при расчетѣ гидравлическихъ затворовъ, плотинъ, дамбъ, при опредѣленіи усилій и расчетѣ передачъ въ воротахъ и другихъ механизмахъ, служащихъ для подъема щитовъ, для открыванія шиловыхъ воротъ и т. п.

Само собою разумѣется, что если стѣнка не можетъ оказать такого же сопротивленія, каково на нее давленіе, то она сдвинется. Другое дѣло, если стѣнка замкнутая, т.-е. когда имѣемъ дѣло съ сосудомъ. Тогда стѣнка должна быть только прочна, чтобы не разрушиться, о движеніи же ея въ горизонтальномъ направленіи не можетъ быть рѣчи. Въ самомъ дѣлѣ, для опредѣленія давленія въ горизонтальномъ направленіи на сосудъ, наполненный жидкостью, разсѣжемъ его мысленно вертикальною плоскостью на двѣ половины; эту плоскость примемъ за плоскость проекцій и примѣнимъ уравненіе (20) этого параграфа. Понятно, что въ этомъ случаѣ нужно положить  $\alpha = 90^\circ$ . Далѣе, и та, и другая половина дадутъ во всякомъ случаѣ одну и ту же величину проекціи площади  $F$  при одной и той же координатѣ  $z_0$ . Такимъ образомъ давленія на обѣ половины будутъ между собою равны, но, очевидно, прямо противоположны по знаку; слѣдовательно, они взаимно уравновѣсятся.

Если ищется вертикальное давленіе на сосудъ, то, разсѣвая по-прежнему сосудъ на двѣ части какой нибудь горизонтальной плоскостью,

составимъ отдѣльно выражения давленій на нижнюю часть внизъ и на верхнюю вверхъ; при этомъ свободную поверхность слѣдуетъ разсматривать какъ стѣнку, ибо если на ней атмосфера давить на воду, то и обратно, вода давить на атмосферу, какъ на всякую другую стѣнку. Кроме того, при составленіи давленія на нижнюю часть нужно положить  $\alpha = 0$ , при разсмотрѣннн верхней нужно считать  $\alpha = 180^\circ$ . Вычитая вторую величину изъ первой, найдемъ, что первые члены уравненія (20) дадутъ двѣ равныя и противоположныя по знаку величины; вторые же члены дадутъ просто  $\gamma V$ , т.-е. вѣсъ жидкости въ сосудѣ.

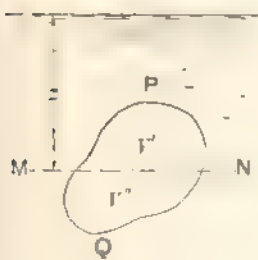
Если рѣчь идетъ о давленіи на плоское горизонтальное дно, то, принимая его за плоскость проекцій, найдемъ, что объемъ  $V$  призмы между дномъ и этой плоскостью равенъ нулю, и давленіе на него есть  $\gamma F z_c$ , гдѣ  $F$  есть площадь дна, а  $z_c$  — глубина жидкости въ сосудѣ, т.-е. получимъ положеніе, которое носитъ названіе гидростатическаго парадокса:

*давленіе на дно сосуда не зависитъ отъ формы сосуда.*

Примѣнимъ еще уравненіе (20) этого параграфа къ опредѣленію давленія жидкости на погруженное въ нее тѣло.

Понятно, что давленіе по горизонтали равно нулю, совершенно такъ же, какъ и для сосуда, наполненнаго жидкостью.

Для опредѣленія давленія по вертикали употребимъ тотъ же приемъ (фиг. 20): разсѣжемъ погруженное въ жидкость тѣло горизонтальной плоскостью  $MM$  на двѣ части и назовемъ объемъ верхней части черезъ  $V'$ , а нижней — черезъ  $V''$ . Выразимъ давленіе на верхнюю часть сверху внизъ по ур-ию (20), принимая плоскость  $MM$  за плоскость проекцій и замѣчая, что она лежитъ внѣ стѣнки  $MPN$ . Получаемъ для него выраженіе:



Фиг. 20.

$$F\gamma z - \gamma V',$$

причемъ уголъ  $\alpha = 0$ , а буквой  $F$  обозначена площадь проекцій стѣнки  $MPN$ .

Далѣе, давленіе на стѣнку  $MQN$  снизу вверхъ получимъ, подобно предыдущему; оно равно

$$F\gamma z + \gamma V''.$$

Здѣсь, въ силу разсматриваемаго направленія, въ ур-ии (20) нужно положить  $\alpha = 180^\circ$  и, кроме того, поставить передъ послѣднимъ членомъ минусъ, такъ какъ плоскость проекцій лежитъ внѣ стѣнки; въ итогъ передъ послѣднимъ членомъ станетъ  $+$ . Вычитая второе выраженіе изъ перваго, такъ какъ они даютъ силы, разно направленныя, — получимъ полное воздѣйствіе жидкости на погруженное въ нее тѣло, оцѣниваемое выраженіемъ

$$-\gamma(V' + V'').$$

Знакъ минусъ показывается, что это давление противоположно направлению силы тяжести.

Подобное же рассужденіе можетъ быть примѣнено, если плоскость проекцій принять на свободной поверхности и спроектировать на нее поверхность тѣла; придется выразить отдѣльно давленія на тѣ части поверхности тѣла, которыя лежатъ выше и ниже линіи соприкосновенія проектирующаго цилиндра съ поверхностью тѣла. Результатъ получится тотъ же.

Такъ получается извѣстный принципъ Архимеда:

*давление жидкости на вогнутую погруженное въ нее тѣло равно вѣсу жидкости въ объемъ тѣла и направлено снизу вверхъ.*

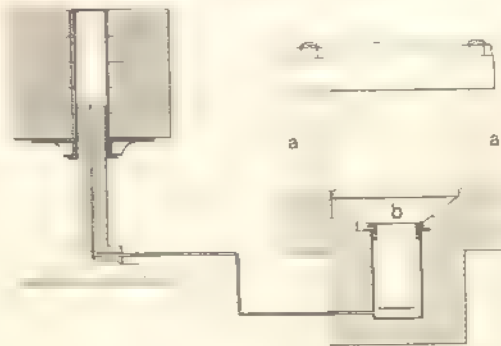
Путемъ подобныхъ же рассужденій легко распространить этотъ принципъ и на плавающія тѣла.

Заканчивая этимъ отдѣлъ гидростатики, отмѣтимъ, что, во избѣжаніе увеличенія размѣровъ курса, мы не касаемся нѣкоторыхъ важныхъ вопросовъ, имѣющихъ преимущественно специальный интересъ. Сюда относятся вопросы о барометрическомъ нивелированіи и объ устойчивости равновѣсія плавающихъ тѣлъ. Отсылаемъ интересующихся къ названнымъ выше курсамъ, особенно Евневича и Grashofa.

Последній вопросъ, въ примѣненіи къ судостроенію, подробно трактуется въ соответствующихъ курсахъ, напр., въ сочиненіи Pollard et Dubeout, Théorie du navire и др.

### З а д а ч и.

1. Имѣется аккумуляторъ (фиг. 21), скалка котораго имѣетъ диаметръ 200 *mm* и нагружена грузомъ въ 15000 *kgv*. Подъ какимъ давлениемъ находится вода въ аккумуляторѣ при его равномерномъ спускѣ и при равномерномъ подъемѣ, если треніе въ на-

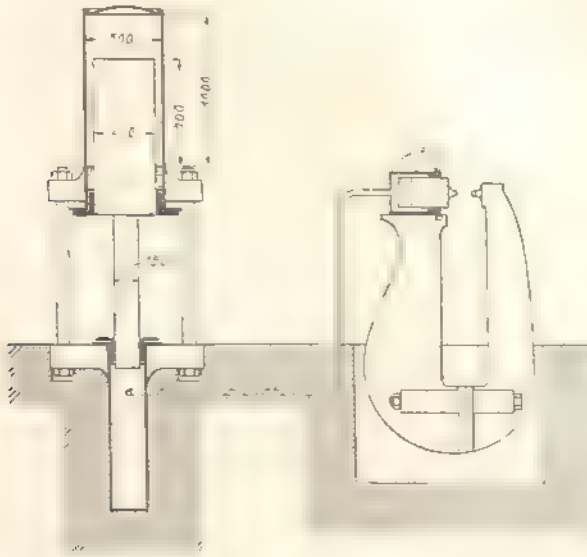


Фиг. 21.

бивкѣ сальника въ обоихъ случаяхъ имѣетъ одну и ту же величину и равно  $F$  *kgv*? Какое усиліе воспринимается болтами *a* гидравлическаго пресса, если его скалка имѣетъ диаметръ 800 *mm*? Вѣсъ стола *b* равенъ  $G$  *kgv*.

2. Въ дифференціальномъ аккумуляторѣ диаметръ верхней части скалки равенъ 400 *mm*, диаметръ нижней части — 150 *mm*. Скалка стоитъ въ положеніи, указанномъ на

фиг. 22. Въ верхней части воздушнымъ насосомъ нагнетенъ воздухъ до давления 30 ат. Нижний цилиндръ соединенъ трубою съ цилиндромъ гидравлической клепальной машины, скатка котораго имѣетъ 200 мм въ диаметръ. Определить, какое усиліе можетъ



Фиг. 22.

развить клепальная машина сейчасъ и каково оно будетъ, если, послѣ нѣсколькихъ часовъ, безъ подкачивания воды и воздуха, скатка аккумулятора опустится на 500 мм.— Верхнюю крышку аккумулятора считать плоской; треніемъ въ сальникахъ пренебрегать.

Отв. Во второмъ случаѣ 42300 kgr.



3. Въ шаровой камерѣ, запертой воротами (фиг. 23), горизонты воды располагаются, какъ указано на чертежѣ. Определить по величинѣ и направлению полное давление на оси *B* и *C* вращения воротъ, считая, что ворота соприкасаются между собою по вертикальной прямой *A*. Найти, съ какою силою одно позолтище прижато къ другому по этому ребру *A*.

Отв. Давленіе въ осяхъ вращения  $\infty 9200$  kgr; оно

образуетъ съ направлениемъ *BC* уголъ, равный  $\arccos \frac{1,5}{1,6}$

Давленіе по ребру *A*  $\infty 9200$  kgr.

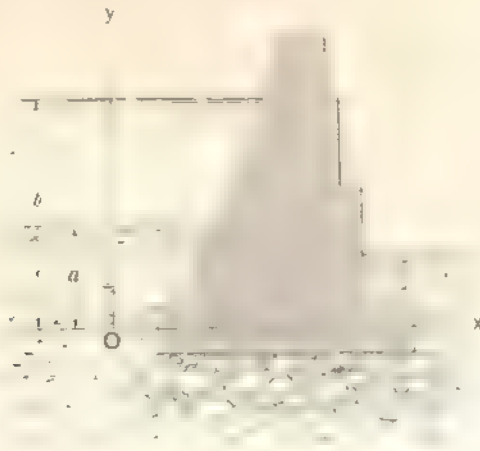


Фиг. 23.

4. На вертикальной плоской стѣнкѣ выдѣлена часть въ видѣ круга діаметромъ *d*; центръ круга лежитъ на глубинѣ  $\frac{d}{2}$  отъ свободной поверхности. Показать, что центръ давления на эту круглую часть стѣнки лежитъ на глубинѣ  $\frac{7}{16}$  діаметра круга и что давленіе на этотъ кругъ въ 1,5 раза больше вѣса воды въ объемѣ шара, діаметръ котораго равенъ діаметру круга.

5. Определить величину и направление полного давления на пластину (фиг. 24), которая ограничена параболомъ, уравненіе ея относительно осей *xOy* есть:  $x^2 = 4y$ . Плоскость *O* параболы лежитъ на 4 м (*h*) ниже горизонта воды въ прудѣ; дно пруда

(горизонтальное) лежит на  $4 \text{ mtr}$  ( $a$ ) над вершиною параболы; ось параболы вертикальна. Рассмотреть плотину длиной в  $1 \text{ mtr}$ .



Фиг. 24.

Она. Проекция полного давления равна для длины  $L$  плотины:

$$X = L \cdot \frac{(b-a)^2}{2} = 12500 L \text{ km}; \quad Y = L \cdot \frac{\sqrt{2}b}{3} - \frac{\sqrt{2}a}{3} (2b - \sqrt{2}a - a) = 5333 L \text{ km}.$$

где  $p$  есть параметр параболы. Координаты  $x_0$  и  $y_0$  точки пересечения равнодействующей с параболой определяются из ур-ий:

$$y_0 L - x_0 \cdot L = L \cdot \frac{(b-a)^2}{6} (b - 2a - 3p)$$

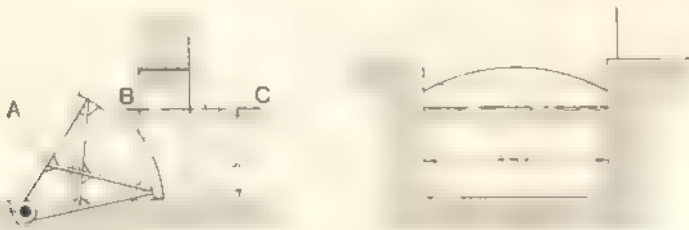
и

$$4y_0 = x_0^2,$$

откуда

$$x_0 = 4,78 \text{ mtr}, \quad y_0 = 5,71 \text{ mtr}.$$

6. Вход в турбинную камеру  $A$  (фиг. 25) загражден щитом, вращающимся около горизонтальной оси. Радиус щита —  $3 \text{ mtr}$ . Найти положение оси щита, при



Фиг. 25.

котором давление воды не открывает щита, но и не прижимает его ко дну канала. Весом щита пренебречь. Найти полное давление на ось щита, если она погружена под горизонтом  $BC$  на  $2,25 \text{ mtr}$ .

Отв. Принимая во внимание, что

$$\int \frac{y \, dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = -\sqrt{r^2 - y^2} - C,$$

$$\int \frac{y^2 \, dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \int r^2 \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} - \int \frac{(r^2 - y^2) \, dy}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \arcsin \frac{y}{r} - C,$$

$$\int \sqrt{r^2 - y^2} \, dy = \frac{y}{2} \sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{y}{r} - C.$$

находим, что горизонтальная проекция полного давления равна 8000 *kg*, а вертикальная 2650 *kg*.

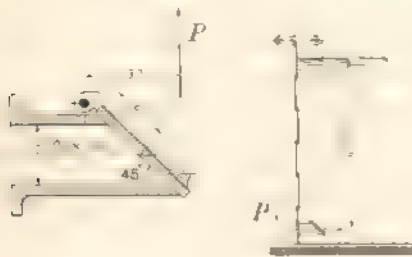
7. Плоский прямоугольный щит плотины Шанюна (фиг. 26) может вращаться около горизонтальной оси *A*, положенной на неподвижных козлах. Закрытый щит образует с горизонтом угол в 60°: длина щита равна 5 *mtr*; ось вращения от щита отстоит на 1,5 *mtr*, считая по щиту. В отводящем канале вода стоит на глубине 0,8 *mtr* над горизонтальным нижним ребром щита. Найти ту глубину *l* пруда, начиная с которой, в случае повышения уровня в пруду щит должен опрокинуться давлением воды?



Фиг. 26

Отв. Задача приводит к решению кубического уравнения  $h^3 - 3.9 h^2 - 1.984 = 0$  Решая его по формулам Кардана, находим единь положительный корень  $h_1 = 3.756$  *mtr*. Два другие корня, как отрицательные, не соответствуют вопросу.

8. В нефтяном резервуаре, на глубине 6 *mtr* от поверхности, поставлен клапан (фиг. 27). Найти усилие *P*, необходимое для подъема клапана. Удельный вес нефтяных остатков = 0,93.

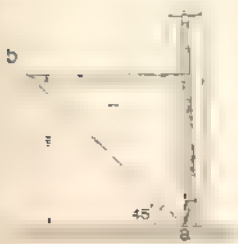


Фиг. 27.

9. В условиях предыдущего случая определять толщину железных листов, из которых должен быть склепан резервуар, если вся его высота = 6,4 *mtr*, ширина листов (между центрами швов) = 0,8 *mtr* и диаметр резервуара = 10 *mtr*. Считать резервуар наполненным до верхнего края.

Имеются листы, толщины которых изменяются через каждые 1/16 дюйма. Допускаемое напряжение разрыва в швах листов = 5 *kg* *mm*<sup>2</sup>.

10. Определить усилие, необходимое для подъема шлюзового щита (фиг. 28), претв кол рамы вода стоит на высоте = 1,5 *mtr*. Расстояние между сваями, направляющими щит, равно 2,5 *mtr*. Концы досок окопаны железью; на сваи положена железная планка. Все щит пренебречь. Иная, что щит составлен из горизонтальных досок шириной в 250 *mm*, найти их необходимую толщину внизу и сверху щита.



Фиг. 28.

11. В условиях предыдущей задачи изменить положение щита, предполагая, что он наклонен по линии *ab* (фиг. 28), образуя с горизонтом угол 45°. Все щит пренебречь. Найти усилие, необходимое для открывания щита.



12. Металлический плюсовой щит должен иметь размеры 10 *mt* ширины и 8 *mt* высоты. С одной его стороны вода стоит в уровень с верхней кромкой, с другой — воды совсем нет. Предполагается составить остов щита из 10 одинаковых ферм. Найти их расположение из того условия, чтобы все фермы были одинаково нагружены, — для чего нужно разбить весь щит на части равного давления и поместить фермы в центрах давления каждой такой части.

*Отв.* Давление на каждую ферму = 32000 *kg*. Линии раздѣла частей равнаго сопротивления последовательно отстоятъ от верхней кромки щита на 2,530; 3,500; 4,380; 5,060; 5,650; 6,185; 6,690; 7,155 и 7,590 *mt*. Фермы должны последовательно находиться въ разстояннхъ от верхней кромки 1,69; 3,09; 4,00; 4,75; 5,38; 5,95; 6,46; 6,93; 7,39 и 7,81 *mt*.

13. Доказать, что если на омываемой водою части высоты щита описать, как на диаметръ, окружность, раздѣлить диаметр на *n* равныхъ частей, изъ точекъ дѣления возставить перпендикуляры до пересѣченнхъ съ окружностью и эти точки соединить съ концомъ диаметра, то полученные *n* хордъ дадутъ разстояннхъ от верхней кромки щита до линий, дѣлящихъ щитъ на части равнаго давления.

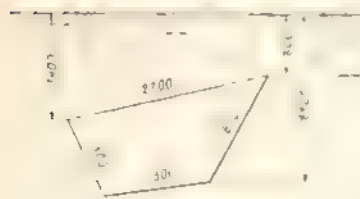


Фиг. 29.

14. Расплавленнымъ чугуномъ наливается опока (фиг. 29), въ которой заформованъ, напримъ, подшинникъ такъ, что плоскость раззема взята въ его нижней опорной плоскости, размеры которой суть 150 × 400 *mm*. Круглый литникъ ( $d = 40$  *mm*) наполневъ чугуномъ на высоту 250 *mm* и сверху расширенъ въ ямку, средняя площадь которой 50 *cm*<sup>2</sup> и средняя глубина 50 *mm*. Пренебрегая вѣсомъ опоки и земли въ ней, опредѣлить, какой грузъ нужно на нее [положить, чтобы ее не подняло. Внутренний стержень (глиняный) имѣть  $d = 50$  *mm*, а  $l = 150$  *mm*.

Найти напряженне изгиба въ немъ. Уд. вѣсъ расплавленнаго чугуна = 7; уд. вѣсъ глины = 2.

*Отв.* Около 123 *kg*; есди длина знаковъ 40 *mm*, то искомое напряженне — 69 *kg* *cm*<sup>2</sup>.



Фиг. 30.

15. Разыскать центръ давления на часть вертикальной стѣнки, ограниченной многоугольнымъ контуромъ (фиг. 30), пользуясь графическими методами. Числа, поставленныя на фигурѣ, даютъ длины сторонъ и глубины погруженнхъ вершинъ подъ уровнемъ воды въ *mt*.

16. Круглая горизонтальная труба, диаметромъ 1,5 *mt*, подающая воду въ турбинную камеру, закрывается щитомъ, вращающимся около горизонтальнаго диаметра трубы. Въ закрытомъ положеннхъ плоскость щита образуетъ съ горизонтомъ уголъ въ 75°. Ось

трубы лежитъ на 4 *mt* ниже горизонта въ позволяющемъ каналѣ. Опредѣлить, какой моментъ нужно приложить къ оси щита, чтобы его открыть, если за щитомъ давленне атмосферное?

*Отв.* Около 267 *kg*.*mt*.

17. Къ плоскому дну цилиндрическаго сосуда, диаметромъ  $d = 5$  *cm* и высотой 10 *cm*, прикрѣплена трубка, открытая на своемъ нижнемъ концѣ. Сосудъ опущенъ въ ртуть такъ, что его верхняя кромка выступаетъ надъ свободною поверхностью ея на 2 *cm*. Послеъ этого на сосудъ навертывается герметическая крышка и его поднимаютъ изъ ртути, оставляя трубку вертикальной и погруженной нижнимъ концомъ въ ртуть. Какое вертикальное перемѣщенне нужно дать сосуду, чтобы высота поднятой колонны была 30 *cm*? Высота барометрическаго давленнх во время опыта равна 76 *cm*.

*Отв.* 33,3 *cm*.

18. Въ условннхъ предыдущей задачи добавить, что подъемъ сосуда и трубки дѣлается помощью невѣсомой нити, перекинутой черезъ блокъ, и гири. Найти необходимый

вѣсь гири для удержанія въ равновѣсїи системы въ вышеуказанномъ положенїи, пренебрегая вѣсомъ сосуда и трубки и считая, что диаметръ трубки = 2 см.

*Отв.* 2,34 *kgf*.

19. Въ герметически замкнутомъ резервуарѣ, поставленномъ на опорахъ, сдѣлано въ днѣ круглое отверстіе, диаметръ 60 мм; къ этому отверстию примыкаетъ вертикальная труба того же диаметра, опущенная нижнимъ концомъ въ воду. Размѣры резервуара — площадь основанія 2 м<sup>2</sup>, высота 3 мтр. Нижнее дно резервуара стоитъ на высотѣ 5 мтр надъ уровнемъ воды, куда опущена труба. Весь резервуаръ сплошь залить водою. Определить давленіе на опоры и найти, какъ оно измѣнится, если отнять трубу и закрыть отверстіе крышкой, оставляя резервуаръ наполненнымъ водою сплошь. Вѣсомъ резервуара, крышки и трубы пренебречь.

*Отв.* Въ первомъ случаѣ давленіе на опоры равно 7414 *kgf*, во второмъ оно на 1414 *kgf* меньше.

20. Деревянная цилиндрическая бочка стянута двумя желѣзными обручами. Размѣры бочки, обручей и ихъ расположеніе указаны на чертежѣ (фиг. 31) Въ верхнее шло вставлена труба. До какой высоты въ трубѣ можно наполнить эту систему водою, чтобы напряженіе материала въ нижнемъ обручѣ не превосходило 6 *kgf/mm*<sup>2</sup>.

*Отв.* На 2,775 мтр надъ нижнимъ дномъ бочки.

21. Найти толщину деревянныхъ досокъ бочки предыдущей задачи изъ условия, чтобы въ опасномъ сѣченіи напряженіе не превосходило 0,8 *kgf/mm*<sup>2</sup> и чтобы наполненіе бочки соответствовало условиямъ предыдущей задачи.

*Отв.* 38 мм.

22. Опoка (фиг. 32), въ которой залить бандажъ, приводится во вращеніе со скоростью 250 оборотовъ въ 1 мин. Найти давленіе, подъ которымъ находится расплавленный чугунъ, уд. вѣса 7, въ точкахъ А и В. Литникъ — круглый цилиндръ на оси опоки.

*Отв.* Въ точкѣ А давленіе больше атмосфернаго на 5,09 ат; въ точкѣ — на 5,6 ат.

23. Цилиндрическій сосудъ, съ радиусомъ = 2 см и высотой = 10 см,

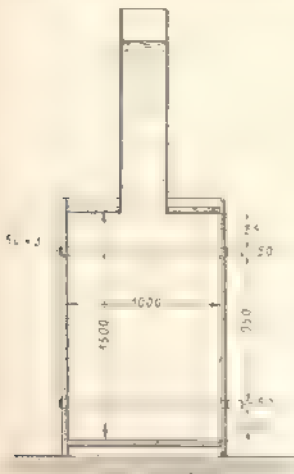
наполненъ до половины водою. Съ какою предѣльнымъ числомъ оборотовъ его можно вращать около его вертикальной геометрической оси, чтобы вода изъ него не выливалась?

*Отв.* Около 475 оборотовъ.

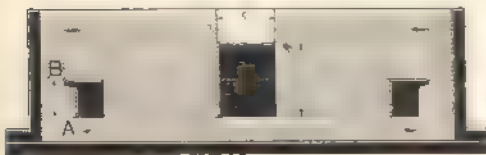
## § 6. Уравненія движенія совершенной жидкости.

Приступая къ постановкѣ задачи гидродинамики, замѣтимъ, что, по закону Д'Аламбера, всякое движеніе можно разсматривать какъ равновѣсіе. Если къ вѣшнымъ дѣйствующимъ силамъ прибавить всѣ силы инерціи.

Вообразивъ движущуюся жидкую массу остановленной въ какой-нибудь моментъ времени, мы, повторивъ все сказанное о гидростатическомъ давленіи, придемъ къ заключенію, что и въ движущейся совершенной жид-



Фиг. 31.



Фиг. 32.

кости во всякой точкѣ ся существуетъ давленіе, называемое гидродинамическимъ, которое для всякаго момента времени имѣетъ въ каждой точкѣ вполне опредѣленную величину, не зависящую отъ направленія, въ которомъ оно разсматривается. Проводя поверхность черезъ всѣ точки, подверженныя въ данный моментъ одному и тому же давленію, получимъ мгновенную поверхность постояннаго давленія, или, по аналогіи съ гидростатикой, — *мгновенную поверхность уровня*. Свойства этихъ поверхностей тѣ же, что и въ случаѣ покоя: ихъ уравненія получимъ, приравнивая потенциальныя функціи внѣшнихъ силъ (въ томъ числѣ и силъ инерціи) той или иной постоянной величинѣ; эти внѣшнія силы всегда нормальны къ мгновеннымъ поверхностямъ уровня и т. д.

Замѣтимъ, что это справедливо для жидкостей совершенныхъ, не способныхъ ни выдерживать, ни оказывать никакихъ тангенціальныхъ напряженій или разрывающихъ усилій. Между тѣмъ всѣ дѣйствительныя жидкости обладаютъ нѣкоторою вязкостью, которая уже обуславливаетъ возможность появления не только нормальныхъ давленій, но и какихъ-нибудь напряженій вообще. Такъ какъ сила, обусловленная вязкостью, вообще неизвѣстна ни по величинѣ, ни по направленію, то остается одинъ путь: разсмотрѣть движеніе совершенной жидкости и полученные результаты сравнить съ дѣйствительно наблюдаемымъ движеніемъ; всѣ различія должны быть отнесены за счетъ влияния вязкости, и такимъ путемъ можно будетъ составить себѣ представленіе о томъ, что это за сила.

Въ движущейся жидкости насъ могутъ, вообще, интересовать слѣдующія величины: скорость каждой точки жидкости во всякій данный моментъ времени, плотность ея и давленіе. Эти величины вообще измѣняются какъ въ пространствѣ, такъ и во времени, т.-е. представляютъ собою функціи четырехъ переменныхъ, — координатъ  $x, y, z$  и времени  $t$ . При этомъ, въ самомъ общемъ случаѣ, всѣ эти переменныя нельзя считать независимыми другъ отъ друга, — за независимое переменное можно принять, напр., время  $t$ , и тогда остальные переменныя представляются нѣкоторыми его функціями:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Это будутъ уравненія траекторій отдѣльныхъ жидкихъ точекъ, если положить, что первыя производныя по времени отъ функцій  $f$  представляютъ собою компоненты  $u, v$  и  $w$  отъ скорости  $V$  по осямъ координатъ, т.-е., если положить, что существуютъ соотношенія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(f_1)}{dt} &= \frac{dx}{dt} = u \\ \frac{d(f_2)}{dt} &= \frac{dy}{dt} = v \\ \frac{d(f_3)}{dt} &= \frac{dz}{dt} = w \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Такимъ образомъ, принявъ подобную зависимость, мы получимъ уравненія, связывающія всѣ величины такъ, что мы будемъ имѣть возможность слѣдить за движеніемъ каждой отдѣльной частицы. Принимая, далѣе, постояннымъ  $t$ , мы изъ тѣхъ же уравненій сможемъ опредѣлить обстоятельства движенія въ каждой точкѣ пространства, занятого жидкостью въ данный моментъ времени. Наконецъ, принимая постоянными координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$ , т.-е. сосредоточивъ вниманіе на опредѣленной точкѣ пространства, мы будемъ имѣть возможность выяснить на основанія этихъ же уравненій, какими скоростями, давленіями и пр. будутъ обладать разныя частицы жидкости, попадающія въ разныя моменты времени въ эту точку пространства, т.-е. получимъ вполнѣ общее рѣшеніе задачи о движеніи жидкости.

Замѣтимъ, что, устанавливая для жидкостей зависимость, выражаемую уравненіями (1), мы не ставимъ никакихъ ограниченій относительно вида функций, входящихъ въ составъ этихъ уравненій, кромѣ лишь того, что все это функции непрерывныя, — самый же видъ этихъ функций остается неизвѣстнымъ. Отмѣтимъ, однако, что разъ существованіе такой зависимости установлено, то величины  $p$ ,  $q$ ,  $u$ ,  $v$  и  $w$  являются функциями отъ функций. а потому полная производная, напримѣръ, давленія  $p$  по времени напишется такъ (полныя производныя, въ отличіе отъ частныхъ, будемъ заключать въ скобки):

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

или, на основаніи равенствъ (2):

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} - u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Теперь перейдемъ къ составленію уравненій движенія жидкости, находящейся подъ дѣйствіемъ объемной силы (т.-е. силы, пропорциональной массѣ), проекція которой по осямъ координатъ, отнесенныя къ единицѣ массы, обозначимъ черезъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Воспользуемся выведенными выше уравненіями равновѣсія жидкости подъ влияніемъ такихъ силъ (см. ур. (1) стр. 9):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z,$$

сообразно съ требованіями вопроса, по принципу д'Аламбера. Сюда еще силы инерціи, приходящіяся на единицу массы, — иными

словами, ускоренія по соответственнымъ осямъ координатъ, взятыя съ обратными знаками. Какъ извѣстно, ускореніе есть полная производная скорости по времени, т.-е для оси  $x$ -овъ это есть  $\left(\frac{du}{dt}\right)$ , для оси  $y$ -овъ  $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ , для оси  $z$ -овъ  $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ . Такимъ образомъ условія динамическаго равновѣсія жидкой частицы, имѣющей координаты  $x, y, z$ , или, что то же, уравненія движенія жидкости, напишутся такъ:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left[ X - \left(\frac{du}{dt}\right) \right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left[ Y - \left(\frac{dv}{dt}\right) \right],$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \left[ Z - \left(\frac{dw}{dt}\right) \right].$$

Для всѣхъ эти уравненія на  $\rho$ , внося составленныя на основаніи сказаннаго выше выраженія полныхъ производныхъ  $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ,  $\left(\frac{dv}{dt}\right)$  и  $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ , и соответственно группируя члены, получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Эти три уравненія были даны Эйлеромъ въ 1755 году въ Трудахъ Берлинской Академіи Наукъ и Литературы и извѣстны въ наукѣ подъ его именемъ, въ отличіе отъ другого вида этихъ уравненій, даннаго позднѣе Лагранжемъ.

Если внѣшнія силы  $X, Y, Z$  даны, то уравненія (3) представляютъ собою систему трехъ уравненій съ пятью неизвѣстными  $\rho, p, u, v$  и  $w$ , такъ что для полнаго рѣшенія поставленнаго вопроса мы должны составить еще два самостоятельныхъ уравненія. Первое изъ нихъ получимъ изъ разсмотрѣнія характернаго свойства данной жидкости, и если имѣемъ дѣло съ капельной, несжимаемой жидкостью, то это свойство выразится уравненіемъ

$$\rho = const \dots \dots \dots (4')$$

Если же данная жидкость газообразна, то плотность ея измѣняется вмѣстѣ съ давленіемъ, причемъ законъ этого измѣненія зависитъ отъ того, сообщается (или отнимается) жидкости тепло или нѣтъ, и если да, то ка-

кимъ образомъ. Мы ограничимся случаемъ постоянной температуры,—здесь зависимость между удѣльнымъ объемомъ  $v = \frac{1}{\rho v}$  и давлениемъ  $p$  выражается закономъ Мариотта:

$$pv = \frac{p}{\rho v} = \text{const.} \dots \dots \dots (4'')$$

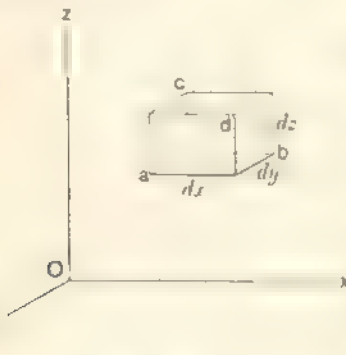
Если бы процессъ движенія газообразной жидкости протекалъ адиабатически, т.-е., хотя и при переменной температурѣ, но безъ отнятія или сообщенія ей тепла откуда бы то ни было, то, какъ это извѣстно изъ термодинамики, удѣльный объемъ  $v$  измѣнялся бы съ давлениемъ  $p$  по закону

$$p\bar{v}^k = \text{const} = p \left( \frac{1}{\rho v} \right)^k \dots \dots \dots (4''')$$

гдѣ  $k$  для воздуха при обыкновенныхъ условіяхъ имѣетъ значеніе 1,41.

Итакъ, въ дополненіе системы (3) мы имѣемъ возможность ввести одно изъ ур-ій: (4'), (4'') или (4'''), характеризующее свойство жидкости или процесса, — это будетъ четвертое недостающее уравненіе.

Последнее недостающее уравненіе, пятое, получимъ, вводя еще одно ограничивающее условіе, а именно, — *условіе неразрывности жидкости*, т.-е. будемъ разсматривать только такія движенія ея, при которыхъ внутри жидкости не образуется пространствъ, ея незаполненныхъ. Это условіе аналитически выразится такъ:



Фиг. 33.

Вообразимъ элементарный, неподвижный въ пространствѣ, параллелепипедъ  $abcd$ , съ ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , соответственно параллельными осямъ координатъ (фиг. 33). Пусть черезъ него протекаетъ разсматриваемая жидкость, причемъ въ моментъ времени  $t$  и въ точкѣ  $a$  скорости жидкости по осямъ координатъ пусть будутъ  $u$ ,  $v$  и  $w$ , а плотность  $\rho$ . Въ промежутокъ времени  $dt$  черезъ грань  $ac$  внутрь параллелепипеда войдетъ масса жидкости, равная

$$\rho \, dy \, dz \, u \, dt,$$

(мы пренебрегаемъ безконечно малыми высшаго порядка). Черезъ грань  $bd$ , гдѣ скорость и плотность другія, за то же время уйдетъ масса жидкости:

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy \, dz \, dt.$$

Прибыль массы жидкости за время  $dt$  по направлению оси  $x$ -овъ есть разность этихъ двухъ количествъ, т.-е.

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Написавъ подобныя же выраженія прибыли черезъ грани  $cb$  и  $ad$ , а также черезъ грани  $ab$  и  $cd$ , и сложивъ ихъ, получимъ полную прибыль массы за время  $dt$  въ этомъ неизмѣнчившемся за этотъ промежутокъ времени объемѣ пространства:

$$-dx dy dz dt \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \dots \quad (A)$$

Ту же прибыль можно выразить иначе. въ моментъ  $t$  масса заключенной въ объемѣ  $abcd$  жидкости была равна  $\rho dx dy dz$ , черезъ промежутокъ времени  $dt$  она измѣнилась на  $\frac{d(\rho dx dy dz)}{dt} dt$ . Но такъ какъ это измѣненіе массы произошло не за счетъ измѣненія объема, а только за счетъ измѣненія плотности, то произведеіе  $dx dy dz$ , какъ постоянное (объемъ разсматриваемаго элемента), можно вынести изъ подъ знака дифференціала, послѣ чего вышенаписанное измѣненіе массы за время  $dt$  т.-е. прибыль массы за время  $dt$ , выразится черезъ

$$dx dy dz dt \frac{d\rho}{dt} \dots \quad (B)$$

Сравнивая теперь выраженія (A) и (B) одного и того же количества жидкости, находимъ, послѣ соответствующихъ сокращеній, уравненіе:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \dots \quad (5)$$

Такъ какъ при выводѣ этого уравненія мы предполагали, что весь объемъ параллелепипеда за весь промежутокъ времени  $dt$  остается заполненнымъ жидкостью, то это уравненіе и есть условіе неразрывности; оно, какъ и ур-ія (3), дано также Эйлеромъ.

Напишемъ его, раскрывая производныя произведеній. Получаемъ:

$$\frac{d\rho}{dt} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad *) \dots \quad (5')$$

\*) По поводу этого уравненія слѣдуетъ слѣдующее замѣчаніе. Первые четыре его члена представляютъ полную производную  $\frac{d\rho}{dt}$  плотности по времени, т.-е. характеризуютъ измѣненіе плотности въ единицу времени. Если какое-нибудь тѣло занимаетъ все время нѣкоторый объемъ пространства сплошь, не оставляя въ немъ пустоты, то, понятно, всякое измѣ-

Для капельной жидкости имѣемъ

$$\rho = const,$$

а потому для нея условіе неразрывности выражается уравненіемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (5'')$$

нею плотности, чѣмъ бы оно ни было вызвано, — растяженіемъ, давленіемъ, нагрѣваніемъ и т. д., — можетъ проявиться только за счетъ соответствующаго измѣненія удѣльнаго объема. Это соответствіе и устанавливается послѣднимъ уравненіемъ. Перепишемъ его такъ:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \dots \dots \dots (C)$$

Первая часть этого ур-ія есть относительное измѣненіе плотности; вторая часть, слѣдовательно, представляетъ относительное измѣненіе удѣльнаго объема, т. е. то, что называется „коэффициентомъ кубическаго расширенія (или сжатія)“. Слѣдовательно, это уравненіе представляетъ собою формулировку положенія, что относительное увеличеніе плотности равно относительному уменьшенію удѣльнаго объема. Обозначая коэффициентъ кубическаго расширенія буквой  $\Theta$ , получаемъ соотношеніе

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Разсматривая механическій смыслъ выраженія

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

легко притти къ заключенію, что это, дѣйствительно, есть не что иное, какъ коэффициентъ кубическаго расширенія. Въ самомъ дѣлѣ, выяснимъ смыслъ выраженія  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Пусть въ данный моментъ двѣ точки деформируемой системы находятся на линіи, параллельной оси  $x$ -овъ, на разстояніи  $dx$  между собою. Въ этотъ моментъ ихъ скорости по оси  $x$ -овъ отличаются между собою только потому, что координаты  $x$  этихъ точекъ имѣютъ разныя значенія. Поэтому скорость второй точки ( $u + du$ ) можетъ быть выражена по скорости  $u$  первой точки такъ:

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Двигаясь съ разными скоростями, эти точки стремятся разойтись (или сблизиться, удлиняя или сжимая) частицы, заключающіяся между ними (если нѣтъ разрыва), въ единицу времени на  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ . А такъ какъ длина этихъ частицъ была въ началѣ  $dx$ , то относительная вытяжка, т. е. коэф-тъ линейнаго расширенія, и выразится черезъ  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Далѣе, принимая во вниманіе незначительность этой величины, можно сказать, что сумма относительныхъ линейныхъ вытяжекъ по всемъ тремъ осямъ есть относительное измѣненіе объема, т. е. коэф-тъ кубическаго расширенія.

Для капельной жидкости, т. е. при  $\rho = const$ , условіе (5) сводится къ  $\Theta = 0$ , т. е. къ дифференціальному выраженію постоянства удѣльнаго объема или ея несжимаемости.



Въ газообразныхъ тѣлахъ  $\rho$  есть, вообще, функция давления  $p$  [(см. уравнения (4'') и (4''')]; напиримѣрь, при постоянной температурѣ плотность  $\rho$  прямо пропорциональна давлению  $p$ , а потому  $d\rho$  также пропорционально  $dp$ ; слѣдовательно, замѣчая, что первые четыре члена уравнения (5'), представляютъ собою полную производную  $\rho$  по  $t$ , можемъ переписать его такъ:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$

Можно еще отметить, что мысль, выраженная уравнениями (С) и (5), въ конечной формѣ выражается уравненіемъ

$$r = \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho r}$$

или

$$\rho r = \frac{1}{r} = \text{const.}$$

вслѣдствіе чего эти ур-ія и могутъ быть получены изъ послѣдняго выраженія дифференцировавъ его по времени.

Указавъ смыслъ выраженій  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  и  $\frac{\partial w}{\partial z}$ , умѣстно напомнить выраженіе скорости, приводимое въ курсахъ аналитической механики. Рассмотримъ въ движущейся и деформируемой системѣ двѣ смежныя точки, координаты которыхъ отличаются на весьма малыя величины  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Проекціи по осямъ скорости первой точки, съ координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , назовемъ черезъ  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ; для второй точки проекція ея скорости  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$  въ тотъ же моментъ времени будутъ отличаться отъ  $u$ ,  $v$  и  $w$  только вслѣдствіе иного положенія второй точки въ пространствѣ по сравненію съ первой, а потому могутъ быть выражены такъ:

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

Прибавивъ и вычтя во второй части перваго изъ этихъ уравненій по  $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dy$  и по  $\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dz$  и сдѣлавъ аналогичныя преобразования съ другими двумя уравненіями, получимъ извѣстныя Эйлеровы выраженія скоростей:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + (n dy + m dz) + (\eta dz - \zeta dy), \\ v' &= v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + (l dz - n dx) + (\zeta dx - z dz), \\ w' &= w + \frac{\partial w}{\partial z} dz + (m dx - l dy) + (\xi dy - \eta dx). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (D)$$

гдѣ буквами  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  обозначены:

$$l = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} ; \quad m = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} ; \quad n = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ;$$

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} ; \quad \eta = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} ; \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} .$$

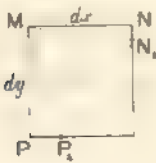
что для газовъ при постоянной температурѣ переписется такъ:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = p \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (5'')$$

Уравнения (5'') и (5''') представляютъ собою послѣднія, недостававшія намъ для опредѣленности системы (3), уравненія. Такимъ образомъ, какъ для жидкости, такъ и для газа мы имѣемъ возможность написать систему пяти

Если умножить обѣ части ур-ій (D) на  $dt$ , то они могутъ быть прочтены затѣмъ такъ: весьма малые перемѣщенія по осямъ координатъ какой либо точки системы съ координатами  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  состоятъ: 1) изъ общаго поступательнаго перемѣщенія всей системы, соответствующаго скоростямъ  $u, v, w$  данной точки съ координатами  $(x, y, z)$ ; первые члены ур-ій (D); 2) изъ удлиненій вдоль по осямъ координатъ, ибо, какъ только что было показано, таково значение вторыхъ членовъ тѣхъ же ур-ій. Разсмотримъ значение двухъ послѣднихъ членовъ каждаго изъ этихъ ур-ій, остановивъ вниманіе на послѣднемъ изъ нихъ.

При точкѣ  $M$  жидкости или, вообще, въ какой материальной системѣ вообразимъ безконечно малый прямоугольный параллелепипедъ съ ребрами, соответственно параллельными осямъ координатъ (фиг. 34). Пусть онъ проектируется на плоскость  $xy$  въ видѣ прямоугольника  $MMP$ ; стороны его  $MN$  и  $MP$  обозначимъ черезъ  $dx$  и  $dy$ . Скорость точки  $P$  въ направленіи оси  $x$ -овъ отличается отъ такой же скорости точки  $M$  на величину  $\frac{\partial u}{\partial y} dy$ . Относъ всѣхъ перемѣщеній къ единицѣ времени найдемъ, что вследствие этой разницы въ скоростяхъ ребро  $MP$  займетъ по истеченіи этой единицы времени иѣкоторое новое положеніе  $MP_1$ , при чемъ, вследствие малости перемѣщеній, можно считать:



Фиг. 34.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} PMP_1 = \operatorname{углу} PMP_1.$$

Такъ же найдемъ, что ребро  $MN$  займетъ положеніе  $NN_1$ , при чемъ

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{tg} MNN_1 = \operatorname{углу} MNN_1.$$

Такимъ образомъ, прямой уголъ  $MNP$  перекосятся и перейдетъ въ уголъ  $N_1MP_1$ , измѣнившись на уголъ  $(PMP_1 + MNN_1)$ , т.-е. на

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2n.$$

Это и есть то, что называется *деформацией сдвига*. Совершенно аналогично найдемъ, что  $2l$  есть сдвигъ въ плоскости  $xz$ , и  $2l$  есть сдвигъ въ плоскости  $yz$ .

Однако тѣ же перемѣщенія  $PP_1$  и  $NN_1$ , относительно точки  $M$  имѣютъ и другое значеніе: именно, на перемѣщеніе  $PP_1$  можно смотрѣть, какъ на поворотъ точки  $P$  около центра  $M$  на уголъ  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ; такъ какъ это вращеніе направлено противъ часовой стрѣлки, то мы его отмѣтимъ знакомъ минусъ. Равнымъ образомъ перемѣщеніе  $NN_1$  можно принять за вращеніе точки  $N$  около того же центра  $M$  на уголъ  $\frac{\partial v}{\partial x}$ , но уже по часовой стрѣлкѣ. Средній уголъ пово-

уравнений, вполне определенную.—изъ нихъ могутъ быть опредѣлены въ нужныя намъ пять неизвѣстныхъ. Въ эти уравненія входятъ частныя производныя неизвѣстныхъ функций; слѣдовательно, чтобы сдѣлать вопросъ вполне опредѣленнымъ, нужно послѣ интегрированія найти эти функции а также тѣ постоянныя, которыя войдутъ вслѣдствіе интегрированія. Значенія этихъ функций найдемъ изъ того требованія, чтобы найденныя общія интегральныя выраженія для  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  и  $q$  удовлетворяли нѣкоторымъ условіямъ на границахъ жидкой массы и, кромѣ того, начальнымъ обстоятельствамъ движенія.

Такъ, пусть жидкость ограничена стѣнкой, уравненіе которой есть  $f(x, y, z) = 0$ . Если стѣнка неподвижна, то жидкость не должна покидать стѣнки; для этого нужно, чтобы частица, находившаяся на стѣнкѣ во время  $t$ , оставалась на ней и во время  $(t + \Delta t)$ , т.-е., нужно, чтобы направления скоростей этой частицы были касательны къ стѣнкѣ. Если  $u$ ,  $v$  и  $w$  суть

рота всего элемента въ единицу времени, или, стало быть, угловая скорость вращения элемента около оси, проходящей черезъ него параллельно оси  $z$ -овъ, выразится, такимъ образомъ, черезъ

$$\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \dots$$

Точно такъ же убѣдимся, что выраженія  $\xi$  и  $\eta$ , представляють собою среднія угловые скорости вращения элемента около осей, черезъ него проходящихъ и параллельныхъ соответственно другимъ осямъ координатъ.

Такимъ образомъ, если перемѣщенія  $PP_1$  и  $NN_1$  обуславливаютъ какъ вращеніе элемента, такъ и его сдвигъ, то перемѣщенія, обусловленные исключительно сдвигомъ, соответствуютъ не полному углу перекося, а лишь его половинѣ. Такъ какъ, кромѣ того, перемѣщенія по оси  $x$ -овъ получаются благодаря деформации и вращенію не только въ плоскости  $xy$ , но также въ плоскости  $xz$ , то въ ур-яхъ (D) и фигурируютъ поэтому члены  $m \, dz$  (сдвигъ въ плоскости  $xz$ ) и поворотъ  $\omega$  въ той же плоскости. Наконецъ, понятно, что вращеніе по часовой стрѣлкѣ въ плоскости  $xy$  уменьшаетъ положительное перемѣщеніе по оси  $x$ -овъ, почему передъ членомъ  $du$  и стоитъ знакъ минусъ; вращеніе же по часовой стрѣлкѣ около оси  $y$  увеличиваетъ это перемѣщеніе, что отмѣчено въ ур-и знакомъ плюсъ.

Такимъ образомъ убѣждаемся, что третьи члены ур-ій (D) даютъ перемѣщенія элемента, вызванныя его *перекашиваніемъ*, а четвертые члены опредѣляютъ перемѣщенія элемента, вызванныя *вращеніемъ* его самого около себя. Такое вращеніе элемента около оси, черезъ него проходящей, называютъ *вихремъ*. Изъ опредѣленія вихря слѣдуетъ, что его не будетъ въ томъ случаѣ, если его скорости, т.-е. величины  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  равны нулю, т.-е. если существуютъ соотношенія

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \dots \dots \dots (E)$$

Такъ какъ скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  суть функціи координатъ, то соотношенія (E) можно разсматривать, какъ условія существованія нѣкоторой функціи  $\varphi$  координатъ, для которой должно быть:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

По аналогіи съ потенциальною функціей связь эта функція  $\varphi$  называется *потенциаломъ скоростей*. Условія ея существованія опредѣляются ур-іями (E), а потому можно сказать, что *невихревое движеніе есть въ то же время движеніе съ потенциаломъ скоростей*.

компоненты скорости такой частицы, то сама скорость  $\Gamma_s$  будет направлена по касательной къ поверхности  $f(x, y, z) = 0$  тогда, когда будетъ соблюдено условіе:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u_s + \frac{\partial f}{\partial y} v_s + \frac{\partial f}{\partial z} w_s = 0 \dots \dots \dots (F)$$

Если бы стѣнка двигалась, то ея уравненіе имѣло бы видъ:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

и тогда условіе касанія (F) изобразилось бы такъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} u_s + \frac{\partial f}{\partial y} v_s + \frac{\partial f}{\partial z} w_s + \frac{\partial f}{\partial t} = 0^*) \dots \dots \dots (G)$$

Далѣе, на свободной поверхности всегда дается величина внѣшняго давленія, и затѣмъ должны быть удовлетворены начальныя условія. Изъ этихъ условій и опредѣляются произвольныя постоянныя интегрированія.

До настоящаго времени дифференціальныя уравненія (3) и (5) въ общемъ видѣ не объинтегрированы; рѣшеніе получено только для ограничен-

\*) Составъ выраженія (F) станетъ понятнѣе, если вспомнить, что уголъ между нормалью  $N$  къ поверхности  $f(x, y, z) = 0$  и осью  $x$ -овъ выражается такъ:

$$\cos(N, x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{A},$$

гдѣ через  $A$  обозначенъ радикаль, стоящій въ знаменателѣ. Подобныя же выраженія напишутся для  $\cos(N, y)$  и для  $\cos(N, z)$ .

Далѣе, такъ какъ

$$u_s = V_s \cos(V_s, x); \quad v_s = V_s \cos(V_s, y); \quad w_s = V_s \cos(V_s, z),$$

то условіе (D) приводится къ уравненію:

$$\Gamma_s A \{ \cos(N, x) \cos(V_s, x) + \cos(N, y) \cos(V_s, y) + \cos(N, z) \cos(V_s, z) \} = V_s A \cos(V_s, N) = 0 \dots \dots (H)$$

$A$  такъ какъ радикаль  $A$ , вообще, отличенъ отъ нуля, скорость  $\Gamma_s$  тоже, то ур-е (H) сводится къ условію  $\cos(V_s, N) = 0$ . т.-е. къ тому, что проекція скорости  $\Gamma_s$  на нормаль къ поверхности стѣнки равна нулю, т.-е. что скорость  $V_s$ , дѣйствительно, касательна къ стѣнкѣ.

Что касается ур-ія (G), то послѣдній членъ его характеризуетъ то обстоятельство, что при движущейся стѣнкѣ полная абсолютная скорость частицы вообще не касается стѣнки къ ней касательна лишь относительная скорость частицы. Само выраженіе прежде всего получить такъ. Всякое весьма малое перемѣщеніе ( $dx, dy, dz$ ), происходящее въ предѣлахъ движущейся поверхности  $f(x, y, z, t)$  за время  $dt$  должно удовлетворять ур-ю

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0.$$

какъ дифференціалу постоянной величины. Если внести сюда перемѣщенія жидкой частицы, положивъ  $dx = u_s dt$  и т. д., то и получимъ ур-е (G). Для неподвижной стѣнки  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ . и ур-іе (G) обращается въ ур-іе (F).

наго числа частныхъ случаевъ, и мы остановимся теперь на томъ изъ нихъ: который имѣеть для практики наибольшее значеніе, а именно, — на случай установившагося движенія подѣ влияемъ силъ, имѣющихъ потенциальную функцію.

**§ 7. Интегрированіе общихъ уравненій движенія жидкости.  
Установившееся движеніе.**

Установившимся (permanent), въ отличие отъ переменнаго (varie), называютъ такое движеніе, при которомъ, независимо отъ времени, въ любой точкѣ пространства всякая движущаяся частица, попадая въ эту точку, приобретаетъ всегда однѣ и тѣ же скорости, плотность и давленіе, иначе говоря, при такомъ движеніи всякой точкѣ пространства присущи свои опредѣленныя величины  $\rho$ ,  $v$  и  $p$ , неизмѣняющіяся во времени и обязательныя для всякой частицы, въ эту точку приходящей.

Согласно съ этимъ опредѣленіемъ установившееся движеніе можно представить себѣ такъ. Обратимъ вниманіе на какую-нибудь частицу жидкости, занимающую положеніе  $M$  въ пространствѣ, гдѣ она въ данный моментъ имѣеть скорость  $V$ . Черезъ время  $dt$  она перейдетъ въ точку пространства  $M'$ , гдѣ получитъ скорость  $V'$ , можетъ быть, отличную отъ  $V$ , а на ея мѣсто въ  $M$  придетъ новая частица, которая получитъ первую скорость  $V$ ; еще черезъ  $dt$  времени первая частица займетъ новое положеніе  $M''$  и получитъ новую скорость  $V''$ ; вторая же частица придетъ именно въ  $M'$  и получитъ скорость  $V'$ , а на мѣсто ея въ  $M$  придетъ третья частица и т. д. Такова картина установившагося движенія. Какъ видно, въ жидкомъ тѣлѣ вырисовываются нѣкоторыя траектории, со временемъ не мѣняющіяся, это такъ называемыя *линіи токовъ*, по которымъ частицы бѣгутъ одна за другой по неизмѣнному закону.

Понятно, что въ установившемся движеніи скорости, давленія и проч. со временемъ мѣняются, но только по столько, по сколько отъ переменны времени мѣняются координаты точки; непосредственно же отъ времени ни одно изъ обстоятельствъ движенія не зависитъ. Поэтому установившееся движеніе аналитически характеризуется тѣмъ, что частныя производныя скорости, давленія и плотности по времени равны нулю, т-е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

и уравненія движенія (3) получаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Интегрируются эти уравнения следующимъ образомъ. Множимъ первое изъ уравнений (6) на  $dx$ , второе на  $dy$ , третье на  $dz$  и складываемъ; находимъ:

$$\begin{aligned}
 X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) &= u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dx + w \frac{\partial u}{\partial z} dx + \\
 &+ u \frac{\partial v}{\partial x} dy + v \frac{\partial v}{\partial y} dy + u \frac{\partial v}{\partial z} dy \\
 &+ u \frac{\partial w}{\partial x} dz + v \frac{\partial w}{\partial y} dz + w \frac{\partial w}{\partial z} dz.
 \end{aligned}$$

Первые три члена лѣвой части полученнаго уравненія представляютъ полный дифференціалъ  $dU$  силовой функции вѣншихъ дѣйствующихъ силъ; слѣдующіе три члена, заключенные въ скобки, представляютъ полный дифференціалъ  $dp$  гидродинамическаго давленія; зависимость величины  $\frac{1}{\rho}$  отъ удѣльнаго объема  $v$  представляется, какъ мы не разъ имѣли, въ видѣ условия  $\frac{1}{\rho} = gv$ , такъ что лѣвая часть уравненія представится теперь въ видѣ:

$$dU - gv dp.$$

Далѣе, первые три члена второй части уравненія, на основаніи уравненій (2) предыдущаго параграфа, можно представить такъ

$$u \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dy + w \frac{\partial u}{\partial z} dz = u \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = u du. \quad (A)$$

Подобнымъ же образомъ видоизмѣнимъ остальные группы членовъ этого уравненія, послѣ чего получимъ:

$$dU - gv dp = u du + v dx + w dz = \frac{1}{2} d(u^2 + v^2 + w^2) = d \frac{V^2}{2},$$

такъ какъ скорость  $V$  по ея компонентамъ выражается такъ:

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Итакъ, мы получили дифференціальное уравненіе

$$dU - gv dp - d \frac{V^2}{2} = 0.$$

Интегрируя его, находимъ:

$$U - g \int v dp - \frac{V^2}{2} = const \dots \dots \dots (B)$$

Значение постоянного получимъ, если для начальнаго положенія частицы будутъ даны значеніе силовой функціи  $U_0$ , скорость  $V_0$ , давленіе  $p_0$  и удѣльный объемъ  $\bar{v}_0$ ; тогда получимъ:

$$U_0 - g \left| \int_{v_0, p_0} \bar{v} dp \right| - \frac{V_0^2}{2} = const,$$

послѣ чего ур. (B) переписется такъ:

$$U - U_0 - g \int_p^{\bar{v}} \bar{v} dp - \frac{1}{2} (V^2 - V_0^2) = 0 \dots \dots \dots (C)$$

Пусть внешняя сила есть тяжесть. Мы видѣли уже, что силовая функція для тяжести имѣетъ видъ

$$U = -gz + const,$$

если ось  $z$ -овъ направлена вертикально вверхъ. (Слѣдовательно, для жидкости, движущейся подъ дѣйствіемъ силы тяжести, уравненіе (C) приметъ видъ:

$$g(z_0 - z) - g \int_p^{\bar{v}} \bar{v} dp = \frac{1}{2} (V^2 - V_0^2) \dots \dots \dots (7)$$

Наконецъ, такъ какъ удѣльный объемъ  $\bar{v}$  и давленіе  $p$ , вообще, связаны между собою нѣкоторой зависимостью, то, на основаніи правила интегрированія по частямъ, можно написать:

$$\int_p^{\bar{v}} \bar{v} dp = p\bar{v} - p_0\bar{v}_0 - \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} p d\bar{v}.$$

Послѣ этого, раздѣливъ ур. (7) на  $g$ , переписемъ его такъ

$$(z_0 - z) + (p_0\bar{v}_0 - p\bar{v}) - \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}} p d\bar{v} = \frac{1}{2g} (V^2 - V_0^2) \dots \dots \dots (8)$$

Обратимъ вниманіе, какъ получено это ур-іе. Уравненія (6) представляются уравненіями проекцій всѣхъ силъ на оси координатъ, причѣмъ силы отнесены къ единицѣ массы. Умножая ихъ на соответствующія перемѣщенія частицы  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и складывая, мы получаемъ, очевидно, работы этихъ силъ на весьма маломъ перемѣщеніи, по прежнему отнесенныя къ единицѣ массы. Наконецъ, интегрируя ихъ и дѣля на ускореніе тяжести, мы получаемъ уравненіе работъ на нѣкоторомъ конечномъ перемѣщеніи, отнесенное къ единицѣ вѣса жидкости.

Первый членъ (въ скобкахъ) уравненія (8) представляетъ работу тяжести каждаго килограмма, опускающагося съ высоты  $z_0$  до высоты  $z$ ; во

второй части ур-я имѣемъ приращеніе живой силы каждаго килограмма при этомъ перемѣщеніи, если начальная скорость  $\Gamma_0$  обратилась въ  $\Gamma$

Пока мы разсматриваемъ свободное неизмѣняемое твердое тѣло, перемѣщающееся подъ дѣйствіемъ тяжести, то, какъ извѣстно, принимаемъ, что эти двѣ величины между собою равны: работа паденія равна приращенію живой силы. Это мы можемъ получить и изъ уравненія (8), такъ какъ для случая твердаго тѣла въ немъ нужно положить

$$v = v_0 = \frac{1}{\gamma} = const,$$

такъ что

$$dv = 0;$$

равнымъ образомъ для твердаго тѣла  $p = p_0$ , такъ какъ для твердаго тѣла величина  $p$  есть напряженіе, испытываемое тѣломъ и при постоянствѣ силы не мѣняющееся. Для жидкости дѣло обстоитъ нѣсколько иначе.

Когда мы имѣемъ капельное жидкое тѣло, то для него имѣемъ, какъ характеристику его несжимаемости, условіе

$$v = v_0 = \frac{1}{\gamma},$$

такъ что

$$dv = 0,$$

а потому уравненіе (8) для *капельнаго жидкаго тѣла* принимаетъ видъ.

$$(z_0 - z) + \frac{p_0 - p}{\gamma} - \frac{1}{2g} (\Gamma^2 - \Gamma_0^2) \dots \dots \dots (9)$$

Это уравненіе, какъ общее уравненіе работъ, можно прочесть такъ: измѣненіе запаса кинетической энергіи (живой силы) равно измѣненію запаса потенциальной энергіи, причемъ эта послѣдняя состоитъ изъ работы силы тяжести и изъ работы гидродинамическихъ давленій, такъ какъ понятно, что  $\frac{p}{\gamma}$  есть работа давленія, отнесенная къ одному килограмму. Въ самомъ дѣлѣ, пусть мы имѣемъ струйку, площадь бесконечно малаго поперечнаго сѣченія которой въ данномъ мѣстѣ, взятаго перпендикулярно къ скорости, обозначимъ черезъ  $df$ ; скорость жидкости въ этомъ мѣстѣ обозначимъ черезъ  $\Gamma$ . За время  $dt$  черезъ такое сѣченіе, при условіи установившагося движенія, пройдетъ, очевидно,  $\gamma \cdot df \cdot \Gamma dt$  жидкости. Если давленіе на единицу площади въ этомъ сѣченіи есть  $p$ , то на всю площадь  $df$  оно даетъ усиліе  $p df$ ; такъ какъ частица за время  $dt$  подъ такимъ давленіемъ проходитъ путь  $\Gamma dt$ , то работа давленія во взятомъ сѣченіи есть  $p df \Gamma dt$ . Относя эту работу къ 1  $kg$  протекающей жидкости, получимъ работу давленія  $\frac{p}{\gamma}$ . Выше (стр. 15) было уже указано, что  $\frac{p}{\gamma}$  представляетъ



ся линейной величиной и называется высотой, соответствующей давлению. въ данномъ случаѣ гидродинамическому. Назовемъ ее пьезометрической высотой. Принявъ это, можемъ прочесть ур. (9) такъ: на одномъ перемѣщеніи приращение живой силы въ каждомъ килограммъ капельной жидкости, движущейся подъ влияніемъ тяжести въ установившемся движеніи, равно суммѣ работы тяжести на этомъ перемѣщеніи и работы гидродинамическихъ давленій, — послѣдняя равна разности пьезометрическихъ высотъ въ началѣ и въ концѣ разсматриваемого перемѣщенія.

Пусть, наконецъ, мы имѣемъ газообразную, упругую жидкость. Уравненія (7) и (8) справедливы и для нея, и ихъ можно прочесть такъ. приращение живой силы равно работѣ тяжести плюс работа давленій, но только эта послѣдняя зависитъ здѣсь не отъ однихъ начальныхъ и конечныхъ значеній давленія и удѣльнаго объема, а также и отъ того закона, по которому происходитъ измѣненіе второго съ измѣненіемъ перваго, что видно изъ присутствія въ уравненіи (8) члена подъ знакомъ интеграла; законъ же измѣненія давленія упругой жидкости вмѣстѣ съ измѣненіемъ удѣльнаго объема находится въ непосредственной зависимости отъ свойствъ самаго газа и отъ количества и способа сообщенія ему (или отнятія отъ него) тепла. По первому принципу термодинамики безконечно малое количество тепла  $dQ$ , сообщаемое 1 *kg* упругой жидкости, обращается на измѣненіе внутренней энергіи ( $U^*$ ) (измѣненіе колебательнаго движенія частицъ около ихъ положенія равновѣсія и измѣненіе положенія центровъ тяжести ихъ) и на преодоленіе внѣшняго давленія  $p$  при измѣненіи удѣльнаго объема на  $d\bar{v}$ , такъ что:

$$dQ = A(dU + p d\bar{v}),$$

гдѣ  $A = \frac{1}{424}$  есть термическій эквивалентъ работы, т.-е. количество калорій, эквивалентное одному килограмметру. Поэтому уравненіе (8) можно написать такъ:

$$(z_0 - z) + (p_0 v_0 - p v) + \frac{Q}{A} = \frac{1}{2g}(V^2 - V_0^2) + \int dU,$$

т.-е. сумма приращенія живой силы на данномъ перемѣщеніи и измѣненія запаса внутренней энергіи равна суммѣ работы тяжести, измѣненія пьезометрической высоты и работы, эквивалентной сообщенному количеству тепла на этомъ перемѣщеніи.

Термодинамика изучаетъ, какимъ образомъ для разныхъ газовъ измѣняется запасъ внутренней энергіи въ зависимости отъ способа сообщенія имъ тепла. Ограничиваясь здѣсь указаніемъ, что наше уравненіе (8) имѣетъ, какъ видимъ, совершенно общее значеніе, воспользуемся непосредственно результатами, добытыми термодинамикой и уже упомянутыми нами, а именно, возьмемъ уравненія (4'') и (4''') § 6.

\*) Это обозначеніе не слѣдуетъ смѣшивать съ обозначеніемъ потенциала внѣшнихъ силъ.

При изотермическомъ процессѣ имѣемъ для воздуха

$$p\bar{v} = const = k.$$

Отсюда имѣемъ, во-первыхъ,

$$p_0 v_0 = p v,$$

а во-вторыхъ,

$$p d\bar{v} + \bar{v} dp = 0$$

или

$$p d\bar{v} = -k \frac{dp}{p} = -k dLp.$$

Поэтому уравненіе (8) напишется въ этомъ случаѣ такъ

$$(z_0 - z) + k L \frac{p_0}{p} - \frac{1}{2g} (V^2 - V_0^2) \dots \dots \dots (10)$$

Если имѣемъ адиабатическій \*) процессъ, т.е. если во время движенія газа тепло ему не сообщается и не отнимается, то для воздуха

$$p v^k = p_0 v_0^k = const.$$

Имѣя въ виду эту зависимость, получаемъ, очевидно,

$$p dv = - \frac{1}{k} dp = - p_0^{\frac{1}{k}} v_0^{-\frac{1}{k}} p^{-\frac{1}{k}} dp.$$

Послѣ этого интеграль въ ур-ніи (8) можетъ быть представленъ такъ

$$\int_{v_0}^v p dv = p_0^{\frac{1}{k}} v_0^{-\frac{1}{k}} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{1}{k-1} (p_0^{1/k} - p^{1/k})$$

и теперь ур-не (8), съ замѣной удѣльнаго объема удѣльнымъ весомъ, напишется окончательно такъ:

$$(z_0 - z) + \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{1}{2g} (V^2 - V_0^2) \dots \dots \dots (11)$$

\*) Всякое движеніе сопровождается треньемъ; работа тренья обращается въ тепло, которое отчасти сообщается движущемуся газу. Слѣд., адиабатическій процессъ возможенъ тогда, когда движущійся газъ отдаетъ наружу какъ разъ столько тепла и въ такомъ же порядкѣ, сколько и какъ оное воспринялъ отъ развитой работы тренья, сверхъ этого тепло не отнимается и не сообщается.

Уравнение (9) для капельныхъ жидкостей есть основное уравнение гидравлики. Напомнимъ, что оно выведено въ предположеніи того, что жидкость совершенная и что ея движеніе установившееся; слѣдуетъ также обратить вниманіе на то, что это уравн. представляетъ законъ измѣненія давленія и скорости для частицъ, бѣгущихъ по *линіи тока*, такъ какъ, при умноженіи уравненій (6) на  $dx, dy, dz$ , мы, очевидно, разумѣли подъ этими  $dx, dy, dz$  не какія-нибудь произвольныя перемѣщенія, а какъ разъ тѣ перемѣщенія, которыя испытываетъ сама частица, такъ какъ въ противномъ случаѣ мы не имѣли бы права дѣлать тѣ преобразованія, которыя были нами произведены, подобно, напр., строкѣ (A) этого параграфа.

Наконецъ, по той же причинѣ нужно считать, что постоянное въ уравненіи (9) имѣеть, вообще, разныя значенія для разныхъ линій тока, почему уравнение (9), применимое для каждой отдѣльной линіи, ко всей массѣ жидкости не применимо.

Въ началѣ этого параграфа было указано, что при установившемся движеніи линіи тока совпадаютъ съ траекторіями частицъ. Вообще же *линей тока* называется *кривая, проведенная черезъ рядъ жидкихъ точекъ касательно къ направленіямъ ихъ скоростей*. Понятно, что если движеніе неустановившееся, то линіи тока отличаются отъ траекторій, потому что онѣ самы съ теченіемъ времени измѣняются. Уравненія линій тока можно найти, выражая аналитически ту мысль, что проекціи  $dx, dy, dz$  любого перемѣщенія  $ds$  по линіи тока за данный промежутокъ времени  $dt$  равны проекціямъ  $u dt, v dt, w dt$  перемѣщенія жидкой частицы, лежащей въ линіи тока въ этотъ моментъ; слѣдовательно, эти уравненія нужно написать такъ:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \dots \dots \dots (a)$$

Величины  $u, v, w$  представляются вообще функциями координатъ и времени, но въ этихъ уравненіяхъ онѣ должны быть внесены применительно къ данному моменту.

Пусть разсматриваемое движеніе жидкости таково, что существуетъ потенциалъ скоростей. Какъ было указано въ одномъ изъ примѣчаній предыдущаго параграфа, для этого нужно, чтобы не было вращенія, т.е. чтобы удовлетворялись условія:

$$\left. \begin{aligned} 2z \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ 2y \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ 2x \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (b)$$

Это равносильно существованію функціи  $\varphi(x, y, z, t)$  такой, чтобы

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \dots \dots \dots (c)$$

По аналогіи съ поверхностями уровня, можно вообразить себѣ для каждаго даннаго момента времени систему поверхностей  $\varphi = const$ , для всѣхъ точекъ которой значеніе потенциала скоростей оставалось бы однимъ и тѣмъ же. Это такъ называемыя *эквипотенциальныя поверхности*. Не трудно видѣть, что *линіи тока* къ этимъ поверхностямъ

нормальны. Въ самомъ дѣлѣ  $\cos$ -ы угловъ, образуемыхъ полною скоростью  $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$  частицы (т.-е касательной къ линіи тока) съ осями координатъ суть  $\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$ , ... и т. д.  $\cos$ -ы же угловъ нормали къ поверхности  $\varphi = \text{const}$  съ осями координатъ суть

$$V \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \dots \text{ и т. д.}$$

Составляя выраженіе  $\cos$ -а угла между касательной къ линіи тока и этой нормалью, найдемъ на основаніи ур-ій (с), что онъ равенъ единицѣ, т.-е. что линіи тока нормальны къ поверхностямъ постояннаго потенциала скоростей, т.-е. что жидкость течетъ нормально къ этимъ поверхностямъ; поэтому расходъ жидкости за время  $dt$  можетъ быть вычисляемъ умноженіемъ площади элемента этой поверхности на соответствующую скорость и на  $dt$ . Нужно только помнить, что какъ сами линіи тока, такъ и эти поверхности съ теченіемъ времени видоизмѣняются.

Если движеніе жидкости таково, что существуетъ потенциалъ скоростей, то уравненія (3) этого параграфа могутъ быть проинтегрированы въ общемъ видѣ, если, кромѣ того, какъ и для установившагося движенія, внѣшнія силы имѣютъ потенциалъ, а плотность  $\rho$  есть функція только давленія  $p$ . Въ самомъ дѣлѣ, принимая во вниманіе, что, на основаніи ур-ія (с), можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned} \right\}, \dots \text{ и т. д.}$$

ур-ямъ (3) можно дать видъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}$$

гдѣ  $U$  есть силовая функція. Обозначая далѣе полную скорость частицы черезъ  $V$ , такъ что

$$V^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

можемъ переписать полученные ур-ія такъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 \right] &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что выраженіе, стоящее въ скобкахъ, не зависитъ отъ координатъ и можетъ представить собою функцію одного лишь времени  $t$ ; поэтому, умножая эти ур-ія на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , складывая и интегрируя, получимъ въ общемъ видѣ выраженіе въ скобкахъ, какъ некоторую функцію времени  $\Phi(t)$ ; такъ что имѣемъ:

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 = \Phi(t) + C \dots \dots \dots (d)$$

Само собою разумеется, что эта функция  $\Phi(t)$ , зависящая только от времени, может быть включена въ составъ производной  $\frac{d\varphi}{dt}$ , т.-е. можно положить, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Phi(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

ибо если двѣ функции координатъ и времени (у насъ функции  $\varphi$  и  $\varphi_1$ ) отличаются другъ отъ друга только на функцию одного времени, и одна изъ нихъ удовлетворяетъ условию (а) и (б), то другая также можетъ быть принята и за потенциалъ скоростей, такъ какъ частныя производныя этихъ функций по координатамъ между собою равны; поэтому вмѣсто уравненія (д) можно написать ур-іе:

$$U - \int \frac{dp}{\rho} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 = C \dots \dots \dots (д')$$

Второе уравненіе, — уравненіе неразрывности, — въ этомъ случаѣ напишется такъ:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots e$$

Потенциальная функция  $\varphi$  (или  $\varphi_1$ ) должна, конечно, удовлетворять этому уравненію, равно и граничнымъ условіямъ.

Наконецъ, третье уравненіе остается, какъ и ранѣе, въ видѣ характеристики или жидкости, или разсматриваемаго движенія; въ общемъ случаѣ его можно написать въ видѣ:

$$\rho = f(p);$$

въ частности, для капельной жидкости,  $\rho = const$ .

Движеніе жидкости съ потенциаломъ скоростей замѣчательно тѣмъ, что въ уравненіяхъ (д) или (д') *постоянное C имѣетъ одну и то же значение не только на линіи тока, какъ это имѣетъ мѣсто при установившемся движеніи, но и для всей разсматриваемой массы жидкости*. Особенно интересенъ случай, когда это движеніе въ то же время есть движеніе установившееся. Тогда ур-іе (д') обращается въ уравненіе (В) этого параграфа (стр. 55), при чемъ произвольное постоянное сохраняетъ одно и то же значение для всей массы жидкости. Легко видѣть, что разбираемый въ слѣдующемъ параграфѣ случай установившагося движенія съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій относится именно къ этой категоріи, если, конечно, отказаться отъ его криволінейности и считать его прямолинейнымъ, напр., параллельнымъ оси  $x$ -овъ. Тогда нужно будетъ положить  $v = 0$ ;  $w = 0$ . Потенциальная функция вида

$$\varphi = Kx^n = const$$

этому случаю движенія удовлетворяетъ, ибо она дастъ

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = Knx^{n-1},$$

такъ что ур-ія (б) тождественно удовлетворяются. Поэтому для такого движенія потенциалъ скоростей существуетъ. Эквипотенциальныя поверхности  $\varphi = const$  являются здѣсь, конечно, плоскостями, перпендикулярными къ оси движенія. Линіи тока этой оси параллельны. Ур-іе неразрывности для капельной жидкости даетъ здѣсь условіе

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,$$

что возможно только при  $n = 1$ , т. е. если скорость постоянна не только в разных точках одной и той же поверхности  $\varphi = \text{const}$ , но и во всей массе жидкости. Таким образом прямолинейное установившееся движение капельной жидкости можно себе представить только равноугриным и тогда оно не отличается от такого же движения твердого неизменяемого тела. Отсюда видно, насколько, в сущности, неправильно то общепринятое распространительное толкование уравнения Л. Бернулли, которое приводится в следующем параграфе.

Если данное прямолинейное движение есть движение неустановившееся, то потенциальная функция вида

$$\varphi = v^2(t) \cdot x = \text{const}$$

этому случаю удовлетворяет, в чем легко убедиться подобно предыдущему. И тут нужно представить себе, что скорость, изменяющаяся со временем, меняется одновременно для всех точек движущейся так жидкости, так что и тут движение жидкого тела не отличается от прямолинейного движения неизменяемого твердого тела.

Ниже мы таким же образом движения с потенциалом скоростей, а пока заметим, что если в какой-нибудь момент для данной массы совершенной жидкости только потенциал существует, то он сохраняется и во все время движения этой массы жидкости. Другими словами, движущуюся совершенную жидкость нельзя привести в вихревое движение, если оно сначала было невихревым, и наоборот: вихревое движение совершенной жидкости нельзя перевести в невихревое; при этом предполагается, что внешние силы имеют потенциал и что плотность зависит только от давления.

В самом деле, в последнем случае на первых части уравнений (3) § 6 можно смотреть, как на частные производные от силовой функции  $U$  и некоторой функции  $P$ , определяемой из условия:

$$P = \int \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \int \frac{dp}{\rho}$$

Таким образом уравнения (3) можно будет переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (U - P) - \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} (U - P) - \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z} (U - P) - \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Возьмем от последнего уравнения производную по  $y$ , а от второго уравнения — по  $x$  и вычтем вторую из первой. Группируя соответствующим образом члены, имея в виду выражения (6) мгновенных угловых скоростей вращения, на этот раз, вообще, равных нулю, и, наконец, принимая во внимание, что порядок дифференцирования не влияет на результат его, — напр.,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ , — получаем:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Два последние члены, равные и противоположные по знаку, прибавлены для возможности надлежащей группировки. Вынося надлежащие множители за скобки у первых членов от начала и от конца, у вторых членов от начала и конца и у третьих членов

новъ, которые заключены въ скобки, сличая даѣе находящиеся въ скобкахъ члены съ обозначеніями (4) и сокращая все уравненіе на 2, получимъ:

$$\frac{dz}{dt} + \xi \frac{\partial u}{\partial y} = \xi \frac{\partial u}{\partial z} - \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Но на основаніи уравненія неразрывности (5) имѣемъ:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вслѣдствіе этого предыдущее уравненіе дасть:

$$\frac{d}{dt} \xi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Наконецъ, дѣля всѣ члены уравненія на  $\rho$  и замѣчая, что въ лѣвой части мы находимъ тогда полную производную по времени отъ отношенія  $\frac{\xi}{\rho}$ , переписываемъ окончательно это уравненіе, а равно по аналогіи и два другія, такъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\xi}{\rho} &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \frac{\eta}{\rho} &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{d}{dt} \frac{\zeta}{\rho} &= \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (f)$$

Эти уравненія даны въ 1858 году Гельмгольцемъ (Hermann von Helmholtz. Два изслѣдованія по гидродинамикѣ. Переводъ подъ редакціей и съ примѣчаніями проф. С. А. Чаплыгина. Москва, 1902 г.). Они показываютъ, что полныя производныя по времени отъ отношеній  $\frac{\xi}{\rho}$ ,  $\frac{\eta}{\rho}$ ,  $\frac{\zeta}{\rho}$ , для несжимаемой жидкости эти производныя представляютъ полныя угловыя ускоренія частицы, такъ какъ всѣ уравненія (f) могутъ быть просто умножены на постоянное  $\rho$  которое исчезнетъ изъ уравненій, — представляются линейными функціями этихъ самыхъ отношеній, при чемъ всѣ коэффициенты зависятъ отъ времени. Взявши вторыя производныя отъ этихъ уравненій, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\xi}{\rho} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d}{dt} \frac{\xi}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{d}{dt} \frac{\eta}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{d}{dt} \frac{\zeta}{\rho} + \\ &+ \frac{\xi}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right] + \\ &+ \frac{\eta}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right] + \\ &+ \frac{\zeta}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

и два другія аналогичныя уравненія. Исключая изъ нихъ помощью уравненій (f) выра-

женія первыхъ производныхъ по времени отношеній  $\frac{\xi}{\rho}$ ,  $\frac{\eta}{\rho}$ ,  $\frac{\zeta}{\rho}$ , получимъ выраженія вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\xi}{\rho} \right) &= a_1 \frac{\xi}{\rho} + b_1 \frac{\eta}{\rho} + c_1 \frac{\zeta}{\rho}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\eta}{\rho} \right) &= a_2 \frac{\xi}{\rho} + b_2 \frac{\eta}{\rho} + c_2 \frac{\zeta}{\rho}, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\zeta}{\rho} \right) &= a_3 \frac{\xi}{\rho} - b_3 \frac{\eta}{\rho} + c_3 \frac{\zeta}{\rho}, \end{aligned}$$

гдѣ величины  $a_1, a_2, \dots, c_2, c_3$ , являются зависящими отъ времени, а не отъ величинъ  $\xi, \eta, \zeta$ , а именно:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ b_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ c_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ a_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ b_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ c_2 &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ a_3 &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ b_3 &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ c_3 &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Ясно, что и всѣ производныя высшаго порядка имѣютъ такой же видъ, съ дальнѣйшимъ лишь усложненіемъ состава коэффициентовъ  $a, b, c$ , но съ сохраненіемъ ихъ независимости отъ  $\xi, \eta, \zeta$ . Отсюда можно заключить, что если при движеніи жидкой частицы есть моментъ, когда угловыя скорости  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  обращаются одновременно въ нуль, а вмѣстѣ съ ними обращаются въ нуль какъ всѣ угловыя ускоренія, такъ и всѣ ихъ производныя по времени, то и въ слѣдующій моментъ угловыя скорости этой частицы останутся равными нулю. Другими словами, если нѣкоторая часть жидкости движется такъ, что въ нѣкоторый моментъ ея частицы не имѣютъ вращательнаго движенія, то онѣ не имѣютъ его никогда, ни до, ни послѣ этого момента. Равнымъ образомъ, имѣющійся вихрь уничтожиться не можетъ. Точно также, если въ движеніе начинаетъ приходить совершенная жидкость покоящаяся, то она во вращеніе не придетъ, вихря не будетъ,— наоборотъ, будетъ существовать потенциалъ скоростей. Напомнимъ, что всѣ эти положенія справедливы для совершенной жидкости, не могущей выдерживать, ни оказывать тангенциальныхъ усилій, если притомъ она находится подъ влияніемъ силъ, имѣющихъ потенциалъ, а ея плотность есть функція давленія.

Въ качествѣ примѣра рассмотримъ случай *установившагося плоскаго невихревого теченія* неограниченной массы жидкости. Пусть теченіе происходитъ подъ дѣйствіемъ силы тяжести параллельно плоскости  $xz$ . Ясно, что вмѣсто теченія всей массы въ пространствѣ можно разсматривать лишь теченіе въ плоскости  $xz$ , т.-е. лишь въ двухъ измѣреніяхъ. Пусть по пути теченія расположена горизонтальная неограниченная плоскость, по которой и должно совершаться теченіе. Начало координатъ примемъ въ этой плоскости, ось  $x$ -овъ



направимъ вертикально вверхъ, тогда ось  $x$ -овъ будетъ совпадать съ данной плоскостью. Уравненія движенія (3), очевидно, примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, т.-е. имѣющей  $\rho = const$  будетъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Такъ какъ движеніе плоское, то отсутствие вихрей обусловливается уравненіемъ

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0.$$

Уравненіе линій тока будетъ одно:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w},$$

или

$$u \, dz - w \, dx = 0 \dots \dots \dots (3)$$

При существованіи функции  $\psi(x, z)$ , удовлетворяющей условіямъ:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \dots \dots \dots (4)$$

лѣвая часть уравненія (3) представитъ собою полный дифференціалъ.

Уравненіе (2) неразрывности, показывающее, что вторыя производныя этой функции  $\psi$ , взятыя сначала по  $z$ , потомъ по  $x$ , и наоборотъ, между собою равны, позволяетъ утверждать, что такая функция дѣйствительно существуетъ. Будучи приравнена постоянной величинѣ, какъ того требуетъ уравненіе (3), она представляетъ въ конечномъ видѣ уравненіе линій тока, или, въ нашемъ случаѣ, уравненіе траекторій отдѣльныхъ частицъ.

Наконецъ, потенциальная функция скорости, т.-е.  $\varphi(x, z)$ , должна быть такова, чтобы на основаніи уравненія неразрывности удовлетворялось уравненіе

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Ясно, что производныя этой функции связаны съ производными функции  $\psi$  соотношеніями:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Наконецъ, функция  $\varphi$  должна быть такова, чтобы при  $z = 0$  скорость  $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$  обращалась тоже въ нуль, такъ какъ частицы жидкости, лежація на нашей горизонтальной плоскости, могутъ двигаться только горизонтально.

Простейшая функция  $\varphi$ , удовлетворяющая этим условиям, есть

$$\varphi = Kx^2 - Kz^2, \dots \dots \dots (6)$$

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцированиемъ находимъ, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2K$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2K,$$

такъ что уравнение (5) тождественно удовлетворяется. Кроме того,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2Kz,$$

что при  $z = 0$  даетъ  $w = 0$ , какъ это и требовалось.

Кривыя постояннаго потенциала скоростей имѣютъ уравнение

$$\varphi = const,$$

что въ нашемъ случаѣ, въ виду (6), даетъ:

$$x^2 - z^2 = A^2 \dots \dots \dots (7)$$

гдѣ  $A$  есть некоторая постоянная величина, измѣняющаяся отъ одной эквипотенціальной кривой до другой. По уравненію видно, что эти кривыя представляютъ собою *равностороннія гиперболы*, отнесенныя къ центру и главнымъ осямъ.

Кривыя токовъ получимъ, внося изъ (6) значения скоростей  $u$  и  $w$  въ уравненіе (3) и интегрируя его; такимъ путемъ получаемъ:

$$2Kx \, dx + 2Kz \, dz = 0;$$

откуда

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} = 0,$$

что, послѣ интеграціи, даетъ:

$$\lg x + \lg z - \lg(x \cdot z) = const,$$

или окончательно:

$$xz = B^2 \dots \dots \dots (8)$$

Это тоже *равностороннія гиперболы*, но для нихъ наши оси координатъ являются асимптотами. Легко убѣдиться, что системы кривыхъ (7) и (8) ортогональны, т.-е. касательныя къ нимъ въ точкахъ ихъ пересѣченій взаимно перпендикулярны.

Значенія скоростей найдемъ по (6) изъ выражений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2Kx, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2Kz. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Такимъ образомъ полная скорость частицы  $V$  выражается черезъ:

$$V^2 = u^2 + w^2 = 4K^2(x^2 + z^2) \dots \dots \dots (10)$$

Наконецъ, для нахождения давленія въ любой точкѣ движущейся жидкости имѣемъ уравненія (1), которыя, послѣ умноженія ихъ соответственно на  $dx$ ,  $dz$ , сложения и интегрированія, дадутъ обычнымъ порядкомъ:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = const = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 \dots \dots \dots (11)$$

Какъ было сказано выше, здѣсь, вслѣдствіе установившагося движения и при наличности потенциала скоростей, значеніе постояннаго одно и то же для всѣхъ линий тока и можетъ быть опредѣлено, если известны скорость, давленіе и координата какой-нибудь одной жидкой точки.

Для болѣе яснаго представленія всего движенія, кромѣ кривыхъ вида струекъ, опредѣляемыхъ уравненіемъ (8), и кривыхъ, къ нимъ нормальныхъ (уравненіе 7), можно соединить кривыми жидкія точки, имѣющія одно и то же значеніе полной скорости; по уравненію (10) видно, что всѣ такія точки лежатъ на *окружностяхъ* съ центромъ въ началѣ координатъ.

Что касается отдѣльныхъ слагающихъ полной скорости, то по уравненіямъ (9) види, что всѣ точки, лежащая на одной вертикальной прямой (или плоскости, перпендикулярной къ оси  $x$ ), имѣютъ одну и ту же горизонтальную слагающую скорости; всѣ точки жидкости, лежащая въ одной горизонтальной плоскости, имѣютъ одинаковую для всѣхъ нихъ вертикальную слагающую скорости.

Кривыя, соединяющія жидкія точки, находящіяся подъ однимъ и тѣмъ же давленіемъ, получимъ изъ уравненія (11), внося въ него значеніе  $V$  изъ (10):

$$\frac{2K^2}{g} (x^2 + z^2) + z = \frac{p_0 - p}{\gamma} + const = P \dots \dots \dots (12)$$

Отсюда видно, что *кривыя постояннаго давленія* тоже представляются *окружностями*, центръ которыхъ лежитъ на отрицательной части оси  $z$  на разстояніи  $\frac{g}{4K^2}$  отъ начала координатъ, въ чемъ легко убѣдиться, относивъ уравненіе (12) къ системѣ координатъ  $z'Ox$ , положивъ

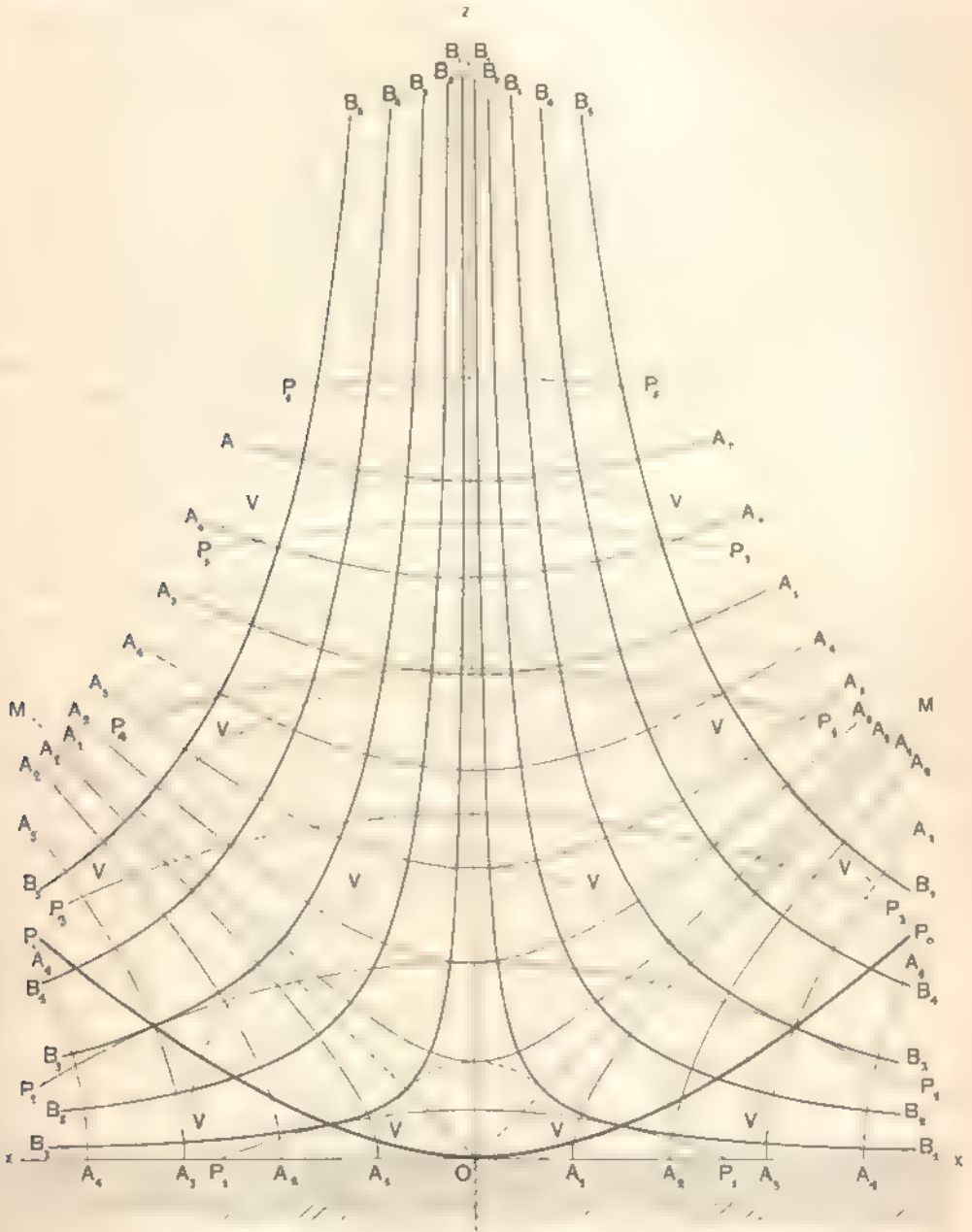
$$z' = z + \frac{g}{4K^2}.$$

Между прочимъ замѣтимъ, что постоянныя  $A$ ,  $B$ ,  $P$  являются *линейными* величинами, а постоянное  $K$  имѣетъ *минусъ первое* измѣреніе относительно времени.

На фиг. 35 это теченіе и представлено. Кривыя  $BB$  представляютъ собою линіи тока; кривыя  $AA$ —кривыя постояннаго потенциала скоростей; окружности  $VV$  (съ центромъ  $O$ ) соединяютъ точки кривыхъ тока, имѣющія одно и то же значеніе скорости. Наконецъ, окружности  $PP$  (ихъ центръ лежитъ за предѣлами чертежа) соединяютъ точки съ одною и тою же величиной гидродинамическаго давленія. Уже изъ того обстоятельства, что равностороннія гиперболы  $BB$  линіи тока въ области асимптотъ  $OM$  располагаются значительно шире и съ возрастаніемъ той или другой координаты все тѣснѣе приближаются одна къ другой, можно заключить—принимая во вниманіе, что жидкость течетъ безъ разрывовъ, что, начинаясь у оси  $z$  овь, теченіе идетъ со все убывающей скоростью, которая затѣмъ, за областью асимптотъ, начинаетъ возрастать. Дѣйствительно, каждая изъ окружностей  $VV$  застѣкаетъ на линіяхъ тока по двѣ точки, имѣющихъ, слѣдовательно, одно и то же значеніе скорости. Минимумъ скорости имѣетъ, мѣсто въ точкахъ касанія кривыхъ тока съ окружностями равныхъ скоростей; по свойству равносторонней гиперболы всѣ эти точки касанія лежатъ на асимптотахъ  $OM$ . Это обстоятельство, конечно, можетъ быть также показано отысканіемъ *минимума*  $V$  по уравненію (10).

Кривыя  $PP$  равнаго давленія также пересѣкаютъ линіи тока въ двухъ точкахъ, что указываетъ на наличность такихъ точекъ на линіяхъ тока, гдѣ давленіе имѣетъ максимальное значеніе; этими точками являются точки касанія окружностей  $P$  съ гиперболою  $B$ ;

на чертежѣ онѣ соединены общею кривою  $P_0OP_0$ . Изысканіе *титула*  $p$  по уравненіямъ (11) и (10) показываетъ, что эта кривая есть также равносторонняя гипербола, проходящая черезъ начало координатъ  $O$  и лѣвую центръ на оси  $z$ -овъ на половинѣ разстоянія между началомъ координатъ и центромъ окружностей  $PP$ .



Фиг. 35.

Наконецъ, отмѣтить, что, воображая вокругъ каждой изъ линий тока весьма малый элементъ площади  $df$ , взятый нормально къ ней, можно вычислить расходъ по каждой линіи тока изъ уравненія

$$dQ = df \cdot V.$$

а расходъ въ конечной части течения, т. е. по цѣлому пучку линий тока или, точнѣе, расходъ пучка элементарныхъ струекъ вычислится по формулѣ:

$$Q = \int df \cdot V = 2K \int \sqrt{x^2 + z^2} df,$$

гдѣ интегрирование распространяется по всей площади сѣченія, т. е. по всей поверхности постояннаго потенциала скоростей въ пределахъ разсматриваемыхъ струй. Такъ какъ геометрическая форма течения (т. е. линии тока, кривыя постояннаго потенциала скоростей кривыя постоянной скорости и т. д.) отъ  $K$  не зависитъ, то и интеграль въ выражении  $Q$  отъ  $K$  не зависитъ, но расходъ ему пропорционаленъ; это позволяетъ назвать величину  $K$  (величину именованную, какъ мы видѣли) *характеристикой расхода*: данный пучекъ струй пропуститъ больше или меньше воды лишь при условии измѣненія величины  $K$ .

Наконецъ, переходя отъ плоскаго сѣченія разсмотрѣннаго течения къ самому течению, замѣтимъ, что координатная плоскость  $zy$ , перпендикулярная къ плоскости чертежа, раздѣляетъ все течение на двѣ симметричныя части. И если допустить, что въ совершенной жидкости замѣна любой лини тока жесткимъ твердымъ тѣломъ той же формы не влечетъ за собой измѣненія течения, то такая жидкость будетъ обтекать прямой уголъ  $zOx$  именно такими струями, какъ это указано на чертежѣ, если, конечно, въ началѣ течения и въ концѣ его выполнены тѣ условія относительно величины и направленія скоростей и давленій, которыя получены нами для этого течения. Легко видѣть, что достаточно далеко отъ начала координатъ можно безъ большой ошибки считать струи параллельными осямъ координатъ, ихъ сѣченія плоскими, скорости равными, а распределеи давленій въ сѣчении гидростатическимъ.

Для нѣкоторыхъ вопросовъ, имѣющихъ приложеніе въ теоріи турбинъ (двигателей и насосовъ), удобно пользоваться уравненіями гидродинамики въ иной формѣ, именно преобразуя ихъ къ системѣ цилиндрическихъ координатъ, т. е. опредѣляя положеніе каждой точки координатой вдоль какой-нибудь оси (мы будемъ считать вдоль вертикальной оси  $z$ ), разстояніемъ  $r$  ея до этой оси и угломъ  $\theta$  поворота этого радиуса вектора отъ начальвой плоскости  $zx^*$ ). Обычными формулами перехода отъ прямоугольныхъ осей координатъ  $xy$  къ полярнымъ координатамъ  $r$  и  $\theta$  можно получить всѣ предыдущія уравненія въ требуемомъ видѣ, хотя, впрочемъ, они могутъ быть получены и непосредственно.

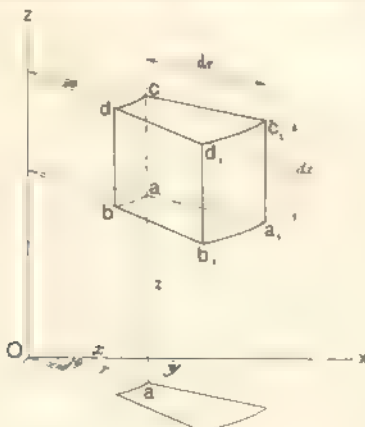
Изъ чертежа (фиг. 36) легко устанавливается связь между цилиндрическими и декартовыми координатами. Мы имѣемъ формулы перехода въ видѣ:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad z = z. \quad (13)$$

Объемъ жидкаго элемента  $ad_1$ , построеннаго при точкѣ  $a$  съ координатами  $(x, r, \theta)$ , опредѣлится его размѣрами:

$$ac = dz; \quad ad_1 = dr; \quad ab = r d\theta.$$

Будемъ называть проекціи полной скорости на направленіе, перпендикулярное къ радиусу вектору  $r_a$  точки  $a$  (я къ плоскости  $r_a z$ ) черезъ  $u_1$ ; на направленіе самого радиуса—черезъ  $v_1$ , и на направленіе оси



Фиг. 36.

\*) Эти уравненія даются во многихъ курсахъ гидродинамики. См. также особо: P. G. S. I. I. „Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshöhlenräumen“ въ Schweiz. Bauzeitung за 1903 годъ, томъ XXI, № 19, и слѣдующіе; H. Lorenz — „Neue Theorie und Berechnung der Kreisräder“, 1906 годъ; А. Мизовичъ — „Опытъ теоріи всасывающей трубы“ въ Бюллетеняхъ Политехническаго О-ва за 1907 годъ, № 1.

$z$ -овъ черезъ  $w$ ; ясно, что здѣсь только одно  $w$  не отличается, вообще, отъ того  $w$ , которое мы имѣли въ предыдущихъ обозначеніяхъ. По смыслу этихъ величинъ слѣдуетъ, что:

$$u_1 = r \frac{d\theta}{dt}; \quad v_1 = \frac{dr}{dt}; \quad w = \frac{dz}{dt} \dots \dots \dots (14)$$

Величина  $\frac{d\theta}{dt}$  есть мгновенная угловая скорость вращенія частицы около оси  $z$ -овъ.

Далѣе, проекціи скоростей по декартовымъ осямъ координатъ ( $x, y, z$ ) можно теперь выразить такъ:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = v_1 \cos \theta - u_1 \sin \theta,$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = v_1 \sin \theta + u_1 \cos \theta,$$

а входящія въ уравненія движенія проекціи полного ускоренія по осямъ координатъ представляются такъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \left( \frac{dv_1}{dt} - u_1 \frac{d\theta}{dt} \right) \cos \theta - v_1 \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{du_1}{dt} \right) \sin \theta = \\ &= \left( \frac{dv_1}{dt} - \frac{u_1^2}{r} \right) \cos \theta - \left( \frac{dv_1}{dt} + \frac{u_1 v_1}{r} \right) \sin \theta; \\ \frac{dv}{dt} &= \left( \frac{dv_1}{dt} - u_1 \frac{d\theta}{dt} \right) \sin \theta + v_1 \left( \frac{d\theta}{dt} + \frac{du_1}{dt} \right) \cos \theta \\ &= \left( \frac{dv_1}{dt} - \frac{u_1^2}{r} \right) \sin \theta + \left( \frac{dv_1}{dt} + \frac{u_1 v_1}{r} \right) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

Отсюда, между прочимъ, видно, что при полярныхъ координатахъ для нахождения полного ускоренія не достаточно брать полныя производныя скоростей  $u_1, v_1$ , по времени, но нужно принять еще во вниманіе центробѣжное ускореніе  $\frac{u_1^2}{r}$  и ускореніе  $\frac{u_1 v_1}{r}$ , такъ какъ сами направленія  $(u_1, v_1)$  не представляются постоянными.

Далѣе мы имѣемъ:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

а поэтому, имѣя въ виду (13), находимъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta;$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta.$$

Точно также:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2};$$

почему:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y \cos^2 \theta}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos^2 \theta}{r} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

Такъ какъ переменныя  $x$  и  $y$  мы замѣняемъ переменными  $r, \theta$ , то можемъ писать, принимая во вниманіе только что полученныя выраженія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \sin \theta, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Наконецъ, если вмѣсто проекцій вѣшной силы  $X, Y, Z$  внести обозначенія проекцій той же силы  $U, R, Z$ , соответственно по направленію, перпендикулярному къ радиусу ( $U$ ), по радиусу ( $R$ ) и по оси  $z$ -овъ ( $Z$ ), то связь между этими проекціями устанавливается въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} X &= R \cos \theta - U \sin \theta, \\ Y &= R \sin \theta + U \cos \theta, \\ Z &= Z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Послѣ этого первыя два Эйлера уравненія гидродинамики, принимая во вниманіе уравненія 15), 16), 17) и соответственно собирая члены могутъ быть переписаны такъ:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{dv_1}{dt} + \frac{u_1^2}{r} \right) \cos \theta &= \left( \rho \left( U - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{dv_2}{dt} - \frac{u_1 v_1}{r} \right) \sin \theta, \right. \\ \rho \left( R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{dv_1}{dt} + \frac{u_1^2}{r} \right) \sin \theta &= \left. \left( U - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{dv_2}{dt} - \frac{u_1 v_1}{r} \right) \cos \theta. \right.$$

Умножимъ первое уравненіе на  $\sin \theta$ , второе на  $\cos \theta$ , и вычтемъ второе изъ перваго; потомъ умножимъ первое уравненіе на  $\cos \theta$ , второе на  $\sin \theta$ , и сложимъ. При соединяя третья, неизмѣненное, Эйлерова уравненіе и опуская при скоростяхъ подстрочные указатели, какъ ненужные, получимъ ур-ня движенія.

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( U - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{dv_2}{dt} - \frac{u_1 v_1}{r} \right) &= \rho \left( R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{dv_1}{dt} + \frac{u_1^2}{r} \right) \sin \theta, \\ \rho \left( R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{dv_1}{dt} + \frac{u_1^2}{r} \right) \cos \theta &= \rho \left( U - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{dv_2}{dt} - \frac{u_1 v_1}{r} \right) \sin \theta, \\ \rho \left( R - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{dv_1}{dt} + \frac{u_1^2}{r} \right) \sin \theta &= \rho \left( U - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{dv_2}{dt} - \frac{u_1 v_1}{r} \right) \cos \theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

Отсюда видно, что общій составъ уравненій остается тотъ же самый; во вторыхъ частяхъ прибавляются вышеотмѣченныя центробѣжное ускореніе  $\frac{u^2}{r}$  и ускореніе  $\frac{u^2}{r}$ .

Само собою разумѣется, что и здѣсь полныя производныя  $\frac{du}{dt}, \dots$  должны быть развернуты такъ:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + r \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z};$$

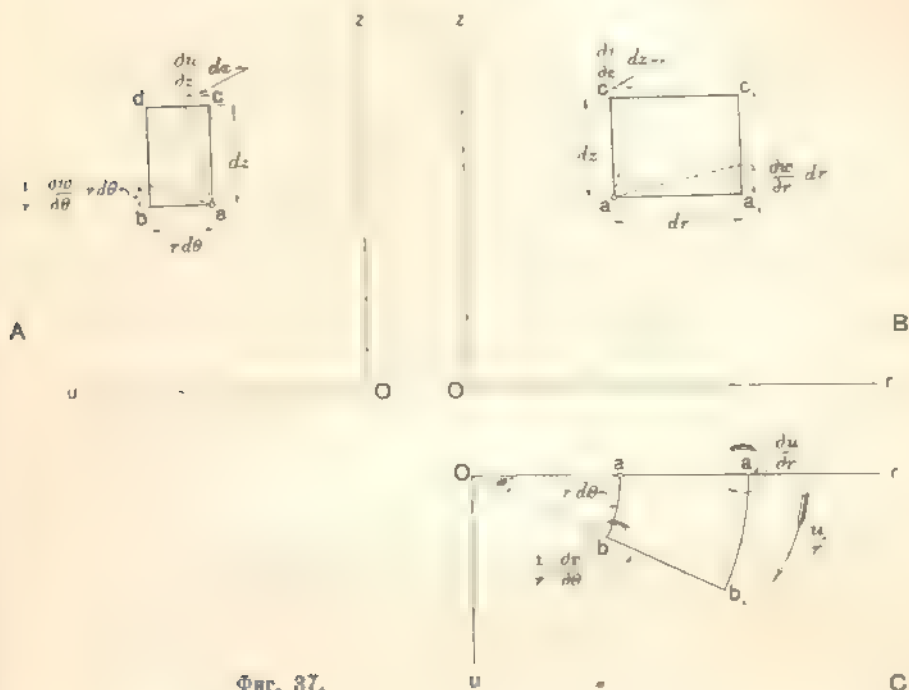
также:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \frac{\partial p}{\partial r} + w \frac{\partial p}{\partial z} \text{ и т. д.}$$

Уравненіе неразрывности можетъ быть преобразовано подобно предыдущему. Получить его можно непосредственно, подобно тому, какъ оно было получено для декартовыхъ

координат, полагая для простоты, что мы имеем дело с несжимаемой жидкостью. Прибыль массы внутри выделенного элементарного объема (см. фиг. 37), вследствие течения через грань  $ac_1a_1$  и грань  $bdd_1b_1$  можно выразить через:

$$\rho dr \cdot dz \left[ u - u + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta \right] = \rho \frac{\partial u}{\partial \theta} dr \cdot dz \cdot d\theta.$$



Фиг. 37.

Та же величина, благодаря течению в радиальном направлении, выражается через:

$$\rho r d\theta dz \left( -\rho(r + dz) d\theta dz + r \frac{\partial v}{\partial r} dr - \rho r \frac{\partial v}{\partial r} dz \right) dr dz d\theta,$$

если пренебречь бесконечно малым высшего порядка. Наконец, прибыль массы, благодаря течению вдоль оси  $z$ -овой, попрежнему остается равной:

$$-\rho r d\theta dr \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

С другой стороны, прибыль массы во всем неизменившемся объеме, при несжимаемой жидкости, очевидно, равна нулю. Поэтому, складывая эти три члена и сокращая уравнение на  $\rho r dr dz d\theta$ , получим уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial r}{\partial r} \left( 1 - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \dots \dots \dots (19)$$

Уравнения (18) и (19) и представляют то, что требовалось получить. Признаком существования установившегося движения останется, попрежнему, то, что все частные производные отдельных величин обращаются в нули. Признаком отсутствия вихревого движения или, что все равно, существования потенциала скоростей, является обращение мгновенных угловых скоростей вращения около выбранных осей координат.



Составим их выражения, пользуясь уже даннымъ въ примѣчаніи предыдущаго параграфа геометрическимъ составомъ величинъ  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . На фиг. 37 А представлена проекція цилиндрической грани  $acdb$  нашего элемента. По ней видно, что средняя угловая скорость вращения около радиуса вектора  $r$  нашей частицы есть:

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (20)$$

Скорость вращения  $\lambda$  около направления  $u$  (см. фиг. 37 В) дается формулой:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \dots \dots \dots (20)$$

Наконецъ, скорость вращения  $\nu$  около направления  $z$  получимъ (см. фиг. 37 С), принимая во вниманіе какъ относительныя перемѣщенія крайнихъ точекъ элемента, такъ и вращеніе его самого съ угловою скоростью  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ ; найдемъ такимъ путемъ:

$$\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial(ur)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right) \dots \dots \dots (20)$$

Для невихревого движенія, какъ было указано, должно быть

$$\lambda = \mu = \nu = 0,$$

что дастъ, въ свою очередь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial r} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial z^2} \\ \frac{\partial(ur)}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial r} \end{aligned} \right\} \text{если} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} = w, \\ \frac{\partial F}{\partial r} = v, \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} = ur. \end{aligned} \right. \dots \dots \dots (21)$$

Эта функція  $F$  координатъ, такъ же какъ введенная нами ранѣе функція  $\varphi$ , есть потенциалъ скоростей; отсутствіе вихри, какъ видно, вполне обуславливаетъ ее существованіе и обратно. При ея наличности уравненіе неразрывности можетъ быть написано такъ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

Потенціальная функція должна удовлетворять этому уравненію.

Примѣнимъ эти уравненія къ рассмотрѣнному установившемуся теченію, вполне симметричному относительно оси  $z$ , которую вообразимъ вертикальною; жидкость будемъ считать тяжелой и притомъ совершенной. Пусть теченіе встрѣчаетъ на своемъ пути неподвижную горизонтальную плоскость. Полная симметрия теченія относительно оси  $z$  требуетъ, чтобы мы положили скорость  $u$  и всѣ ея производныя равными нулю; также придется считать, что всѣ обстоятельства движенія для точекъ, лежащихъ на одной и той же окружности, имѣющей центръ на оси теченія и лежащей въ горизонтальной плоскости, одинаковы между собою. И здѣсь, слѣдовательно, задача изъ пространственной обра-

1) Такъ какъ  $r$  и  $z$  являются переменными, другъ отъ друга независимыми, то

$$r \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(ur)}{\partial z}$$

дается въ задачу на плоскости. Разница отъ предыдущаго случая заключается въ томъ, что тамъ изученное плоское течение повторяется въ параллельныхъ плоскостяхъ; здѣсь же оно повторяется въ радиальныхъ плоскостяхъ, каждая изъ которыхъ является меридиональнымъ сѣченіемъ течения. Итакъ, мы должны положить:

$$u = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad \frac{d\theta}{dt} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 0, \\ \frac{dv}{dt} &= v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} &= v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Изъ трехъ уравненій (18) останутся, такимъ образомъ, два послѣднія:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \\ -\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \dots \dots \dots (23)$$

Уравнение неразрывности будетъ имѣть видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

Наконецъ, угловые скорости  $u$  и  $v$  тождественно обращаются въ нуль (ур-ня 20' и 20''), такъ что, для того, чтобы не было вихря, необходимо имѣть:

$$2v - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Этому условию удовлетворяетъ функция

$$F = 2Kz^2 - Kr^2,$$

гдѣ

$$K = const \dots \dots \dots (25)$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\begin{cases} v \frac{\partial F}{\partial r} = -2Kr; & \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} = 0; & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = -2K, \\ u \frac{\partial F}{\partial z} = 4Kr; & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial r} = 0; & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 4K. \end{cases} \dots \dots \dots (26)$$

Поэтому уравнение неразрывности (24) или соответственно упрощенное уравненіе (22) дадутъ:

$$4K - 2K - 2K = 0.$$

Разсуждая совершенно аналогично съ предыдущимъ, найдемъ, что кривыя постояннаго потенциала скоростей опредѣляются уравненіемъ:

$$2Kz^2 - Kr^2 = A^2 \dots \dots \dots (27)$$



затѣмъ

$$2 \lg r + \lg z = const,$$

и окончательно:

$$r^2 z = B^3 \dots \dots \dots (28)$$

Это уравнение показываетъ, что если вообразить не плоское только сѣчене нашего течения, а все течение, и въ немъ выделить поверхность вращения, описанную какой-нибудь одной линией тока, то эта поверхность обладаетъ тѣмъ свойствомъ что объемы цилиндровъ, измѣющихся въ качествѣ своихъ радиусовъ и высотъ координаты любой точки этой кривой тока, остаются между собою равными (въ ранѣе разсмотрѣнномъ теченіи тоже можетъ быть сказано про объемы призмъ, подлежаще построенныхъ, или про площади прямоугольниковъ въ плоскомъ сѣченіи теченія).

По уравненію (28) ясно также, что ось  $z$ , а также всѣ оси  $r$  во всѣхъ меридиональныхъ плоскостяхъ являются асимптотами для кривыхъ тока (см. кривая 88).

Полная скорость  $V$  найдется по уравненіямъ (26):

$$V^2 = 4 K^2 r^2 + 16 K^2 z^2 \dots \dots \dots (29)$$

Слѣдовательно, кривыя постоянной полной скорости суть эллипсы, отнесенные къ главнымъ осямъ, ихъ полуоси относятся, какъ 2:1, болѣе короткая ось совпадаетъ съ осью  $z$ -овъ (кривая 89).

Эти кривыя пересекаютъ линіи тока въ двухъ точкахъ; слѣдовательно, точки касанія этихъ двухъ кривыхъ даютъ точки на линіяхъ тока, гдѣ вода на нихъ имѣетъ минимальную скорость. Геометрическое мѣсто точекъ минимума скорости вадетъ такъ.

Изъ уравненій (29) и (28) имѣемъ:

$$V = \sqrt{4 K^2 B^3 + 16 K^2 z^2},$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2 K \frac{8z - \frac{B^3}{z^2}}{\sqrt{B^3 + 4z^2}} = 0;$$

отсюда:

$$8z_0 - \frac{B^3}{z_0^2} = 0.$$

такъ что:

$$z_0 = 0,5 B$$

и по (28)

$$r_0 = \sqrt{2} B.$$

Поэтому

$$\frac{z_0}{r_0} = const,$$

а слѣдовательно, точки всѣхъ лавій тока, имѣющія наименьшую скорость, лежатъ на одной прямой, образующей съ осью  $r$  уголъ, тангенсъ котораго  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ . (См. прямая *OM*.)

Наконецъ, уравненія (23) послѣ обычнаго интегрированія дадутъ:

$$g dz - \frac{1}{\rho} dp = d \frac{w^2}{2} + d \frac{v^2}{2}$$

или

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = const \dots \dots \dots (30)$$

другими словами, обычное уравнение Д. Бернулли, как оно, конечно, и должно быть установлено установившагося течения.

Кривая, соединяющая точки постоянного давления, получим из этого уравнения совмещая его съ (29). Ясно, что это тоже эллипсы, но центры их уже не совпадают съ началом координатъ, а лежатъ ниже его на оси  $z$  на величину  $-\frac{g}{16K^2}$ , что заключаемъ по уравненію:

$$z + \frac{v^2}{4} = \frac{4K^2r^2 + 16K^2z^2}{2g} = const$$

или

$$z^2 + \frac{r^2}{4} + \frac{2g}{16K^2}z = -\frac{g}{16K^2} = const. \text{ (См. кривая } PP')$$

Наконецъ, внося въ первое изъ этихъ уравненій уравненіе кривыхъ тока и отыскивая геометрическое мѣсто точекъ  $(z_1, r_1)$  съ наибольшимъ давлениемъ, найдемъ.

$$\frac{p}{\rho} = const - z - \frac{4K^2r^2 + 16K^2z^2}{2g};$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{2g}{16K^2} \left[ const - \frac{2g}{16K^2}z + \frac{B^2}{4z} + z^2 \right];$$

$$\frac{2g}{16K^2} - \frac{B^2}{4z_1^2} - 2z_1 = 0;$$

$$\frac{2g}{16K^2} - \frac{r_1^2}{4z_1} + 2z_1 = 0$$

или

$$z_1^2 - \frac{r_1^2}{8} - \frac{g}{16K^2}z_1 = 0.$$

Это есть гипербола, отнесенная къ вершинѣ и дѣйствительной оси (ибо при  $z_1 = 0$  имѣемъ  $r_1 = 0$ ). Ея центръ лежитъ ниже начала координатъ на величину  $\left(-\frac{g}{32K^2}\right)$ , т.-е. вдвое ближе центра эллипсовъ равнаго давления, въ чемъ легко убѣдиться соотвѣтствующимъ преобразованиемъ этого уравненія. (Смотри кривую  $P_0P_0$ .) Ось  $z$  совпадаетъ съ дѣйствительной осью этой гиперболы. Асимптоты этой гиперболы параллельны прямой наименьшей скорости.

Въ этомъ теченіи, какъ и въ предыдущемъ, расхоль, проходящій по весьма тонкой струйкѣ, воображенной вокругъ каждой линии тока, зависитъ только отъ значенія постоянного  $K$  въ потенциальной функціи скоростей. Размѣры величинъ  $A, B, K$  остаются тѣ же самыя, что и въ предыдущемъ случаѣ.—Наконецъ, если допустить, что замѣна любой линии тока жесткой витію не вліяетъ на течене окружающей совершенной жидкости, то помощью этого теченія можно построить расширяющуюся трубу, какъ тѣло вращения, и ожидать, что по ней течене будетъ происходить согласно изученному, если, конечно, условия скоростей и давленій, какъ въ началѣ, такъ и въ концѣ трубы, будутъ выполнены тѣ самыя, которыя требуются въ этомъ теченіи. Легко видѣть, что при достаточно большомъ  $c$  скорости очень близки къ параллельности и равенству, а законъ распределенія давленій—къ гидростатическому.

Остановимся еще на случаѣ чистаго вращенія тяжелой жидкости,— конечно, совершенной,—около вертикальной оси. Будемъ также считать движене установившимся. Въ этомъ случаѣ мы должны положить  $c = w = 0$ , а также считать нулями всѣ пль производныя. Уравненіе (19) показываетъ тогда, что скорость  $u$  не зависитъ отъ координаты  $\theta$ , т.-е. что по каждой окружности, плоскость которой перпендикулярна къ оси  $z$ , а центръ лежитъ на этой оси, — другими словами, во всѣхъ точкахъ

параллельнаго круга,—скорость  $u$  постоянна. Условія существованія потенциала скоростей дадутъ:

$$\mu = 0 = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$v = 0 = \frac{1}{2r} \frac{\partial(ur)}{\partial r}.$$

Первое изъ нихъ показываетъ, что вышесказанное относительно величины  $u$  справедливо не только для параллельнаго круга, но и для поверхности цилиндра, на каждомъ такомъ кругѣ построеннаго. Второе уравненіе даетъ послѣ интегрированія:

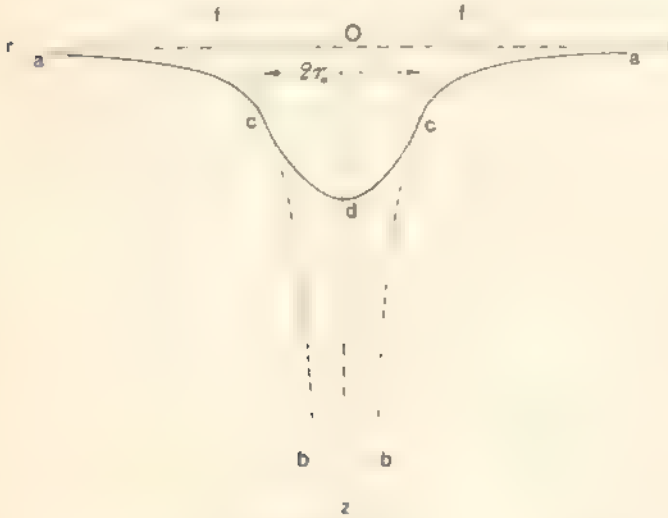
$$ur = \omega r^2 + N = const \dots \dots \dots (31)$$

т. е. что угловая скорость вращенія  $\omega$  частицъ каждой такой цилиндрической поверхности обратно пропорциональна квадрату ея радиуса. Ясно, что на оси угловая скорость достигаетъ при этомъ бесконечности, такъ что слагающая вихря  $r$  на оси не обращается въ нуль. Слѣдовательно, для этихъ точекъ жидкости потенциала скорости уже нѣтъ: — вращенія представляетъ то, что называется вихревыми шнурами.

Уравненія (18) дадутъ въ нашемъ случаѣ:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{u^2}{r},$$

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$



Фиг. 39.

Умножая первое изъ этихъ уравненій на  $dr$ , второе на  $dz$  и складывая, получаемъ:

$$-g dz - \frac{1}{\rho} dp \pm \frac{u^2}{r} dr = 0.$$

Принимая во вниманіе уравненіе (31), находимъ:

$$-g dz - \frac{1}{\rho} dp \pm \frac{N^2}{r^2} dr = 0.$$

Интеграція его дасть:

$$-gz - \frac{p}{\rho} - \frac{N^2}{2r^2} = \text{const} \dots \dots \dots$$

или

$$z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} = \text{const} \dots \dots \dots$$

Опять таки законъ распреѣленія давленій въ такой жидкости дается уравненіемъ Д. Бернулли. Изъ него видно, что на оси вращения, гдѣ по (31)  $u = \infty$ , давленіе дойдетъ тоже до безконечности, но отрицательной, т.-е. жидкость разорвется, и на оси ея не будетъ. На свободной поверхности нужно считать давленіе постояннымъ; поэтому если въ уравненіи (32') положить  $p = \text{const}$ , то оно дасть кривую меридиональнаго сѣченія свободной поверхности; изъ него видно, что ось вращения представляется асимптотой этой кривой, т.-е. что поверхность такой жидкости будетъ представлять чистую форму воронки (см. кривую *acb* на фиг. 39).

Допустимъ, что такъ или иначе мы принудимъ нѣкоторую часть жидкости, заключенную въ цилиндръ небольшого радіуса  $r_0$ , вращаться съ постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . Тогда внутри этого цилиндра мы получимъ для свободной поверхности форму парабола вращения *scsf*, какъ мы это видѣли въ гидростатикѣ, а для прочей части свободная поверхность опредѣлится уравненіемъ (32'), при чемъ обѣ поверхности между собою соприкасаются на окружности *se* радіуса  $r$ . Считая, что ось  $z$ -овъ направлена внизъ, получимъ, очевидно, что уравненіе для внутренней части свободной поверхности есть:

$$z = \frac{p_0}{\rho} + \frac{\omega_0^2 r^2}{2g} = C_1.$$

Для прочей части свободной поверхности уравненіе (32') дасть:

$$z = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\omega_0^2 r_0^2}{2gr^2} = C_2.$$

Приѣмая послѣднее уравненіе къ безконечно удаленнымъ отъ оси вращения точкамъ свободной поверхности и считая, что горизонтальная плоскость начала координатъ является асимптотической для этой поверхности, мы должны положить  $z = 0$  и  $r = \infty$ ; слѣдовательно:

$$C_2 = -\frac{p_0}{\rho}.$$

Вычитаніе предыдущихъ уравненій, приѣненныхъ къ ихъ общему радіусу  $r_0$ , дасть:

$$C_1 - C_2 = \frac{\omega_0^2 r_0^2}{g}.$$

Поэтому:

$$C_1 = \frac{\omega_0^2 r_0^2}{g} - \frac{p_0}{\rho}.$$

Итакъ, внутренняя часть воронки въ этомъ предположеніи опредѣляется уравненіемъ:

$$z = \frac{\omega_0^2}{2g} (2r_0^2 - r^2),$$

а наружная:

$$z = \frac{\omega_0^2 r_0^4}{2g r^2}.$$

Такое принужденное вращение можно получить, вращая въ цилиндрическомъ сосудѣ твердый цилиндрический стержень радиуса  $r_0$ , проходящий через дно и почти достигающий свободной поверхности: при достаточно быстромъ и долгомъ его вращении вся жидкость начинаетъ вращаться, обнаруживая на свободной поверхности воронку. Фиг. 39 построена въ предположеніи  $2r_0 = 20 \text{ мм.}$   $n = 424$  въ минуту, такъ что при вычисленияхъ въ сантиметрахъ  $\frac{\omega_0^2}{2g} = 1$ .

Этимъ закончимъ этотъ краткій свѣдѣній по гидродинамикѣ, отсылая интересующихся къ курсамъ:

Н. Е. Жуковский. Кинематика жидкого тѣла. Москва, 1876.

Н. Е. Жуковский. Лекціи по гидродинамикѣ.

H. Lamb. Hydrodynamics. 1906 г. Есть хорошая нѣмецки переводъ S. Friederich по названіемъ Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig und Berlin, 1907 г.

W. Wien. Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig, 1900.

Гораздо проще по изложенію, но менѣе обширно разработано:

P. Appell. Traite de mecanique rationnelle. T. 3. Equilibre et mouvements des milieux continus. Paris, 1903

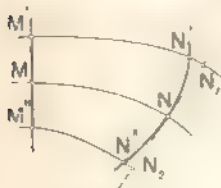
Самыя основныя понятія въ ясномъ изложеніи можно найти въ сочиненіи:

H. Bouasse. Cours de physique. Première partie: Mécanique, Physique.

См. также указанныя выше въ текстѣ источники.

## § 8. Теорема Д. Бернулли для совершенныхъ и для дѣйствительныхъ жидкостей.

Такъ какъ въ дѣйствительности приходится имѣть дѣло не съ безконечно тонкими струйками, какими представляются линіи тока, а со струями конечныхъ поперечныхъ размѣровъ, то весьма важно распространить уравнение (9) предыдущаго параграфа и на эти случаи. Это будетъ возможно тогда, когда мы сдѣлаемъ еще одно новое предположеніе относительно характера движенія, а именно, — изъ всѣхъ видовъ установившагося движенія неразрывной совершенной жидкости мы будемъ разсматривать только одинъ, — *движеніе съ сохраненіемъ плоскаго вида стѣнней струи*, разумѣя подъ стѣннею струи поверхность, проведенную въ жидкости такъ, что скорость каждой точки, лежащей на этой поверхности, къ ней нормальна; понятно, что стѣненіе должно быть перпендикулярно къ поверхностямъ стѣнокъ, ограничивающихъ струю, такъ какъ скорости жидкости касательны къ поверхностямъ стѣнокъ. Характеръ такого движенія можно пояснить такъ.



Фиг. 40.

Вообразимъ какую-нибудь линію тока  $MM$  въ установившемся движеніи (фиг. 40); въ произвольной ея точкѣ  $M$  проведемъ плоскость, нормальную къ ней, и въ этой плоскости начертимъ какой-нибудь контуръ, ограничивающій безконечно малую площадь  $df$ . Внутри этого контура мы застаемъ въ данный моментъ рядъ частицъ  $M', M''$ ..., скорости которыхъ могутъ отличаться отъ скорости  $V$  точки  $M$  только на безконечно малую величину, какъ скорости безконечно близкихъ точекъ, такъ что ихъ можно обозначить вообще черезъ  $(V + dV)$ , гдѣ  $dV$  можетъ быть и положительно, и отрицательно. Что касается направленія этихъ скоростей, то онѣ, вообще, могутъ быть не параллельны скорости частицы  $M$ , но во всякомъ случаѣ уголъ



между ними можетъ быть только бесконечно малымъ, такъ что для простоты разсуждений вполнѣ возможно допустить, что въ начальный моментъ эти скорости между собою параллельны. Итакъ, плоскій элементъ  $M'M''$  представляетъ собою сѣченіе струйки, и скорости всѣхъ точекъ этого сѣченія перпендикулярны къ его плоскости.

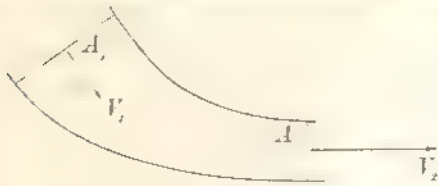
Черезъ бесконечно малый промежутокъ времени  $dt$  частица  $M$  пройдетъ путь  $MM_1 = V dt$ ; частицы  $M', M''$  и т. д., пройдя за то же время пути  $M'_1M'_1, M''_1M''_1, \dots$  длины коихъ можно, вообще, представить въ видѣ  $(V + dV) dt$ , расположатся на нѣкоторой поверхности, очевидно, касательной въ  $M$  къ плоскости, которая проведена въ  $M$  нормально къ скорости этой точки. Очевидно, что отрѣзки линий тока  $M_1M'_1, M'_1M''_1, \dots$  между касательной плоскостью  $M$  и поверхностью  $M_1M'_1M''_1, \dots$  представляются бесконечно малыми высшего порядка ( $dV dt$ ) по сравненію съ путемъ  $MM_1 = V dt$ , такъ что мы въ правѣ ими пренебречь и считать, что всѣ точки сѣченія  $M'M''$  попали въ плоское сѣченіе  $M$  одновременно съ точкой  $M$ ; отсюда, съ точностью до бесконечно-малыхъ перваго порядка, можно заключить, что, если въ начальный моментъ скорости въ какомъ-нибудь сѣченіи элементарной струйки были параллельны между собою, то и въ слѣдующій моментъ скорости частицъ, занимающихъ сѣченіе, этому моменту соответствующее, остаются параллельными между собою, — сѣченіе остается плоскимъ, хотя, можетъ быть, и не параллельнымъ первому.

Понятно, что къ струѣ конечныхъ поперечныхъ размѣровъ это разсужденіе вообще не примѣнимо, такъ какъ скорости отдѣльныхъ точекъ сѣченія такой струи могутъ отличаться другъ отъ друга уже на конечную величину  $\Delta V$ , и бесконечно малые пути  $MM_1, M'_1M''_1, \dots$  могутъ различаться между собою на величины  $\int V dt$  того же порядка, что и путь  $MM_1 = V dt$ , такъ что этими разностями пренебрегать уже будетъ невозможно: сѣченіе, бывшее первоначально плоскимъ, въ слѣдующій моментъ можетъ оказаться ограниченнымъ какою-либо кривою поверхностью.

Если же движеніе таково, что отдѣльныя точки первоначальнаго сѣченія оживлены скоростями не только параллельными, но и равными, то, конечно, и въ слѣдующій моментъ сѣченіе конечныхъ размѣровъ сохранить свой видъ, т. е. останется плоскимъ, и, конечно, будетъ параллельно первому. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать именно такое движеніе, называя его движеніемъ съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій; иногда это ограниченіе разбираемыхъ видовъ движенія называютъ *условіемъ параллельности слоевъ* или *параллельности струекъ*, что понятно изъ предыдущихъ замѣчаній.

При соблюденіи этого условія очень просто выражается условіе неразрывности жидкости. Если мы имѣемъ струю жидкости, движущейся установившимся движеніемъ, то, прежде всего, количество жидкости (масса ея, а если считать ускореніе тяжести постояннымъ, то и вѣсъ ея), проходящей черезъ данное сѣченіе, съ теченіемъ времени не мѣняется, въ силу того, что движеніе установившееся; въ то же время оно неизмѣнно для всѣхъ сѣченій вслѣдствіе неразрывности, такъ какъ сколько жидкости входитъ въ данный объемъ пространства, столько же должно изъ него и выходить. Если струя (фиг. 41) въ одномъ мѣстѣ имѣетъ сѣченіе  $A_1$  и ско-

рость  $V_1$ , то въ единицу времени через это сѣченіе протечетъ  $A_1 V_1 \gamma_1 / g$  жидкости, гдѣ  $\gamma_1$  вѣсъ единицы объема. Если въ другомъ сѣченіи, съ площадью  $A_2$ , скорость каждой точки есть  $V_2$ , то, при вѣсѣ единицы объема  $\gamma_2$ , черезъ это сѣченіе за то же время пройдетъ  $A_2 V_2 \gamma_2$  kgr. Условіе неразрывности выражается здѣсь, такимъ образомъ, уравненіемъ:



Фиг. 41.

$$A_1 V_1 \gamma_1 = A_2 V_2 \gamma_2 \dots \dots \dots (12)$$

Если остановиться на разсмотрѣніи капельныхъ жидкостей, то, въ силу ихъ несжимаемости, имѣемъ  $\gamma_1 = \gamma_2$ , а слѣдовательно, уравненіе неразрывности можно писать уже не между массами или вѣсами, а просто между объемами протекающей жидкости.—ур-е (12) обращается въ этомъ случаѣ въ уравненіе расхода:

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = const. \dots \dots \dots (13)$$

Понятно, что если бы въ отдѣльныхъ точкахъ сѣченія скорости были разныя, то и условіе неразрывности нужно было бы написать въ общемъ случаѣ въ видѣ:

$$\Sigma(V_1 \gamma_1 \cdot \Delta A_1) = \Sigma(V_2 \gamma_2 \cdot \Delta A_2),$$

гдѣ  $V$  и  $\gamma$  съ соответствующими значками представляютъ скорость и вѣсъ единицы объема въ каждомъ элементѣ сѣченія. Для капельной жидкости и тутъ  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Слѣдовательно, чтобы получить количество протекающей жидкости, при отсутствіи параллельности струй, нужно знать, какъ измѣняются скорости въ разныхъ точкахъ сѣченій. тогда какъ при сохраненіи плоскаго вида сѣченій достаточно знать только площадь сѣченія и скорость какой-нибудь одной его точки.

Кромѣ того, при такомъ движеніи законъ распредѣленія гидродинамическаго давленія въ разныхъ точкахъ сѣченія становится вполне определеннымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, говоря о сѣченіи струи, т.-е. о поверхности постояннаго потенциала скоростей, мы говоримъ о невихревомъ движеніи. А въ такомъ движеніи, и вдобавокъ установившемся, какъ было показано въ предыдущемъ параграфѣ, величина гидродинамическаго давленія въ разныхъ точкахъ пространства, занятаго теченіемъ, измѣняется, вообще, съ положеніемъ частицы въ пространствѣ и вмѣстѣ со скоростью ея перемѣщенія. Если же скорости ряда точекъ между собою равны, что мы и имѣемъ для вѣсѣхъ точекъ одного и того же сѣченія при разсматриваемомъ движеніи, то давленія въ нихъ отличаются другъ отъ друга только въ зависимости отъ ихъ относительнаго положенія, совершенно подобно тому, какъ это мы имѣли въ гидростатикѣ.

Къ тому же выводу мы придемъ, написавъ дифференціальныя уравненія движенія применительно къ данному случаю. Пусть мы имѣемъ сѣченіе струи, движущейся въ установившемся движеніи съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій. Оси координатъ расположимъ такъ, чтобы оси  $x$  и  $z$  лежали въ плоскости сѣченія, а ось  $y$  была параллельна направлению скоростей въ этомъ сѣченіи. Применяя къ этому случаю уравненія (6) предыдущаго § мы должны въ нихъ положить:

$$u = 0; \quad v = 1; \quad w = 0;$$

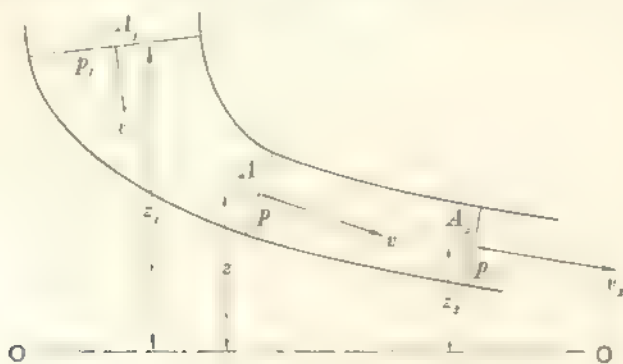
мы должны считать, что и всѣ производныя скоростей  $u$  и  $w$  также равны нулю, такъ какъ, по условію движенія, искривленія траекторій нѣтъ. Такимъ образомъ, получимъ ур-ія:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= V \frac{\partial V}{\partial y}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Такъ какъ теперь насъ интересуетъ вопросъ объ измѣненіи гидродинамическихъ давленій только въ предѣлахъ даннаго сѣченія, т.-е. по оси  $x$  и  $z$ , то умножаемъ первое уравненіе на  $dx$  третье—на  $dz$  и складываемъ получаемъ:

$$X dx + Z dz = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right).$$

Въ этомъ уравненіи не трудно усмотрѣть ур-іе гидростатики (см. ур. (2) стр. 78), а потому, пока мы не выходимъ изъ предѣловъ сѣченія, мы въ правѣ применять къ нему всѣ положенія о гидростатическомъ давленіи; напр., можемъ утверждать, что давленіе въ одной его точкѣ превы-



Фиг. 42.

шаетъ давленіе въ другой на величину вѣса столба жидкости съ основаніемъ, равнымъ единицѣ, и высотой, равною вертикальному разстоянію

между ними и т. п. Это свойство весьма важно, и впоследствии намъ придется имъ воспользоваться. Во избѣжаніе недоразумѣній отмѣтимъ, что при параллельности струй гидродинамическое давленіе въ каждомъ сѣченіи распределяется, какъ гидростатическое, но это не значитъ, что оно равно гидростатическому давленію.

Пусть дана струя (фиг. 42): движеніе ея—установившееся; параллельность слоевъ соблюдается. Строго говоря, какъ это видно изъ предыдущихъ разсужденій, условіе параллельности можетъ быть вполнѣ соблюдено только въ призматической струѣ; но если струя искривлена такъ, что уголъ между двумя близкими ея сѣченіями не великъ, а площади сѣченій измѣняются тоже только постепенно, то, съ достаточной для практики точностью, можно допустить, что скорости въ каждомъ сѣченіи между собою равны и параллельны. Вертикальныя разстоянія центровъ тяжести сѣченій  $A_1$  и  $A_2$  надъ нѣкоторымъ принятымъ горизонтомъ  $00$  назовемъ черезъ  $z_1$  и  $z_2$ , скорости въ этихъ сѣченіяхъ—соотвѣтственно черезъ  $v_1$  и  $v_2$ , а давленія въ центрахъ тяжести ихъ—черезъ  $p_1$  и  $p_2$ . Ограничимся случаемъ капельной жидкости, условіе неразрывности которой уже получено нами выше въ видѣ уравненія (13). Примѣнимъ къ этому случаю теорему живыхъ силъ.

Пусть жидкость протекаетъ черезъ сѣченіе  $A_1$  со скоростью  $v_1$ , а черезъ сѣченіе  $A_2$  со скоростью  $v_2$ . Очевидно, что черезъ  $A_1$  въ единицу времени пройдетъ масса жидкости

$$\frac{A_1 v_1 \gamma}{g} = \frac{Q\gamma}{g};$$

эта же масса, также въ единицу времени, пройдетъ черезъ нѣкоторое время черезъ сѣченіе  $A_2$  со скоростью  $v_2$ . Ясно, что на пути  $A_1 A_2$  эта масса приобрѣтетъ запасъ живой силы, равный

$$\frac{Q\gamma}{g} \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right),$$

что на каждый  $kg\gamma$  вѣса жидкости дастъ запасъ живой силы въ количествѣ

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \dots \dots \dots (A)$$

Подсчитаемъ, на что этотъ запасъ уходитъ. Прежде всего, при этомъ перемѣщеніи центръ тяжести массы опустился съ высоты  $z_1$  до высоты  $z_2$ ; слѣдовательно, каждый килограммъ жидкой массы совершилъ работу

$$z_1 - z_2 \dots \dots \dots (B)$$

это будетъ первая часть траты запаса (A).

Затѣмъ, въ центрѣ тяжести сѣченія  $A_1$  отъ окружающей массы имѣется гидродинамическое давленіе  $p_1$ , направленное по движенію струи; такъ какъ давленіе въ такомъ сѣченіи распределено гидростатически, то на всю

площадь  $A_1$  приходится сила  $p_1 A_1$ ; точно также на сѣченіе  $A_2$  дѣйствуетъ сила  $p_2 A_2$ , направленная противъ движенія жидкости. Первая сила развиваетъ въ единицу времени положительную работу  $p_1 A_1 v_1$ , вторая развиваетъ отрицательную работу  $(- p_2 A_2 v_2)$ . Относя оба запаса работы къ одному  $kgr$  протекающей жидкости, т.-е. дѣля выраженія ихъ,—первое на  $\gamma A_1 v_1$ , а второе, что то же, на  $\gamma A_2 v_2$ , получимъ работу первой силы  $\left( + \frac{p_1}{\gamma} \right)$  и вторую  $\left( - \frac{p_2}{\gamma} \right)$ . Замѣтимъ, что, проходя отъ сѣченія  $A_1$  до какого-нибудь сѣченія  $A$  масса жидкости воспринимаетъ работу первой силы и преодолеваетъ работу второй; въ слѣдующую единицу времени она уже будетъ подѣ положительнымъ вліяніемъ того же давления, которое было отрицательно въ предшествовавшій моментъ, и т. д.—все промежуточные гидродинамическія давленія, при суммированіи ихъ работъ на всемъ пути отъ  $A_1$  до  $A_2$ , войдутъ попеременно съ положительными и отрицательными знаками при одинаковой каждый разъ абсолютной величинѣ, такъ какъ движеніе предположено установившимся. Слѣдовательно, при этомъ суммированіи работы всехъ промежуточныхъ давленій сократятся, и у насъ останутся только положительная работа начальнаго и отрицательная конечнаго давленій; сумма ихъ, равная на каждый  $kgr$  жидкости

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \dots \dots \dots (C)$$

и будетъ представлять собою работу гидродинамическихъ давленій, на развитіе которой уходитъ слѣдующая часть запаса (A).

Легко видѣть, что этими двумя тратами (B) и (C) весь запасъ (A) будетъ исчерпанъ, такъ какъ на преодоленіе давленій на боковыя поверхности струи работы не требуется, ибо они нормальны къ перемѣщенію; кромѣ того, жидкость предположена совершенной, такъ что работы внутреннихъ сопротивленій, за ихъ отсутствіемъ, не будетъ.

Принимая все это во вниманіе, можемъ на основаніи теоремы живыхъ силъ написать:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \dots \dots \dots (14)$$

Это уравненіе, данное Даниломъ Бернулли, тождественно съ уравненіемъ (9) предыдущаго параграфа. Выбѣ съ уравненіемъ расхода (13) оно вполне рѣшаетъ вопросъ объ *установившемся движеніи совершенной жидкости подѣ дѣйствіемъ тяжести, при условіи, что сѣченія струи сохраняютъ свой плоскій видъ.*

Въ виду того, что выборъ сѣченій  $A_1$  и  $A_2$  произволенъ, мы можемъ уравненіе Д. Бернулли переписать вообще такъ:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = const = C \dots (15)$$

Отсюда слѣдуетъ: *сумма такъ построенныхъ трехъ членовъ для каждаго сѣченія есть величина постоянная для всей струи.* Такъ какъ каждый изъ членовъ представляетъ работу 1 *hgr* жидкости, то постоянную *C* можно рассматривать, какъ запасъ энергіи въ каждомъ *hgr* жидкости, гдѣ бы эта жидкость ни находилась, общій запасъ энергіи ея не измѣняется, хотя онъ и составляется изъ суммы трехъ переменныхъ величинъ.

Разсматривая составъ членовъ ур-ія (15), видимъ, что членъ  $\frac{v^2}{2g}$  характеризуетъ собою запасъ живой силы или такъ называемой кинетической энергіи. Сумма двухъ другихъ членовъ,  $\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)$ , представляетъ собою запасъ потенциальной энергіи, при чемъ *z* представляетъ вліяніе положенія массы въ пространствѣ, а членъ  $\frac{p}{\gamma}$  — вліяніе положенія относительно окружающей среды. Абсолютная величина *C* остается неопредѣленной, такъ какъ выборъ положенія плоскости сравненія *00* произволенъ. Но это не можетъ вліять на опредѣленность рѣшенія разныхъ вопросовъ, такъ какъ пользоваться этимъ уравненіемъ приходится примѣняя его всегда къ двумъ сѣченіямъ, для одного изъ которыхъ обстоятельства движенія извѣстны.

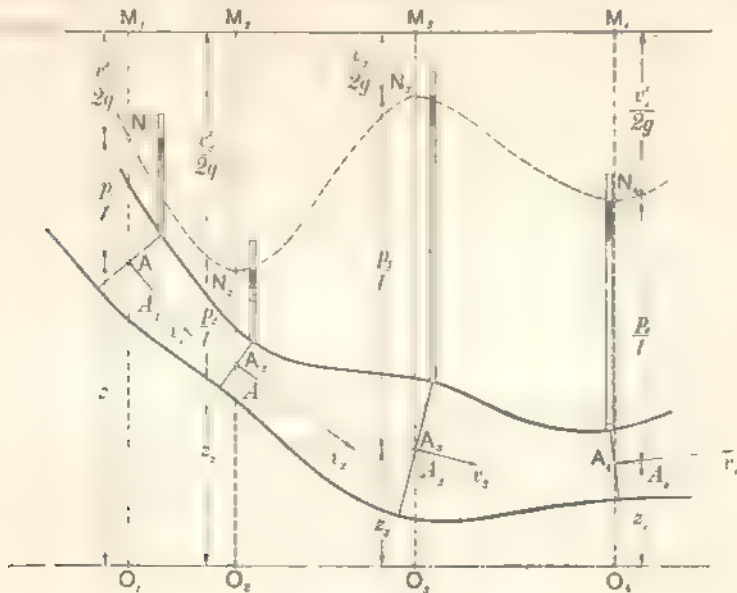
Въ силу однородности уравненій механики можно заранѣе утверждать, что членъ  $\frac{r^2}{2g}$ , подобно остальнымъ членамъ *z* и  $\frac{p}{\gamma}$ , представляетъ собою также нѣкоторую высоту. И на самомъ дѣлѣ, скорость *r* измѣряется въ  $\frac{mtr}{sec}$ , ускореніе *g* измѣряется въ  $\frac{mtr}{sec^2}$ ; слѣдовательно, членъ  $\frac{v^2}{2g}$  измѣряется въ  $\frac{mtr^2}{sec^2} : \frac{mtr}{sec^2} = mtr$ . Въ виду этого этотъ членъ называютъ *высотой, соответствующей скорости, или скоростнымъ напоромъ.*

Съ этой, геометрической, точки зрѣнія уравненіе (15) показываетъ, что сумма трехъ высотъ: нивеллярной *z*, пьезометрической  $\frac{p}{\gamma}$  и скоростного напора  $\frac{v^2}{2g}$ , есть величина, постоянная для всѣхъ сѣченій струи. Поэтому, если на линіяхъ *O, M<sub>1</sub>, O, M<sub>2</sub>, ...* (фиг. 43), проведенныхъ вертикально черезъ центры тяжести сѣченій *A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ...*, отложимъ отрѣзки  $A_1M_1 = \frac{p_1}{\gamma}$ ,  $A_2M_2 = \frac{p_2}{\gamma}$ , ..., а затѣмъ, далѣе вверхъ отрѣзки  $M_1M'_1 = \frac{v_1^2}{2g}$ ,  $M_2M'_2 = \frac{v_2^2}{2g}$ , ..., то точки *M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>, ...* окажутся лежащими на одной горизонтальной прямой, или, — въ пространствѣ, — въ одной горизонтальной *плоскости напора.* Собственно *напоромъ* называютъ обыкновенно разность запасовъ потенциальной энергіи, т.е. разность высотъ

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right).$$

Пьезометрическую высоту легко получить въ дѣйствительности, если въ стѣнкѣ сосуда, въ которомъ движется жидкость, сдѣлать отверстіе и вставить въ него открытую съ обѣихъ концовъ трубку, называемую *пьезо-*

летромъ. Вообразимъ, что верхній ея конецъ достигаетъ безвоздушнаго пространства, такъ что внѣшнее давленіе на этомъ концѣ равно нулю; очевидно, что вода въ ней будетъ подниматься до тѣхъ поръ, пока въ



Фиг. 43.

поднявшейся колонны не уравновѣситъ собою давленія жидкости на стѣнкѣ трубы у основанія пьезометра, — иными словами, она поднимется на высоту  $\frac{p}{\gamma}$ . Замѣтимъ, что если  $p$  есть давленіе не у стѣнки, а въ центрѣ тяжести сѣченія, къ которому принадлежитъ мѣсто установки пьезометра, то высоту  $\frac{p}{\gamma}$  нужно искать отъ уровня воды въ пьезометрѣ не до стѣнки, а до центра тяжести сѣченія, что и показано на (фиг. 43 \*).

\* (Само собою понятно, что дѣйствительная высота стоянія воды въ трубкѣ будетъ показывать давленіе въ трубѣ только въ томъ случаѣ, если постановка трубки ничего въ теченіи жидкости не нарушила и не измѣнила. Для этого нужно, чтобы отверстие въ стѣнкѣ было очень мало и чтобы края трубки не входили внутрь трубы. Кроме того, безвоздушнаго пространства достигнуть, конечно, нельзя. Употребляя запаянныя сверху трубки, можно достигнуть Торичеллевой пустоты; но при этомъ вода въ трубкахъ испарится, и уровень воды въ пьезометрѣ остается подверженъ давленію паровъ, упругость которыхъ опредѣляется каждый разъ температурою окружающей среды. При небольшихъ давленіяхъ можно брать трубки, открытыя въ атмосферу: легко видѣть, что вода въ нихъ поднимается не на всю высоту  $\frac{p}{\gamma}$ , а на  $\frac{p}{\gamma} + b$ ), гдѣ  $b$  есть барометрическое давленіе, выраженное высотой столба той же жидкости.

Очевидно, что, по существу, пьезометры ничѣмъ не отличаются отъ описанныхъ выше приборовъ для измѣренія гидростатическаго давленія.

Очевидно, что то, что мы назвали напоромъ, т. е. разность  $(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) - (z - \frac{p}{\gamma})$ , есть разность высотъ стоянія уровня въ пьезометрахъ, хотя бы они употреблялись открытыми, лишь бы на уровняхъ обоехъ пьезометровъ внѣшнн давленія были одинаковы.

Геометрическимъ представлениемъ ур-ія (15) очень удобно пользоваться во многихъ случаяхъ. Такъ, напримѣръ, если мы имѣемъ цилиндрическую трубу, то по ур-ю (13) заключаемъ, что, въ силу постоянства ея диаметра, скорость во всѣхъ сѣченіяхъ остается одна и та же, а потому пьезометрическая линія должна быть горизонтальной прямой, совершенно независимо отъ расположения оси трубы. Если же, вдобавокъ, это послѣднее известно, а, кромѣ того, известна и величина давления въ одномъ изъ сѣченій, то тѣмъ самымъ вполнѣ опредѣляются давления во всѣхъ остальныхъ сѣченіяхъ.

Подобными же соображеніями убѣждаемся, что въ конической трубѣ, расширяющейся по теченію, пьезометрическая линія по теченію поднимается къверху, и слѣд., если широкое устье такой расширяющейся трубы, положенной притомъ горизонтально, выпускаетъ воду въ атмосферу, то во всѣхъ сѣченіяхъ трубы, выше по теченію лежащихъ, давление меньше атмосфернаго. Наоборотъ, въ конической трубѣ, суживающейся по теченію и вѣющей горизонтальную ось, давление непрерывно падаетъ.

Напишемъ, далѣе, ур-іе (15) въ такомъ видѣ:

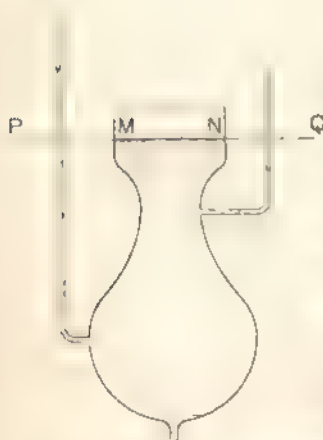
$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + (z_1 - z) + \frac{v_1^2 - v^2}{2g} \dots \dots \dots (16)$$

Если бы движенія не было, то гидростатическое давление  $p_2$  въ конечномъ сѣченіи  $A$ , съ координатою  $z$ , опредѣлялось бы по давленію  $p_1$  въ начальномъ сѣченіи  $A_1$ , съ координатою  $z_1$ , изъ уравненія:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + (z_1 - z),$$

въ виду чего ур (16) переписалось бы такъ:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v^2}{2g}$$



Фиг. 44.

Отсюда видно, что въ одномъ и томъ же сѣченіи  $A$  гидродинамическое давление  $p$  можетъ быть и меньше, и больше гидростатическаго  $p_2$ , смотря по тому, больше ли  $v$ , чѣмъ  $v_1$ , или меньше, — иначе,  $A$  меньше  $A_1$  или больше. Слѣдовательно, отношеніе сѣченій имѣетъ большое влияние на величину гидродинамическаго давления.

Такимъ образомъ, въ сосудѣ, въ которомъ свободная поверхность поддерживается на уровнѣ  $MN$  и который имѣетъ форму, указанную на фиг. 44, пьезометрическія высоты расположатся въ разныхъ мѣстахъ приблизительно такъ, какъ показано на чертежѣ, если вода въ немъ движется.

т.е. въ узкомъ сѣченіи она будетъ ниже, въ широкомъ—выше, чѣмъ свѣ-



бодная поверхность въ сосудѣ, если же вода остановится, то всё пьезометры укажутъ одну и ту же высоту стоянія воды по линіи *PMNQ*.

Съ этой точки зрѣнія можно получить предѣльную величину возможнаго суженія.

Въ самомъ дѣлѣ,  $p < p_1$ , тамъ, гдѣ  $r > r_1$ , т.-е. гдѣ  $A < A_1$ .

Но, во всякомъ случаѣ, во избѣжаніе разрыва колонны жидкости,  $p$  должно быть больше нуля, т.-е. должно быть соблюдено условіе:

$$r_1^2 - c_1^2 \leq 2g \frac{p_1}{\gamma}$$

А такъ какъ по ур-ю (13)

$$r = \frac{A_1}{A} c_1,$$

то необходимо, чтобы соблюдалось соотношеніе:

$$\left( \frac{A_1}{A} \right)^2 \leq 1 + \frac{2g}{r_1^2} \left[ \frac{p_1}{\gamma} - (z_1 - z) \right].$$

Если  $\left( \frac{A_1}{A} \right)^2$  сдѣлано больше этого предѣльнаго значенія, то въ узкомъ сѣченіи давленіе должно перейти въ растяженіе, произойдетъ разрывъ колонны жидкости, и наши уравненія будутъ непримѣнны, да и все явленіе будетъ происходить иначе: или труба будетъ захлебываться, подобно тому, какъ захлебывается сосудъ съ узкимъ горломъ, опрокинутый горломъ внизъ, или же движущаяся жидкость перестанетъ заполнять всё сѣченія.

Наконецъ, отмѣтимъ, что уравненіе (15) получено въ предположеніи *совершенной* жидкости. Въ дѣйствительности всегда есть налицо нѣкоторыя сопротивленія движению, обуславливаемыя частью вязкостью жидкости, частью внѣшними обстоятельствами движенія. Если силу этихъ сопротивленій спроектируемъ на перемѣщеніе и умножимъ на само перемѣщеніе, то получимъ работу сопротивленій, которая должна быть принята въ расчетъ при составленіи уравненія живыхъ силъ.

Такъ какъ въ уравненія Д. Бернулли всё члены представляютъ линейныя величины, а именно, работы, отнесенныя къ одному  $kgv$  протекающей жидкости, то и работа вязкости должна быть вычислена также на каждый  $kgv$  движущейся жидкости и поэтому войдетъ въ уравненіе тоже въ видѣ высоты. Если работу этихъ силъ на данномъ перемѣщеніи, выраженную въ  $kgv \text{ mtr.}$  раздѣлимъ на всё протекающей въ единицу времени жидкости, то получимъ нѣкоторую длину  $l$ , которая и будетъ представлять работу этихъ силъ, отнесенную къ одному  $kgv$ , т.-е. ту самую величину, которую надо внести въ ур-е Бернулли. Этотъ членъ  $l$  называется *потерянными напоромъ*, ибо, конечно, та часть полной энергіи, которая затрачена на преодоленіе сопротивленій движению, затрачивается безвозвратно и для дальнѣйшаго движенія является потерянной. Въ этомъ заключается существенная разница между этимъ членомъ и остальными членами ур-я

Д. Бернулли: въ то время какъ потенциальная энергія  $\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)$  можетъ переходить въ кинетическую  $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$  и обратно, а давленіе измѣняется за счетъ положенія, и все это происходитъ притомъ безъ всякаго измѣненія полного запаса энергіи. членъ  $\eta$ , опредѣляетъ собою *непрерывную убыль* запаса энергіи при переходѣ отъ одного сѣченія къ другому въ направленіи теченія жидкости.

Итакъ, если движеніе струи мы разсматриваемъ между сѣченіемъ  $A_1$ , гдѣ полный запасъ энергіи выражается суммою

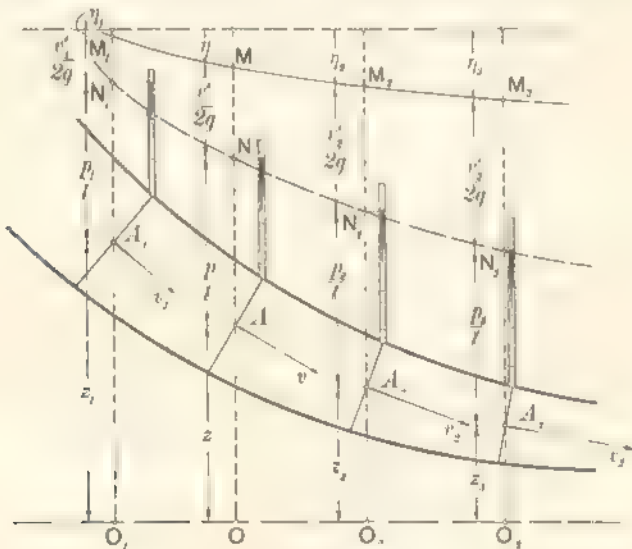
$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1.$$

в сѣченіи  $A$  (фиг. 38), гдѣ скорость, давленіе и координата ц. т. суть  $v$ ,  $p$  и  $z$ , а работа сопротивленій на пути отъ  $A_1$  до  $A$ , отнесенная къ  $1 kg$ , есть  $\eta$ , то ур-іе Д. Бернулли для движенія между этими двумя сѣченіями напишется такъ:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + \eta \dots \dots \dots (17)$$

Это и есть ур-іе Д. Бернулли для *несовершенныхъ* жидкостей.

Оно указываетъ, что для действительныхъ жидкостей геометрическое мѣсто концовъ высотъ  $\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right)$  есть не плоскость, а нѣкоторая поверхность  $M_1 M M_2 \dots$  опускающаяся по движенію все ниже и ниже (фиг. 45).



Фиг. 45.

Если скорость начальнаго сѣченія извѣстна, другими словами, если заданъ расходъ,—то, въ силу того, что величина скорости во всякомъ дальнѣйшемъ

сѣченіи вполнѣ опредѣляется расходомъ и сѣчетомъ струи, упомянутыя потери напора цѣликомъ отражаются на уменьшеніи пьезометрической высоты: пьезометрическая линия опускается по теченію все ниже и ниже и сравнено съ тѣмъ, что наблюдалось бы, если бы потерь напора не было.

Для уясненія смысла члена  $\eta$  полезно обратить вниманіе также на слѣдующее обстоятельство. Когда дано ур-іе Д. Бернулли для совершенной жидкости, въ формѣ ур-ія (15) или графически, въ формѣ чертежа (см. фиг. 36), то по ур-ю или чертежу о направленіи теченія жидкости судить невозможно. Когда же дано ур-іе движенія несовершенной жидкости, то тѣмъ самымъ вполнѣ опредѣляется и направление движенія, такъ какъ свободный запасъ энергіи въ одномъ сѣченіи можетъ быть меньше, чѣмъ въ другомъ, только въ томъ случаѣ, если первое лежитъ по теченію дальше отъ начала движенія, чѣмъ второе.

Вычисленіе потеряннаго напора было бы возможно, если бы была извѣстна природа силъ, вызывающихъ гидравлическія сопротивленія, т.-е. если бы было извѣстно, отъ чего и какъ зависитъ сила тренія жидкихъ частицъ, скользящихъ одна по другой (вязкость) или по твердой стѣнкѣ (внѣшнее треніе). Къ сожалѣнію, въ этомъ отношеніи наши свѣдѣнія такъ же скудны, какъ и въ вопросѣ о треніи твердыхъ телъ. Поэтому необходимо идти эмпирическимъ путемъ; при этомъ, для практическихъ цѣлей важно знать, главнымъ образомъ, не силу сопротивленій, а потерю напора, ими обусловливаемую. Задача прикладной гидравлики состоитъ, между прочимъ, въ изученіи способовъ оцѣнки потеряннаго напора въ зависимости отъ разныхъ обстоятельствъ движенія. Оставляя этотъ вопросъ до соответствующихъ главъ курса, отмѣтимъ уже теперь, что гидравлика принимаетъ, какъ общій экспериментальный фактъ, что *потери напора пропорціональны квадрату скорости протеканія*; этотъ законъ выражается формулой

$$h = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

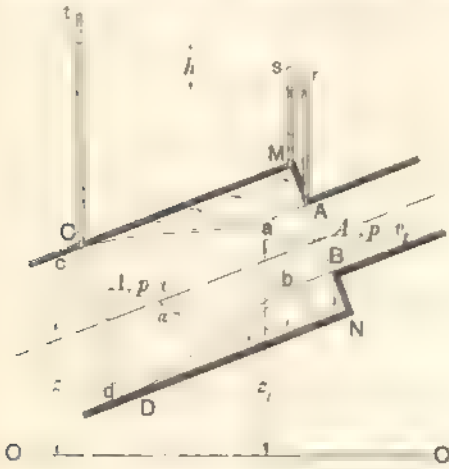
гдѣ  $v$  есть скорость въ мѣстѣ струи, непосредственно слѣдующемъ за причиной, вызвавшей потерю напора; коэффициентъ пропорціональности  $\zeta$  называется *коэффициентомъ сопротивленія*.

Есть, впрочемъ, одинъ случай, наблюдающійся при всякомъ внезапномъ увеличеніи сѣченія струи, когда потеря напора можетъ быть вычислена теоретически, при чемъ результатъ вычисленій весьма близко сходится съ тѣмъ, что наблюдается въ дѣйствительности. Этотъ случай разсмотрѣн въ слѣдующемъ параграфѣ.

### § 9. Теорема Бордѣ—Карно.

Опредѣлимъ, какъ должно исправить ур-іе Д. Бернулли въ случаѣ сопротивленія, происходящаго отъ внезапнаго увеличенія сѣченія струи. Такъ какъ съ измѣненіемъ сѣченія мѣняется и скорость, то этотъ случай можно назвать также случаемъ внезапнаго уменьшенія скорости, т.-е. случаемъ

удара. Поправка эта введена Беланже, профессором *École des ponts et chaussées*, хотя на необходимость ее указать еще в XVIII столѣтїи Карно (1753—1823 гг.), а еще раньше Борд́а (1733—1799 гг.).



Фиг. 46.

Пусть струя *AB* (фиг. 46) внезапно должна измѣнить свое сѣченіе изъ *AB = A<sub>1</sub>* въ *MM = CD = A*. Въ дѣйствительности жидкость такъ не потечетъ: полное сѣченіе она займетъ только на нѣкоторомъ разстояніи отъ *AB*,—гдѣ-нибудь въ *CD*; кольцевое же пространство *BND—AMC* будетъ заполнено мертвой водой, не участвующей въ общемъ движеніи струи. Эта вода, однако, не остается въ покоѣ: подъ вліяніемъ тренія о струю она приходитъ въ вихревое движеніе, хотя и очень медленное, на что, конечно, тратится извѣстная работа. Отсюда понятно, что ни въ

одномъ изъ сѣченій между *AB* и *CD* нельзя признавать движеніе совершающимся съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій; безъ большой погрѣшности это допустимо лишь для сѣченій *AB* и *CD*. Сдѣлавъ это предположеніе, заключаемъ, что въ *AB* и *CD* давленіе распределяется по законамъ гидростатики.

Движеніе принимаемъ установившимся. Уравненіе неразрывности напишется въ формѣ

$$Q = A_1 v_1 = Av.$$

Мы будемъ разсматривать не одну какую-либо струю, а всю массу *MNDSCM*, и къ безконечно малому перемѣщенію ея изъ положенія *MABNDCM* въ положеніе *MAabBNdcM* примѣнимъ теорему о проекціяхъ количества движенія: проекція приращенія количества движенія на какое-либо направленіе равна суммѣ импульсовъ дѣйствующихъ силъ по тому же направленію.

Приращеніе количества движенія напишется такъ: за время *dt* масса *MACBND*, находящаяся все время въ вихревомъ движеніи, не получитъ никакого приращенія количества движенія, ибо все скорости въ силу установившагося теченія не измѣняются. То же самое справедливо для массы *abDCa*; остается масса *ABba*, какъ бы перемѣстившаяся въ *CDdc* и равная  $\frac{\gamma A_1 v_1 dt}{q}$  или, что то же,  $\frac{\gamma A_1 dt}{q}$ . Приращеніе ея количества движенія выразится черезъ

$$\frac{\gamma A_1 dt}{q} (v - v_1) \dots \dots \dots (a)$$

Теперь составимъ выраженія импульсовъ силъ, здѣсь работающих.— сначала для гидродинамическаго давленія.

Импульсъ давленій. въ сѣченіи  $CD$ , на основаніи сдѣланнаго допущенія о видѣ движенія, выразится черезъ  $(-Ap dt)$ .

Импульсъ давленій на плоскости  $MN$  выразимъ. сдѣлавъ новое допущеніе. Мы уже сказали, что кольцевой объемъ  $MACBND$  не раздѣляетъ движенія струи; его частицы хотя и движутся, но медленно, и притомъ такъ, что частицы, прилегающія къ кольцевой стѣнкѣ  $MABN$ , не имѣютъ скорости нормальной къ стѣнкѣ (пустоты нѣтъ). Написавъ поэтому для струйки, идущей по стѣнкѣ, уравненіе Д. Бернулли въ формѣ (15) § 8 и принявъ, что скорости вообще малы, видимъ, что гидродинамическое давленіе на этой стѣнкѣ мало отличается отъ гидростатическаго. Поэтому возможно допустить, что не только на части  $AB$ , но и по всей стѣнкѣ  $MN$  давленіе распределено по закону гидростатики. А въ такомъ случаѣ импульсъ давленій на всю площадь  $A$  будетъ равенъ  $(\int Ap_1 dt)$ , гдѣ  $p_1$  есть давленіе въ центрѣ тяжести площади  $MN$ .

Итакъ, импульсъ давленій на пути отъ  $AB$  до  $ab$  есть

$$(Ap_1 - Ap) dt \dots \dots \dots (b)$$

Для силы тяжести проекція импульсовъ на ось движенія, составляющую съ вертикалью уголъ  $\alpha$ , выражается черезъ

$$\gamma A \cdot MC \cdot dt \cos \alpha = \gamma A(z_1 - z) dt, \dots \dots \dots (c)$$

такъ какъ очевидно, что

$$MC \cos \alpha = z_1 - z.$$

Выраженія (a), (b) и (c) даютъ вамъ возможность написать уравненіе количества движенія:

$$\frac{\gamma Av dt}{g} (v - v_1) = Ap_1 dt - Ap dt + \gamma A(z_1 - z) dt.$$

Дѣля все уравненіе на  $\gamma A dt$ , получимъ:

$$\frac{v(v - v_1)}{g} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} + z_1 - z \dots \dots \dots (d)$$

Очевидно, что

$$v(v - v_1) = \frac{v^2 - v_1^2}{2} = \frac{(v_1 - v)^2}{2},$$

а потому (d) переписется такъ:

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} - z_1 - \frac{p}{\gamma} + z$$

или

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} - z_1 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} \dots \dots \dots (18)$$

Сравнивая это уравнение съ ур-емъ Д. Бернулли (17) (стр. 91), видимъ, что добавочный членъ  $\frac{(v_1 - v)^2}{2g}$  есть какъ разъ то, что мы назвали потеряннмъ напоромъ  $\eta_u$ , отмѣчая подстрочнымъ указателемъ  $(u)$  то обстоятельство, что имѣемъ дѣло съ потерей напора на ударъ. Итакъ:

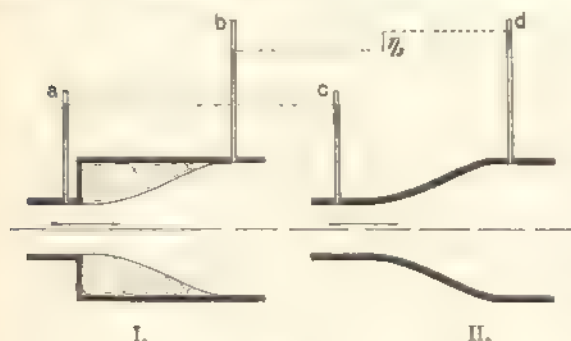
$$\eta_u = \frac{(v_1 - v)^2}{2g},$$

т.-е. при внезапномъ увеличеніи сѣченія, иначе говоря, — при ударѣ, — потеря напора равна напору, соответствующему потерянной скорости. Это положение называется теоріей Карно (или Борда).

При ударѣ всегда наблюдается повышение пьезометрическаго уровня. Въ самомъ дѣлѣ, изъ ур-ія (18) имѣемъ:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \left( \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} - \frac{(v_1 - v)^2}{2g} \dots \dots \dots (18')$$

Пока  $v_1 > v$ , — а это есть условіе существованія удара, — вторая часть ур-ія (18') положительна, а потому уровень въ пьезометрѣ  $t$  (фиг. 39) всегда выше, нежели въ пьезометрѣ  $r$  \*).



Фиг. 47.

Если сравнить двѣ трубы одинаковыхъ размѣровъ и пропускающихъ одно и то же количество воды (фиг. 47), но отличающихся тѣмъ, что въ трубѣ I сѣченіе ея измѣняется внезапно, а въ трубѣ II — плавно, то, при одинаковыхъ высотахъ пьезометровъ  $a$  и  $c$ , пьезометръ  $d$  обнаружитъ наличие большаго гидродинамическаго да-

вленія въ расширенной части трубы II, нежели пьезометръ въ расширенной части трубы I; разность уровней, очевидно, равна потерѣ на ударъ, т.-е.  $\eta_u$ . Легко видѣть, что жидкость трубы I послѣ удара несетъ въ себѣ уже меньшій запасъ энергіи, нежели въ трубѣ II, а потому способна преодолѣть меньшее сопротивленіе подняться на меньшую высоту, — словомъ, совершить меньшую работу, пройдя внезапное измѣненіе сѣченія. Наоборотъ, если бы требовалось и въ томъ, и въ другомъ случаѣ имѣть за расширеніемъ одинаковые запасы энергіи, то въ трубѣ I въ сѣченіи  $a$  нужно было бы имѣть большее давленіе, нежели въ соответствующемъ мѣстѣ трубы II,

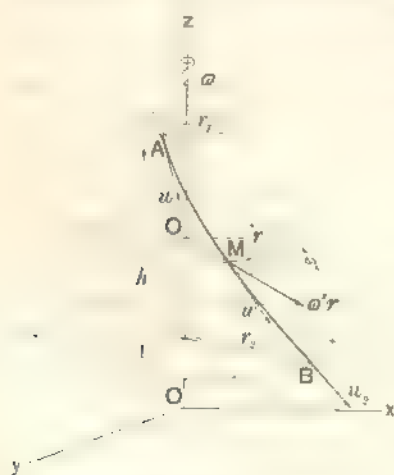
\*) Оля выше уровня  $n$  въ пьезометрѣ  $s$ , ибо допущеніе гидростатическаго распредѣленія давленій въ плоскости  $MM$  равносильно допущенію стоянія воды въ пьезометрахъ  $r$  и  $z$  на одномъ уровнѣ.

т.-е. съ самаго начала воду нужно было бы прогонять подь ббльшимъ давлєніемъ, что на практикѣ достигается усиленной работой машинъ, перемищающихъ воду по трубѣ, или болѣе высокимъ положеніемъ резервуара, питающаго трубу, и т. п.

Таково значеніе потеряннаго напора, независимо отъ причины, ея вызывающей. По отношенію къ разсматриваемому случаю отмѣтимъ, что здѣсь потеря напора состоитъ въ потерѣ живой силы; эта потеря отражается на струѣ объясненнымъ выше образомъ, а кромѣ того, она отражается конечно, и на самомъ водопроводѣ: потерянная живая сила расходуется частью на приведеніе во вращательное движеніе частицъ въ пространствѣ *AMC*, частью на нагреваніе всего, что находится въ этомъ мѣстѣ перехода. Вращательное движеніе, конечно, вызываетъ размываніе стѣнокъ *CM, ND, MN* если онѣ вообще способны къ такому изнашиванію; образованіе омутовъ за плотинами слѣдуетъ приписать именно наличности энергичнаго удара.

### § 10. Уравненіе Д. Бернулли для относительнаго движенія, въ случаѣ, если движеніе влеченія есть равномерное вращеніе около неподвижной оси.

Примѣнимъ уравненіе Д. Бернулли къ случаю относительнаго движенія струи. Извѣстно, что всѣ теоремы, выводимыя для абсолютнаго движенія, приложимы и къ относительному, если только ввести силу инерціи движенія влеченія и силу инерціи отъ ускоренія поворотнаго. Такъ какъ уравненіе Д. Бернулли есть уравненіе живыхъ силъ, то въ него войдутъ не силы



Фиг. 48.

инерціи, а ихъ работы на относительномъ перемѣщеніи. Такъ какъ поворотное ускореніе перпендикулярно къ относительной скорости, т.-е. къ направленію относительнаго перемѣщенія, то его работа на этомъ перемѣщеніи равна нулю и въ уравненіе, слѣд., не войдетъ. Остается только работа силы инерціи переноснаго движенія. Разсмотримъ лишь *случай равномернаго вращенія струи около неподвижной оси*. Ускореніе силы инерціи переноснаго движенія есть тогда центробѣжное. Предположимъ сначала, что ось вращенія вертикальна.

Пусть мы имѣемъ струю *AB* (фиг. 48), вращающуюся около вертикальной оси *Oz* съ постоянною угловою скоростью  $\omega$ . Работу центробѣжной силы на перемѣщеніи отъ *A* до *B* получимъ такъ: въ какой-нибудь частицѣ *M*, описывающей въ данный моментъ окружность радиуса *OM*  $r$ , центробѣжное ускореніе равно  $\omega^2 r$ ; если вѣсъ частицы есть 1, то ея масса есть  $\frac{1}{g}$ ; значитъ,

центробѣжная сила этой частицы  $M$ , есть  $\frac{\omega^2 r}{g}$ . За время  $dt$  частица  $M$  проходитъ путь  $ds$ , образующій, вообще, нѣкоторый уголъ съ радиусомъ  $O'M$ , по которому направлена центробѣжная сила. Поэтому работа ея на этомъ перемѣщеніи есть:

$$\frac{1}{g} \omega^2 r ds \cos(r, ds) = \frac{1}{g} \omega^2 r dr.$$

На всемъ перемѣщеніи отъ  $A$  до  $B$  центробѣжная сила совершаетъ работу:

$$\frac{\omega^2}{g} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\omega^2}{g} (r_2^2 - r_1^2) = \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g},$$

гдѣ  $u_1$  и  $u_2$  суть скорости влеченія точекъ  $A$  и  $B$ . Работа этой силы должна быть прибавлена къ работѣ внѣшнихъ силъ, входящихъ въ уравненіе Д. Бернулли (ур-іе (9) въ § 7), а потому можемъ написать, замѣняя абсолютныя скорости  $v$  относительными  $w$ :

$$\frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + z_1 - \left( \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g},$$

или, окончательно:

$$\frac{w_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = const \dots (19)$$

Отсюда видно, что напоръ, соответствующій скорости влеченія, вычитается изъ соответствующаго трехчлена.

Замѣтимъ, что положеніе оси вращенія не безразлично, такъ какъ только при вертикальной оси высота  $z_1 - z_2 = h$  остается одна и та же, гдѣ бы мы ни застали струю  $AB$ . Для всякаго другого положенія оси вращенія эта высота періодически мѣняется съ каждымъ оборотомъ. Но если мы имѣемъ дѣло не съ одной струйкой, а съ непрерывнымъ рядомъ струй, образующихъ полное колесо, то для всей массы воды, протекающей черезъ такое колесо съ наклонною осью, ур-іе (19) можетъ быть примѣнено безъ всякихъ дальнѣйшихъ оговорокъ, при чемъ координаты  $z_1$  и  $z_2$  слѣдуетъ брать, какъ координаты центровъ окружностей впуска въ колесо и выпуска изъ него.

Равнымъ образомъ, если вращеніе не равномерное, то ускореніе движенія влеченія состоитъ уже не только изъ центростремительнаго  $\frac{u^2}{r}$ , но и изъ тангенціального  $\frac{du}{dt}$ , которое дастъ новую силу инерціи  $\left( -\frac{1}{g} \cdot \frac{du}{dt} \right)$ ,



направленную по перпендикуляру къ радіусу въ плоскости вращенія. Работа этой силы, вообще, не равна нулю, а потому уравненіе (19) въ этомъ случаѣ должно быть дополнено членами, представляющими работу этой силы въ всемъ пути отъ *A* до *B*, отнесенную, конечно, къ единицѣ вѣса жидкости.

Слѣдуетъ также отмѣтить, что, въ примѣненіи къ дѣйствительнымъ жидкостямъ, ур-іе (19) должно быть исправлено на потери пара, которые въ этомъ случаѣ, конечно, пропорціональны квадрату относительной скорости

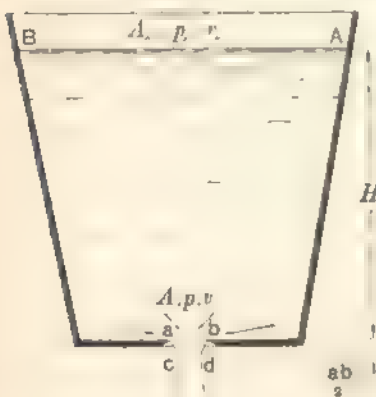
---

## ГЛАВА II.

### Истечение жидкости изъ отверстій.

#### § II. Истечение изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ.

Начнемъ съ простѣйшаго случая истечения изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ горизонтальнаго дна сосуда; заранее отмѣтимъ, что полученные результаты можно примѣнять и къ случаю отверстія въ боковой стѣнкѣ, если только вертикальный размѣръ отверстія настолько малъ по сравненію съ разстояніемъ отъ его центра тяжести до свободной поверхности, что безъ большой ошибки можно считать всѣ точки сѣченія отверстія находящимися на одной и той же глубинѣ подъ свободной поверхностью, и, притомъ, именно на глубинѣ центра тяжести отверстія.



Фиг. 49.

Мы будемъ все время говорить объ установившемся движеніи, т.-е. будемъ предполагать, что отъ времени не зависятъ ни одно изъ обстоятельствъ движенія, такъ что разстояніе  $H$  (напоръ) (фиг. 49) отъ отверстія до свободной поверхности постоянно \*).

Назовемъ площадь сѣченія сосуда на свободной поверхности черезъ  $A_0$ , скорость воды въ этомъ сѣченіи черезъ  $v_0$ , и давление на свободной поверхности черезъ  $p_0$ . Тѣ же величины въ отверстіи будемъ называть тѣми же буквами, но безъ значковъ. Примѣняя къ теченію отъ  $AB$  до  $ab$

уравненіе Д. Бернулли и принимая за плоскость сравненія плоскость отверстія  $ab$ , имѣемъ уравненіе:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + 0 = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + H \dots \dots \dots (1)$$

\*) Это выполняется или въ томъ случаѣ, если площадь  $AB$  огромна по сравненію съ площадью  $ab$ , такъ что вытеканіе жидкости изъ сосуда не вызываетъ въ немъ замѣтнаго пониженія уровня, или съ помощью сосуда Мариотта или приборомъ Пронія. Наконецъ, можно предположить наличность постояннаго притока въ сосудъ въ количествѣ, равномъ расходу изъ него.

Уравнение неразрывности пишется въ формѣ:

$$Q = A_0 c_0 = A c' \dots \dots \dots (2)$$

Въ виду (2) ур-ію (1) можно дать видъ:

$$\frac{c'^2}{2g} \left[ 1 - \left( \frac{A}{A_0} \right)^2 \right] = H - \frac{p_0 - p}{\gamma},$$

откуда

$$c' = \sqrt{\frac{2g \left( H - \frac{p_0 - p}{\gamma} \right)}{1 - \left( \frac{A}{A_0} \right)^2}} \dots \dots \dots (3)$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда  $A_0$  гораздо больше  $A$ , — наприимѣръ, при  $\frac{A_0}{A} > 20$ , можно безъ значительной ошибки пренебречь въ знаменателѣ дробью  $\left( \frac{A}{A_0} \right)^2$ , — во взятомъ примѣрѣ она  $< 0,0025$ .

Допустимъ затѣмъ, что истечение происходитъ въ атмосферу, и, слѣдовательно, давленіе  $p$  въ отверстіи равно давленію въ окружающей средѣ  $p_0$ . Отмѣчая для этого случая скорость черезъ  $c'$ , получимъ изъ ур. (3):

$$c' = \sqrt{2gH}.$$

Это есть данная въ 1643 году формула Торричелли: скорость истечения подъ напоромъ  $H$  равна скорости свободного паденія съ высоты  $H$ .

Но такъ мы дѣлаемъ грубую ошибку. Уравненіе Бернулли выведено въ предположеніи движенія параллельными слоями, — при истеченіи же этого нѣтъ. Если воду замутить какою-нибудь нерастворимою пылью, то ясно будетъ видно, какъ располагаются струйки: частицы, лежащія у дна, также принимаютъ участіе въ истеченіи.

На таблицѣ II представлены копія съ фотографій, полученныхъ проф. Шоу (Hele-Schaw); въ глицеринѣ, протекающей по сосудамъ указанной формы, онъ выпускалъ тонкія струи подкрашивающаго вещества; черныя линіи фигуръ соотвѣтствуютъ какъ разъ этимъ окрашеннымъ струямъ. Толщина черныхъ полосокъ позволяетъ судить объ относительной величинѣ скорости каждой струйки: ясно, что скорость тамъ больше, гдѣ струйки тоньше. Изъ этихъ фигуръ отчетливо видно, что *вся* масса жидкости передъ отверстіемъ устремляется въ него, хотя средняя колонна движется быстрее; замѣтно также вліяніе не только формы дна сосуда (фиг. А и С), но и то, скруглены кромки отверстія (фиг. А) или нѣтъ (фиг. В): въ этомъ послѣднемъ случаѣ углы ближайшаго ушпренія гораздо менѣе принимаютъ участіе въ общемъ движеніи жидкости, нежели въ предыдущемъ; наконецъ, изъ фигуръ ясно, что внутри отверстія струйки имѣютъ, вообще, различныя скорости. Хотя вода и гораздо менѣе вязка, нежели глицеринъ, однако,



Фиг. А



Фиг. В



Фиг. С.

Окрашенная струя глицерина  
по опытам Hele Shaw.

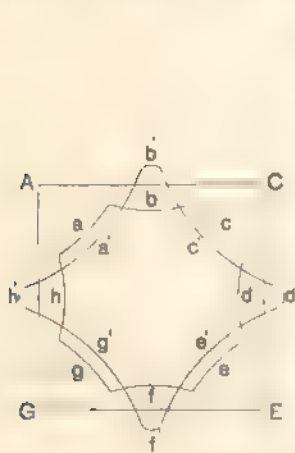
См. его первую работу въ *Engineering*, vol. LXIV за 1897, II полугодіе, стр. 90.

Вторая работа, откуда взяты эти фигуры, подъ заглавіемъ „Surface Resistance of Water and Stream—Line Motion“ напечатано въ томъ же журналѣ за 1898 годъ, I полугодіе, стр. 444, 477, 511.

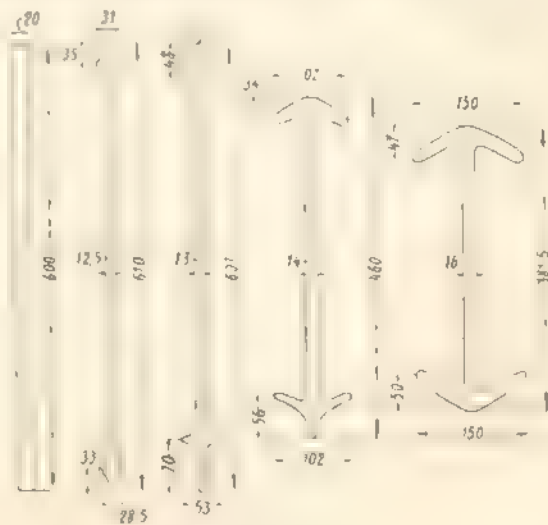
Третья работа его, подъ названіемъ „Further experiments on the Character of Fluid-Motion“ см. тамъ же, за 1899 годъ, I полугодіе, стр. 28.

подобныя же явленія происходят и въ ней, такъ что въ сѣченіи *ab* и передъ нимъ скорости въ отдѣльныхъ точкахъ отнюдь не параллельны между собою, а это вызываетъ *сжатіе струи* на нѣкоторомъ разстояніи отъ *ab*: гдѣ-нибудь въ *cd* (приблизительно на разстояніи  $\frac{ab}{2}$ ) струя получаетъ наибольшее сжатіе, т. е. площадь ея сѣченія наименьшая; это сѣченіе называется *сжатымъ*, и въ немъ можно считать скорости параллельными. Но параллельность словъ, при которой только и примѣнимы для конечной струи уравненія (1) и (2), обуславливаются не только параллельностью скоростей, но и ихъ равенствомъ, чего въ дѣйствительности нѣтъ; появленіе такъ называемаго *біенія* струи можетъ служить достаточнымъ тому доказательствомъ <sup>\*)</sup>. Изъ теоретическихъ изслѣдованій объ истеченіи слѣдуетъ, что скорости въ отдѣльныхъ точкахъ отверстия нельзя считать равными. Но такъ какъ такія изслѣдованія, при всей ихъ сложности, даютъ возможность найти скорость на поверхности струи и количество вытекающей жидкости, не вполне согласныя съ тѣмъ, что наблюдается въ дѣйствительности, да и то лишь для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, то не остается ничего

<sup>\*)</sup> Біеніемъ струи называется непрерывное измѣненіе вида и величины сѣченія вдоль струи. На фиг. 50 представлены два поперечныхъ профиля струи, вытекающей изъ квадратнаго отверстия *ACEG*; профиль *abcdefgh* взятъ на разстояніи 150 *mm*, а профиль *a'b'c'd'e'f'g'h'* — на разстояніи 300 *mm* отъ отверстия; площадь послѣдняго профиля наименьшая (наблюденіе Poncelet и Lesbros). Вудонъ нашелъ въ сжатомъ сѣченіи струи, вытекающей изъ отверстия съ формою правильнаго пятиугольника, пятиконечную звезду. На фиг. 51 даны четыре про-



Фиг. 50.



Фиг. 51.

филя струи въ разстояніяхъ 100, 300, 700 и 1000 *mm* отъ отверстия, имѣвшая форму узкой щели размѣрами въ 600  $\times$  20 *mm*. На дальнѣйшемъ протяженіи струи ея сѣченіе не остается постояннымъ ни по формѣ, ни по площади: оно измѣняется и притомъ такъ, что, напр., при квадратномъ отверстіи фиг. 50 дуговое четырёхугольное сѣченіе *b'd'f'h'* снова сплющивается подобно формѣ *ab...gh*, снова восстанавливается, но уже въ положеніи такомъ, что его вершины обращены къ вершинамъ отверстия, снова сплющивается и т. п.

лучшаго, какъ пользоваться формулой Торричелли, исправляя ее эмпирически на основаніи слѣдующихъ соображеній.

Разъ есть сжатое сѣченіе, то истечение происходитъ уже не черезъ всю площадь  $A$  отверстия, а черезъ это сжатое сѣченіе, площадью  $a$ , идѣ скорости параллельны. Полагаемъ, что

$$a = \alpha \cdot A \dots \dots \dots (4)$$

гдѣ  $\alpha$  есть нѣкоторая дробь, меньшая единицы. Величина  $\alpha$  называется *коэффициентомъ сжатія*.

Далѣе, по причинѣ несовершенства жидкости, непараллельность и неравенство скоростей для отдѣльныхъ струекъ, сопровождаемое ихъ относительнымъ скольженіемъ, вызываетъ потерю работы (напора) на преодоленіе сопротивленій, вызванныхъ этимъ скольженіемъ какъ внутри струи, такъ и у кромки отверстия, такъ что полный напоръ  $H$  \*) идетъ не только на сообщеніе каждому килограмму дѣйствительной живой силы  $\frac{v^2}{2g}$ , имѣющей мѣсто въ сжатомъ сѣченіи, но и на преодоленіе работы сопротивленій. Какъ уже было сказано, всѣ потери напора (работы сопротивленій, отнесенныя къ одному килограмму) считаются въ гидравликѣ, на основаніи наблюдений, пропорціональными второй степени скорости. Поэтому полагаемъ, что въ данномъ случаѣ работа сопротивленій, выраженная въ доляхъ дѣйствительнаго скоростнаго напора, можетъ быть выражена черезъ  $\zeta \frac{v^2}{2g}$ .

Такимъ образомъ учетъ напора будетъ таковъ:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g},$$

откуда

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (5)$$

Коэффициентъ  $\zeta$  называется *коэффициентомъ сопротивленія*. Изъ ур. (5) видно, что дѣйствительная скорость меньше скорости  $v'$ , даваемой формулой Торричелли; напишемъ поэтому, что дѣйствительная скорость

$$v = \varphi v' = \varphi \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (6)$$

\*) Если истечение происходитъ въ среду, давленіе которой отличается отъ давленія на свободной поверхности, то, согласно съ уравненіемъ (3) и съ обозначеніями фиг. 49, получимъ напоромъ будетъ сумма:  $H + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ . Кромѣ того, строго говоря, расстояние  $H$  слѣдовало бы измѣрять отъ уровня въ сосудѣ до сжатого сѣченія. При небольшихъ отверстияхъ обыкновенно достаточно считать  $H$  такъ, какъ указано на фиг. 49.

гдѣ  $\varphi$  меньше единицы и называется *коэффициентомъ скорости*. Очевидно, что коэффициенты  $\varphi$  и  $\zeta$  связаны уравненіемъ

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1 - \zeta}} \dots \dots \dots (7)$$

Наконецъ, такъ какъ изслѣдованіе поставлено на эмпирическую почву, то допустимъ, вопреки дѣйствительности, что въ сжатомъ сѣченіи скорости равны; тогда истинный расходъ  $Q$  черезъ отверстіе площадью  $A$  подъ напоромъ  $H$  выразится такъ:

$$Q = va = \alpha \varphi A \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (8)$$

Мы могли бы поступить еще и такъ: написать, что произведеніе площади отверстія на скорость, по формулѣ Торричелли, есть величина  $Q_1$ , ббльшая истиннаго расхода  $Q$ , и сразу ввести поправочный *коэффициентъ расхода*  $\mu$ , написавъ:

$$Q = Q_1 \mu = \mu A \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (9)$$

Изъ сравненія формулъ (9) и (8) получаемъ

$$\mu = \alpha \varphi \dots \dots \dots (10)$$

Помощью этого выраженія можно контролировать результаты опытовъ надъ истеченіемъ.

Всѣ введенные коэффициенты должны быть опредѣлены изъ опытовъ, изъ ряда коихъ и выяснилось, что для *круглыхъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ въ среднемъ*:

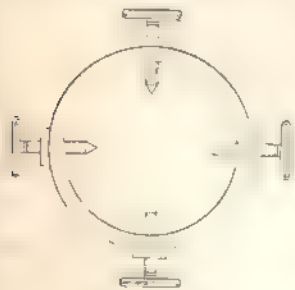
$$\varphi = 0,97,$$

$$\alpha = 0,64,$$

и, слѣдовательно,

$$\mu = 0,62.$$

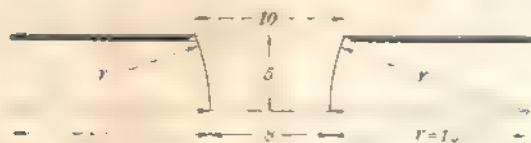
На опытѣ легче всего опредѣляется коэффициентъ расхода  $\mu$ , такъ какъ нужно только собрать всю воду, вытекшую за опредѣленный промежутокъ времени, измѣрить ее, напр., калиброваннымъ сосудомъ или взвѣшиваніемъ, полученный объемъ раздѣлить на число секундъ продолжительности опыта и результатъ подставить вмѣсто  $Q$  въ уравненіе (9); площадь отверстія  $A$ , а равно и постоянная во время опыта высота напора  $H$ , могутъ быть точно измѣрены.



Фиг. 52.

Коэффициентъ сжатія  $\alpha$  найти уже труднѣе. Дѣлается это напр. съ помощью кольца съ заостренными установительными винтами (фиг. 52). Кольцо устанавливается такъ, чтобы оно охваты-

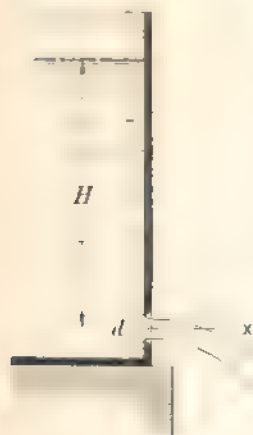
вало струю, и винты подводятся до соприкосновения съ нею. Такимъ приборомъ можно изслѣдовать профиль струи и найти мѣсто наибольшаго сжатія. Помощью подобнаго же прибора были установлены профили струи при отверстіяхъ не круглой формы (фиг. 50 и 51).



Фиг. 53.

Для круглыхъ отверстій можно пользоваться построеніемъ Bossut (фиг. 53), въ которомъ размѣры сжатой струи выражены по діаметру отверстія, принятому равнымъ 10. Это построеніе годится, если

отношеніе площади отверстія  $A$  къ площади свободной поверхности  $A_0$ , т.-е  $\frac{A}{A_0}$ , примѣрно, меньше  $\frac{1}{20}$ .



Фиг. 54.

Коэффициентъ скорости  $\gamma$  изъ опытовъ надъ истеченіемъ черезъ отверстіе въ днѣ сосуда непосредственно не опредѣляется. Онъ можетъ быть опредѣленъ изъ наблюденій надъ истеченіемъ черезъ отверстія въ боковой тонкой стѣнкѣ (фиг. 54), если только  $H$  гораздо больше вертикальнаго размѣра отверстія, такъ чтобы можно было считать напоръ постояннымъ для всѣхъ точекъ сѣченія отверстія. При такихъ условіяхъ коэффициентъ скорости можно опредѣлить опытомъ, устанавливая траекторію вытекающей струи. Разсматривая струю, какъ систему матеріальныхъ точекъ, имѣющихъ начальную скорость  $v$ , образующую съ горизонтомъ уголъ  $\alpha$ , и находящихся подъ дѣйствіемъ тяжести, заключаемъ, что ихъ траекторія есть парабола, выражающаяся уравненіями:

$$x = v \cos \alpha \cdot t;$$

$$y = \left( v \sin \alpha + \frac{gt}{2} \right) t.$$

Отсюда

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

и далѣе

$$v = \frac{x}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(y - x \operatorname{tg} \alpha)}}.$$

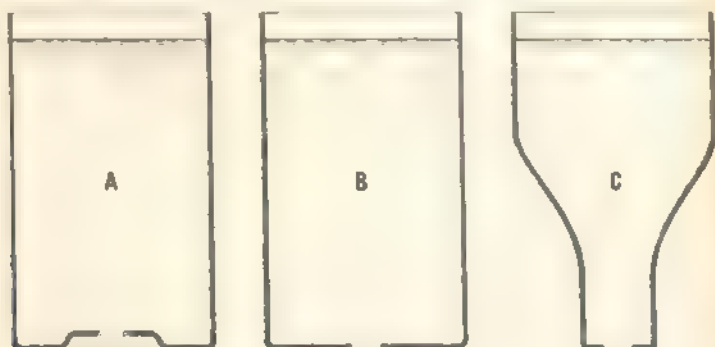
Измѣряя для двухъ точекъ струи координаты  $(x', y')$ ,  $(x'', y'')$ , можно исключить отсюда уголъ  $\alpha$  и найти значеніе дѣйствительной скорости  $v$ ; сравнивъ его съ количествомъ  $\sqrt{2gH}$ , найдемъ  $\gamma$ .



Относительно значений  $\mu$ ,  $\alpha$  и  $q$ , на основании существующихъ опытныхъ данныхъ, можно прійти къ слѣдующимъ заключеніямъ \*):

При отверстіяхъ въ тонкой стѣнкѣ:

1. Коэффициентъ сжатія  $\alpha$ , а съ нимъ и расхода  $\mu$ , зависятъ отъ формы стѣнки (фиг. 55). Такъ, для сосуда *A* наблюдается наибольшее сжатіе и наименьшій коэффициентъ расхода  $\mu = 0,5$ . Для сосуда *B* съ отверстиемъ въ плоской стѣнкѣ (нормальный случай) сжатіе, какъ выше приведено,



Фиг. 55.

довольно большое ( $\alpha = 0,64$ ) и коэффициентъ расхода невеликъ ( $\mu = 0,62$ ). Для сосуда *C*, постепенно суживающагося къ отверстию и тѣмъ самымъ подготавлиющаго отдѣльныя струйки къ прохожденію черезъ него, можно при извѣстномъ очертаніи получить очень малое сжатіе ( $\alpha$  почти равно 1) и очень высокій коэффициентъ расхода (до  $\mu = 0,97 - 0,98$ ). Нужно замѣтить, что такимъ путемъ мы ставимъ истеченіе въ условія истеченія черезъ насадки, о чемъ будетъ рѣчь ниже.

2. При длинныхъ и узкихъ отверстіяхъ  $\mu$  больше, чѣмъ при отверстіяхъ правильной формы. При малыхъ отверстіяхъ  $\mu$  больше, чѣмъ при большихъ.

3. Связь  $\mu$  съ напоромъ такова: чѣмъ меньше напоръ, тѣмъ меньше сжатіе, т.е. тѣмъ ближе къ единицѣ коэффициентъ сжатія, и, слѣдовательно, тѣмъ больше коэффициентъ  $\mu$ . Наоборотъ, коэффициентъ скорости тѣмъ меньше, чѣмъ меньше напоръ,—это обстоятельство вліяетъ на  $\mu$  обратно; въ концѣ концовъ коэффициентъ расхода при малыхъ напорахъ больше, чѣмъ при большихъ.

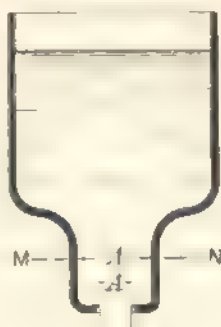
4. Наконецъ, величина отверстія по сравненію съ сѣченіемъ сосуда тоже оказываетъ вліяніе на значеніе  $\mu$ ; чѣмъ это отношеніе,  $\frac{A}{A_0}$ , меньше, тѣмъ меньше коэффициентъ расхода. Вейсбахъ (Julius Weisbach) ввелъ терминъ *несовершенное сжатіе* (unvollkommene Contraction) для случая,

\*) Сводъ экспериментальныхъ данныхъ относительно истеченія черезъ отверстія см. ниже, въ § 14.

когда  $\frac{A}{A_0}$  не очень мало; при этомъ подъ  $A_0$  нужно разумѣть не величину площади сосуда на свободной поверхности, а площадь той его призматической части, за которой по направлению къ отверстию уже нѣтъ суженій или расширеній; такъ, напр., въ случаѣ фиг. 56 и 57 подъ  $A_0$  нужно



Фиг. 56



Фиг. 57.

разумѣть сѣченія сосудовъ по *МN*. Оказывается, что присутствіе незадолго до отверстія замѣтной скорости существенно вліяетъ на коэффициентъ расхода путемъ уменьшенія сжатія.—коэффициентъ  $\mu$  увеличивается. Вліяніе этого обстоятельства подробно разсмотрѣно Вейсбахомъ, который далъ для этихъ случаевъ таблицы поправокъ, приведенныя ниже въ параграфѣ 14; изъ нихъ видно, что если  $\frac{A}{A_0} = \frac{1}{20}$ , то коэффициентъ расхода только на 0,7%

больше, чѣмъ при совершенномъ сжатіи ( $\frac{A_0}{A}$  очень велико); если же  $\frac{A}{A_0}$

0,5, то коэффициентъ расхода увеличивается на 13,5%; при  $\frac{A}{A_0} = 0,7$ , -- на 26% и т. д.

5. Присутствіе замѣтной скорости на свободной поверхности можетъ быть оцѣнено соответствующимъ увеличеніемъ напора, вносимаго въ формулу Торричелли: скорость въ отверстіи можно получить вмѣсто уравненія (3) изъ уравненія (1) такъ:

$$v = \sqrt{2gH + \frac{2g}{\gamma}(p_0 - p) + v_0^2},$$

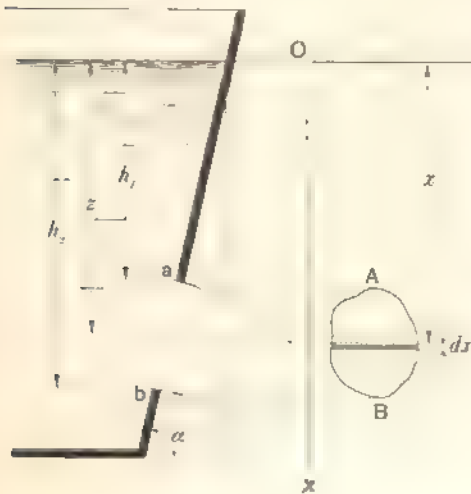
но такъ какъ  $v_0$ , вообще, неизвѣстно, то удобнѣе и этотъ случай разсматривать, какъ случай несовершеннаго сжатія.

## § 12. Истеченіе изъ большихъ отверстій.

До сихъ поръ мы разсматривали такіе случаи истеченія, когда безъ большей погрѣшности можно было считать давленіе по всему сѣченію оди-

наковымъ. Теперь пусть отверстие имѣетъ большую высоту по сравнению съ напоромъ и, слѣдовательно, напоры въ разныхъ его точкахъ существенно между собою различны. На фиг. 58 представленъ случай большого

отверстія *ab* въ плоской стѣнкѣ, наклоненной подъ угломъ *α* къ горизонту, при чемъ представлено также положеніе стѣнки и отверстія *AB* въ совмѣщеніи ихъ съ плоскостью чертежа. Изъ чертежа видно, что напоръ въ какой-нибудь точкѣ отверстія равенъ  $x \sin \alpha$ , гдѣ *x* есть координата этой точки относительно осей *Oxy* въ плоскости стѣнки (ось *Oy* есть линия пересѣченія свободной поверхности со стѣнкой). Выдѣлимъ въ отверстіи *AB* бесконечно узкій элементъ съ шириною *y* и толщиною *dx*; напоръ въ этомъ элементарномъ отверстіи назовемъ *z*; такъ какъ



Фиг. 58.

$$z = x \sin \alpha,$$

то

$$dx = \frac{dz}{\sin \alpha}.$$

Если бы все отверстие состояло изъ одного такого элемента, то, на основаніи предыдущаго, можно было бы выразить скорость вытеканія *v* и расходъ  $\Delta Q$  формулами:

$$v = \sqrt{2gz},$$

$$\Delta Q = \mu y dx \sqrt{2gz} = \mu y \frac{dz}{\sin \alpha} \sqrt{2gz} \dots \dots \dots (11)$$

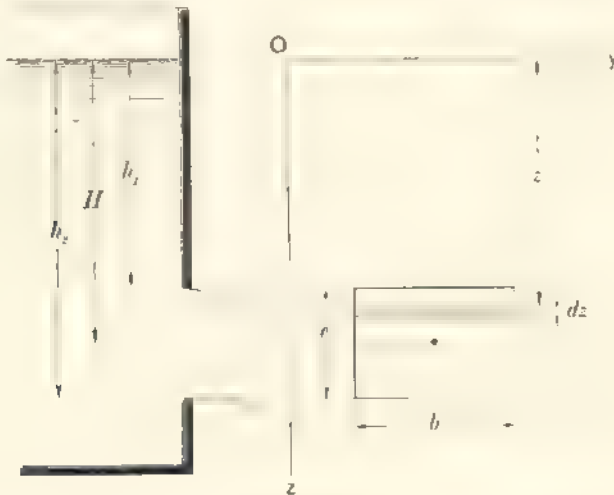
Предположимъ, что черезъ каждый подобный элементъ площади отверстія истеченіе происходитъ независимо отъ прочихъ элементовъ отверстія; тогда расходъ черезъ все отверстие получимъ, суммируя для всего отверстія выраженія вида (11). Подобное допущеніе, очевидно, неправильно; согласно съ нимъ мы должны были бы признать, что струйка, вытекающая въ точкѣ *a* подъ небольшимъ напоромъ (слѣдовательно, описывающая круто падающую параболу), не стѣсняетъ истеченія черезъ точку *b*, откуда струйка вытекаетъ подъ большимъ напоромъ по пологой параболѣ. Тѣмъ не менѣе, несмотря на всю неправильность этого допущенія, его все-таки дѣлаютъ, съ тѣмъ, однако, ограниченіемъ, что введенный въ выраженіе (11) и выносимый при интегрированіи за знакъ интеграла, какъ постоянное, коэффициентъ расхода  $\mu$  не считаютъ равнымъ коэффициенту расхода малыхъ

отверстий, а определяють изъ специальныхъ опытовъ. Итакъ, полный расходъ  $Q$  пишуть такъ:

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} \mu y \frac{dz}{\sin \alpha} \sqrt{2gz} = \frac{\mu \sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{h_1}^{h_2} y \sqrt{z} dz \dots \dots \dots (12)$$

Чтобы вычислить этотъ интеграль, нужно, конечно, знать зависимость  $y$  отъ  $z$ . Значеніе коэффициента  $\mu$  можно брать изъ опытовъ надъ малыми отверстиями въ тонкой стѣнкѣ, только какъ первое приближеніе.

1. *Отверстие прямоугольное* (фиг. 59) и сдѣлано въ вертикальной стѣнкѣ, такъ что  $\alpha = 90^\circ$  и  $\sin \alpha = 1$ . Размѣры отверстия назовемъ: горизонтальный (ширину) — черезъ  $b$ , вертикальный — черезъ  $e$ . Напоръ въ верхней кромкѣ пусть равняется  $h_1$ , а въ нижней —  $h_2$ :



Фиг. 59.

напоръ въ центрѣ тяжести отверстия назовемъ черезъ  $H$ . Примѣняя сюда общее уравненіе (12), мы должны положить въ немъ

$$y = b = const,$$

а потому

$$Q = \mu \sqrt{2g} b \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}) \dots \dots \dots (13)$$

Вычисленіе удобнѣе вести по высотѣ  $e$  отверстия и по напору  $H$  въ его центрѣ тяжести. Изъ чертежа видно, что

$$h_2 = H + \frac{e}{2} ;$$

$$h_1 = H - \frac{e}{2} .$$

Слѣдовательно,

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H^{3/2} \left[ \left( 1 + \frac{e}{2H} \right)^{3/2} - \left( 1 - \frac{e}{2H} \right)^{3/2} \right] .$$

Разложимъ оба степени по биному Ньютона

$$(1+a)^m = 1 + ma + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-k)}{1.2 \dots (k+1)} a^{k+1} + \dots$$

ограничиваясь притомъ только третьими степенями дроби  $\frac{1}{2H}$ , которая при  $h_1$ , отличномъ отъ нуля, всегда меньше единицы. Имѣемъ такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{e}{2H}\right)^3 &= 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{e}{2H} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4H^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.3} \cdot \frac{e^3}{8H^3} + \dots \\ \left(1 - \frac{e}{2H}\right)^3 &= 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{e}{2H} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4H^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.3} \cdot \frac{e^3}{8H^3} + \dots \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left(1 + \frac{e}{2H}\right)^3 - \left(1 - \frac{e}{2H}\right)^3 = \frac{3}{2} \left( \frac{e}{H} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2.3} \cdot \frac{e^3}{8H^3} \right) = \frac{3}{2} \frac{e}{H} \left( 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{H^2} \right)$$

Слѣдовательно:

$$Q = \mu b e \left( 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{H^2} \right) \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (13)$$

Для удобства вычислений пишемъ обыкновенно:

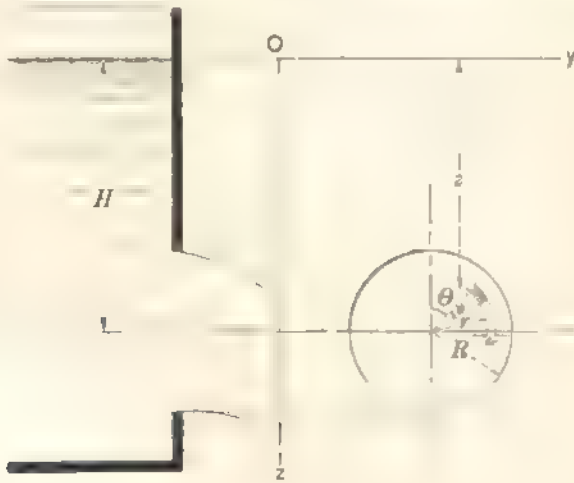
$$Q = \mu_0 b e \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (14)$$

при чемъ подъ  $\mu_0$  подразумѣваютъ величину

$$\mu_0 = \mu \left( 1 - \frac{1}{96} \frac{e^2}{H^2} \right);$$

величину  $\mu_0$  можно брать и изъ соответственныхъ опытовъ.

Понятно, что при надлежащемъ значеніи  $\mu_0$  формула (14) применима къ отверстиямъ, имѣющимъ форму параллелограмма съ одною горизонтальною стороною.



Фиг. 60.

II. Отверстіе кругое радиуса R (фиг. 60). Удобнѣе всего для составленія выраженія  $dQ$  взять элементъ площади, заключенной между двумя бесконечно близкими кон-

центрическими окружностями радиусов  $r$  и  $(r + dr)$  и двумя смежными радиусами, составляющими между собою угол  $d\theta$ , где через  $\theta$  обозначен угол между направлением оси  $Oz$  и радиусом  $r$ . Площадь его выразится через  $r \cdot d\theta \cdot dr$ . Расстояние элемента от уровня воды нужно принять равным

$$z = H - r \cos \theta,$$

где  $H$  есть напор в центр  $\theta$  отверстия.

Скорость струйки, вытекающей через этот элемент, по теореме Д. Бернулли, есть

$$v_1 = \sqrt{2g(H - r \cos \theta)};$$

поэтому расход через все сечение можно выразить двойным интегралом, вводя опытный коэффициент истечения  $\mu$ :

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot v_1 = \mu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \sqrt{2g(H - r \cos \theta)},$$

Это выражение напомним так:

$$Q = \mu \sqrt{2gH} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \left(1 - \frac{r}{H} \cos \theta\right)^{1/2}$$

или, разлагая в ряд и откидывая члены с степенями  $\frac{r}{H}$  выше второй, так как во всяком случае  $r < H$ , получаем:

$$Q = \mu \sqrt{2gH} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{H} \cos \theta - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{r^2}{H^2} \cos^2 \theta + \dots\right)$$

Интегрируя сначала по  $r$ , а потом по  $\theta$ , и, заменяя  $\cos^2 \theta$  через  $\frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ , находим:

$$Q = \mu \sqrt{2gH} 2\pi \left(\frac{R^3}{2} - \frac{1}{16} \frac{R^4}{4H^2}\right) = \mu \pi R^3 \sqrt{2gH} \left(1 - \frac{1}{32} \frac{R^2}{H^2}\right) \dots \dots (13')$$

Как и в предыдущем случае, можно ввести новый коэффициент

$$\mu_0 = \mu \left(1 - \frac{1}{32} \frac{R^2}{H^2}\right).$$

Тогда выражение (13') напишется так:

$$Q = \mu_0 \pi R^3 \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (14')$$

Если бы отверстие было полукруглым с горизонтальным диаметром, то, считая попрежнему  $H$  напором в центр круга, а не в центр тяжести сечения, и внося при интегрировании по  $\theta$  пределы от  $\frac{\pi}{2}$  и до  $\frac{3\pi}{2}$ , получим:

$$Q = \mu \sqrt{2gH} \left(\frac{\pi R^3}{2} + \frac{R^4}{3H} - \frac{1}{8} \frac{R^4}{4H^2} \frac{\pi}{2}\right),$$

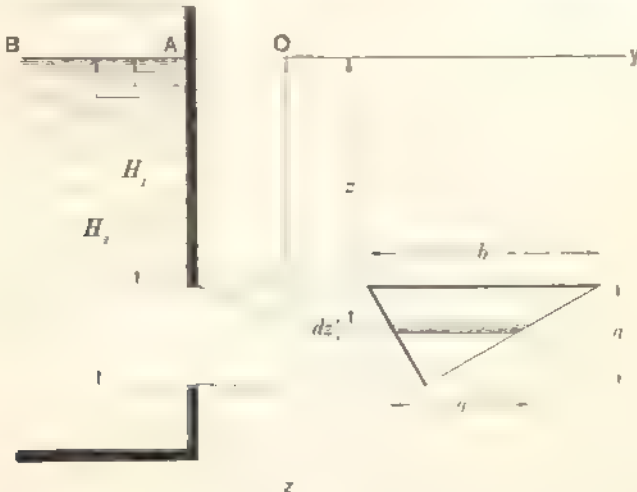
что можно представить так:

$$Q = \mu_0 \frac{\pi R^2}{2} \sqrt{2gH},$$

полагая

$$\mu_0 = \mu \left( 1 - \frac{R}{3\pi H} - \frac{1}{32} \frac{R^2}{H^2} \right).$$

III. *Отверстие треугольное* (фиг. 61) съ высотой  $a$  и основанием  $b$ . Пусть основание горизонтально и погружено под уровень воды  $AB$  на глубину  $H_1$ , а вершина на



Фиг. 61.

глубину  $H_2$ . Возьмем элемент отверстия въ видѣ бесконечно узкой горизонтальной полоски шириною  $dz$ , на глубинѣ  $z$  под уровнем, и обозначимъ длину полоски черезъ  $y$ . Тогда площадь этого элемента будетъ

$$dA = y dz,$$

а скорость истечения на этой глубинѣ

$$v = \sqrt{2gz}.$$

Но изъ подобія треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{y}{b} = \frac{H_2 - z}{a},$$

откуда

$$y = \frac{b}{a} (H_2 - z),$$

такъ что

$$dA = \frac{b}{a} (H_2 - z) dz.$$

Расходъ жидкости равенъ

$$Q = \int_0^{H_2} \mu v dA = \int_{H_1}^{H_2} \mu \sqrt{2gz} \left( \frac{b}{a} (H_2 - z) \right) dz$$

или, считая  $\mu$  для всѣхъ элементовъ сѣченія одинаковыми:

$$Q = \mu \frac{b}{a} \sqrt{2g} \left[ H_2 \int_{H_1}^{H_2} z^{1/2} dz - \int_{H_1}^{H_2} z dz \right] \dots \dots \dots (13''')$$

или:

$$Q = \mu \frac{b}{a} \sqrt{2g} \left[ \frac{4}{15} H_2^{3/2} - \frac{2}{15} H_1^{3/2} (5H_2 - 3H_1) \right].$$

Поятно, что и тутъ можно выразить напоры  $H_1$  и  $H_2$  по напору  $H$  въ центрѣ тяжести и высотѣ  $a$  треугольника:

$$H_1 = H - \frac{a}{3},$$

$$H_2 = H + \frac{2}{3} a,$$

и привести выраженіе расхода къ виду:

$$Q = \mu \cdot \text{площадь отверстия} \times \sqrt{2gH} \cdot \text{множитель, зависящій отъ } a \text{ и } H.$$

Получится сложное выраженіе, которому можно было бы дать видъ:

$$Q = \mu_0 \frac{ab}{2} \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (14'')$$

при чемъ  $\mu_0$  слѣдуетъ опредѣлять изъ специальныхъ опытовъ.

Вообще, для всякой формы отверстія можно всегда писать уравненія, по формѣ подобныя ур-ю (14):

$$Q = \mu_0 A \sqrt{2gH},$$

гдѣ  $A$  будетъ обозначать площадь отверстія,  $H$ —напоръ въ центрѣ тяжести отверстія; что касается коэффициента расхода  $\mu_0$ , то его надо брать изъ опытовъ съ такою же формой сѣченія. Какъ первое приближеніе, можно брать  $\mu$  по опытамъ съ малымъ отверстиемъ въ тонкой стѣнкѣ и находить  $Q$  по уравненіямъ, подобнымъ выраженіямъ (13'), (13'') и т. д.

Этотъ случай истеченія, одинъ изъ наиболее важныхъ въ практикѣ, былъ обстоятельно изслѣдованъ знаменитымъ *Poncelet* (1788—1868 г.) вмѣстѣ съ *Lesbros*, въ періодъ отъ 1827 до 1829 года, въ городѣ Мецѣ, по порученію французскаго военнаго министерства, и, затѣмъ, однимъ *Lesbros* въ 1829—1834 гг. Число опытовъ, произведенныхъ однимъ *Lesbros*, превышало 2000. Водоемы, которыми располагали эти ученые въ качествѣ сосудовъ, обладали огромною свободною площадью: одинъ имѣлъ 25.000  $m^2$ , а второй—15.000  $m^2$ , такъ что при расходѣ въ  $1\frac{1}{2}$   $m^3/sec$  уровень второго сосуда опускался только на 1  $mm$ . Слѣдовательно, постоянство напора въ этихъ опытахъ было соблюдено вполне достаточно. Всѣ измѣренія производились весьма тщательно; изучались, главнымъ образомъ, явленія истеченія изъ большихъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ. Отверстія были прямоугольныя, двухъ типовъ въ одномъ рядѣ опытовъ горизонтальный размѣръ  $b$  соста-



влять 20 см, въ другомъ—60 см; высота въ 1-мъ случаѣ измѣнялась отъ 1 до 20 см, а напоръ отъ очень маленькихъ до 1,7 *mtr* (коэффициенты доведены въ таблицахъ до 3 *mtr* напора уже путемъ экстраполяціи). Вычисления дѣлались по формулѣ:

$$Q = \mu_0 b (H - h) \sqrt{2g \frac{H + h}{2}},$$

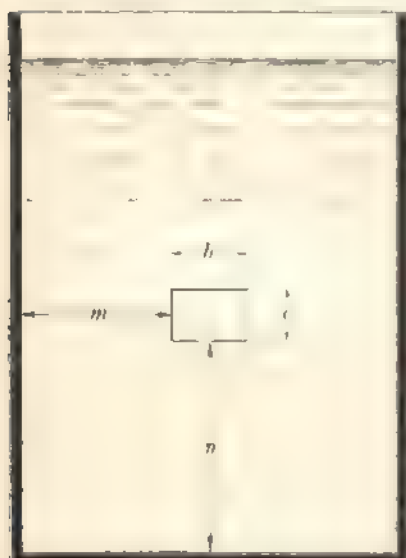
гдѣ  $H$  есть напоръ въ нижней кромкѣ отверстія, а  $h$ —въ верхней.

Въ таблицахъ, приведенныхъ ниже (см. § 14), дается именно напоръ  $h$ . т.-е. напоръ надъ верхнимъ ребромъ отверстія, при чемъ онъ измѣрялся не въ плоскости отверстія, а на нѣкоторомъ разстояніи отъ нея, такъ какъ свободная поверхность передъ самымъ отверстіемъ замѣтно понижается. Какъ легко видѣть, эта формула есть та самая, которую мы имѣли въ этомъ параграфѣ подь № 14. Изъ опытовъ можно заключить, что  $\mu$  вообще измѣняется и съ напоромъ. и съ высотой отверстія:

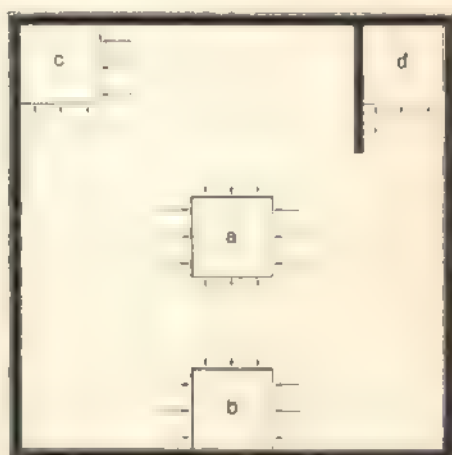
1) Чѣмъ больше напоръ, тѣмъ меньше  $\mu$ ; при этомъ, съ увеличеніемъ напора  $\mu$  приближается къ значенію 0,60, пока отверстие мало; при большихъ отверстіяхъ  $\mu$  сначала увеличивается, а потомъ уменьшается, вмѣстѣ съ увеличеніемъ напора, и приближается къ тому же предѣлу. Это вполне согласуется съ тѣмъ, что отмѣчено въ пунктѣ 3 § 11.

2) На  $\mu$  вляетъ наименьшій размѣръ сѣченія  $c$  (чѣмъ онъ меньше, тѣмъ  $\mu$  больше) до тѣхъ поръ, пока  $b < 20 c$ .

3) Чѣмъ меньше площадь отверстія и чѣмъ оно уже, тѣмъ больше  $\mu$ .



Фиг. 62.

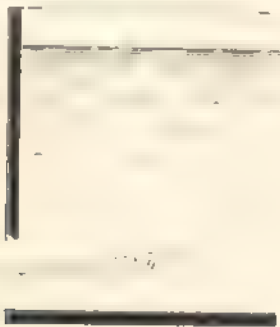


Фиг. 63.

Ко всѣмъ этимъ опытамъ Вейсбахъ вводитъ поправку на случай несовершеннаго сжатія (см. также § 14).

Во всѣхъ этихъ опытахъ высота нижней кромки отверстія надъ дномъ, а равно разстояніе вертикальныхъ кромокъ отъ боковыхъ стѣнокъ сосуда

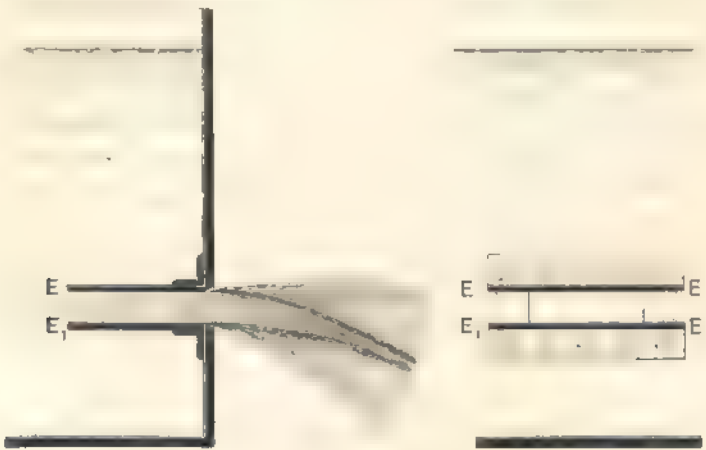
превышали длину соответствующаго ребра въ 2,7 и болѣе разъ, т.-е. раз-  
мѣръ  $m$  былъ болѣе  $2,7e$  и размѣръ  $n > 2,7b$  (фиг. 62). Какъ только этотъ  
предѣлъ съ какой-либо стороны не соблюденъ, замѣчается увеличеніе расхода.  
Это легко объясняется тѣмъ, что въ такомъ случаѣ сжатіе, хотя бы съ одной  
стороны, парализуется. Такъ, на фиг. 63 представлено дно сосуда съ че-  
тырьмя отверстіями: къ отверстию  $a$  вода притекаетъ со всѣхъ четырехъ  
сторонъ,—струя по всему периметру сжимается одинаково. Къ отверстию  $b$   
вода можетъ притекать только съ 3-хъ сторонъ, а со стороны, прикасаю-  
щейся къ стѣнкѣ сосуда, сжатіе устранено. Въ отверстиіи  $c$  сжатія нѣтъ по  
двумъ сторонамъ, а въ  $d$  оно есть только съ одной стороны. Такіе случаи  
постановки отверстій около стѣнокъ или со струенаправляющими (не длин-  
ными) перегородками, какъ въ  $d$ , сопровождаются такъ называемымъ  
*неполнымъ сжатіемъ* \*) (partielle contraction). То же замѣчается, если отверстие



Фиг. 64.

во-первыхъ, отклоненіе струи око-  
ло  $9^\circ$  отъ нормали къ плоскости  
отверстія въ сторону того мѣста  
гдѣ сжатіе устранено (фиг. 64);  
во-вторыхъ, струя сильно рас-  
текается въ стороны, какъ  
это видно на фиг. 65, предста-  
вляющей прямоугольное отверстіе,  
въ которомъ сжатіе устранено  
двумя внутренними перегородками  
 $EE$  и  $E_1E_1$ : вся струя, сжимаясь въ  
горизонтальномъ направленіи, силь-  
но расширяется въ вертикальномъ.

Если сжатіе устранить съ одной верхней стороны, то такое расширеніе струи  
будетъ меньше, но зато струя получитъ замѣтное отклоненіе кверху

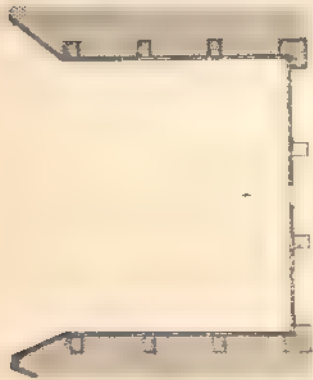


Фиг. 65.

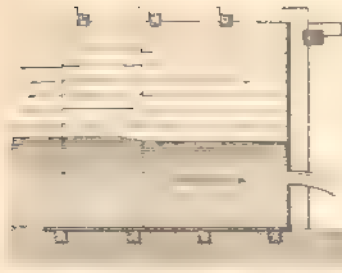
\*) Не смѣшивать съ *несовершеннымъ сжатіемъ*.



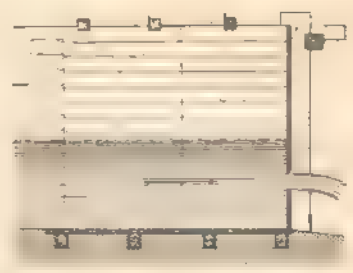
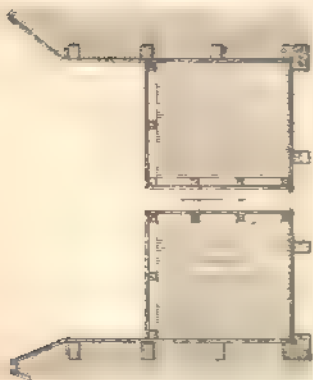
Фиг. А



Фиг. В



Фиг. С



Фиг. D

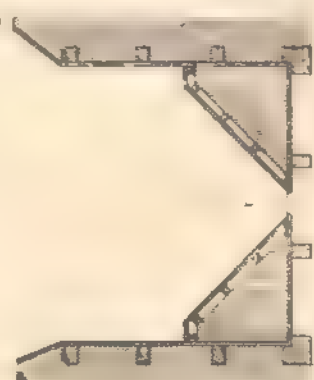
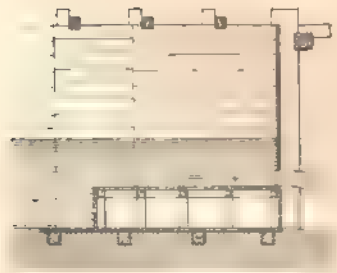
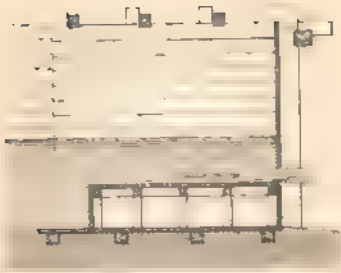


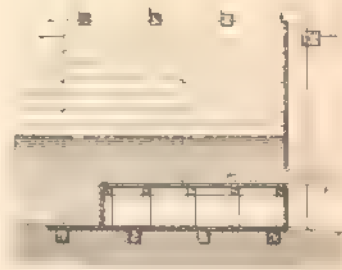
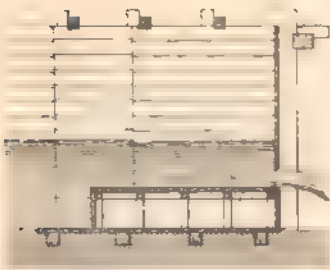
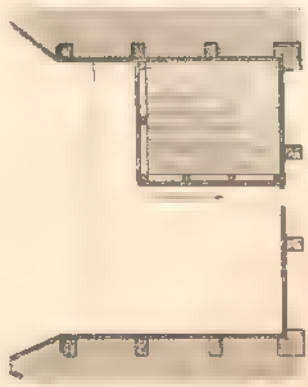
Таблица III.



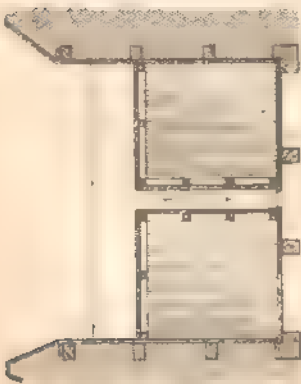
Фиг. Е



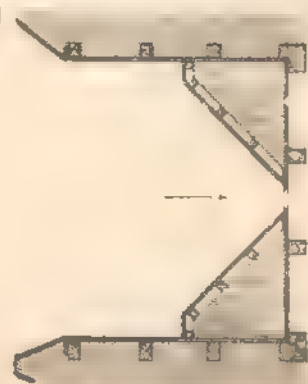
Фиг. F



Фиг. G



Фиг. H



(фиг. 66). При неполномъ сжатіи расходъ нѣсколько больше, чѣмъ при полномъ, но подобное растеканіе струи заставляетъ его избѣгать.

Изученіемъ этого явленія занимались Bidone, Michelotti, Lesbros и Weisbach. На основаніи данныхъ послѣдняго можно принять, что при прямоугольныхъ отверстіяхъ размѣромъ  $0,2 \text{ mtr} \times 0,1 \text{ mtr}$  и болѣе

$$\mu_{\text{неполное}} = (1 + 0,157 n) \mu,$$

гдѣ  $n$  есть отношеніе длины сторонъ, на которыхъ сжатіе устранено, къ полному периметру отверстія.



Фиг. 66.

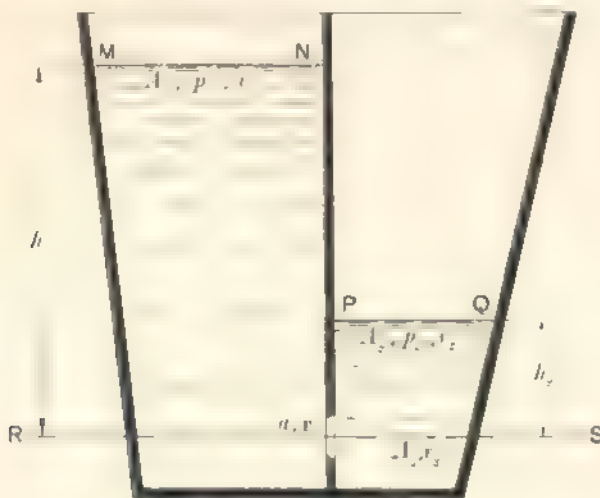
Lesbros наблюдалъ неполное сжатіе въ такихъ условіяхъ (см. табл. III): въ *A* сжатіе полное; въ такомъ же отверстіи *B* сжатіе устранено съ одной стороны вертикальной перегородкой; въ *C* такихъ перегородокъ двѣ; въ случаѣ *D* онѣ, оставаясь вертикальными, наклонены къ плоскости стѣнки подъ угломъ въ  $45^\circ$ . Далѣе тѣ же отверстія снабжены еще горизонтальной перегородкою (*E, F, G, H*). Ширина отверстій вездѣ была равна  $20 \text{ см}$ , а перегородки не доходили до кромки отверстія на  $2 \text{ см}$ . По уменьшающейся величинѣ коэффициента расхода  $\mu$  все случаи можно расположить въ такомъ порядкѣ:

$$\mu_{\text{max}}, G, H, F, C, E, D, B, A, \mu_{\text{min}}.$$

Опыты Lesbros не вполне сходятся съ вышеприведенной формулой Weisbach'a. Случай *G* часто встрѣчается въ практикѣ, когда, напримѣръ, шлюзовое отверстіе имѣетъ ширину подводящаго канала и доходить до его дна.

§ 13. Истечение под уровень.

Разсмотримъ теперь истечение под уровень безъ различія того обстоятельства, гдѣ сдѣлано отверстие, въ днѣ или стѣнкѣ, и какого оно размѣра. Напримѣръ, пусть оно сдѣлано въ стѣнкѣ (фиг. 67).



Фиг. 67.

Пусть въ общемъ случаѣ приняты мѣры къ тому, чтобы оба уровня оставались на постоянной высотѣ надъ центромъ тяжести отверстия, лежащимъ въ горизонтальной плоскости *RS*. Назовемъ площадь сосуда въ плоскости *MN* свободной поверхности, скорость течения здѣсь и давленіе черезъ  $A_1, v_1, p_1$ ; тѣ же величины для свободной поверхности *PQ* назовемъ соответственно черезъ  $A_2, v_2, p_2$ ; сѣченіе отверстия и скорость въ немъ  $a$  и  $v$ ; наконецъ, сѣченіе праваго сосуда въ плоскости *RS*—черезъ  $A_3$ , а скорость въ немъ—черезъ  $v_3$ . Предусматривая заранѣе, что и здѣсь возможно сжатіе и уменьшеніе скорости, введемъ коэффициентъ расхода  $\mu$ , написавъ уравненіе неразрывности жидкости:

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 = \mu a v.$$

Напишемъ уравненіе Д. Бернулли для движенія жидкости отъ уровня *MN* до уровня *PQ*, принимая *RS* за плоскость сравненія и имѣя въ виду, что вытекающая изъ отверстия струя должна сразу двигаться далѣе со скоростью  $v_3$ , т.-е., вводя въ уравненіе потерю напора на ударъ при измѣненіи скорости изъ  $v$  въ  $v_3$ :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{(v - v_3)^2}{2g}.$$

Ни въ это уравненіе, ни въ уравненіе расхода не входитъ ни одна величина, опредѣляющая положеніе отверстия подъ тѣмъ или другимъ уровнемъ.

А поэтому можно утверждать, что ни это положение, ни относительная величина напора по сравнению съ размѣрами отверстія роли не играютъ.

Если допустимъ, что

$$p_1 = p_2 = \text{атмосферному давлению } p,$$

если, далѣе, въ этомъ уравненіи всѣ скорости выразимъ по  $v$ , на основаніи уравненія расхода, то получимъ:

$$h_1 - h_2 = \frac{v^2}{2g} \left[ \left(1 - \frac{\mu a}{A_3}\right)^2 + \left(\frac{\mu a}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{\mu a}{A_1}\right)^2 \right],$$

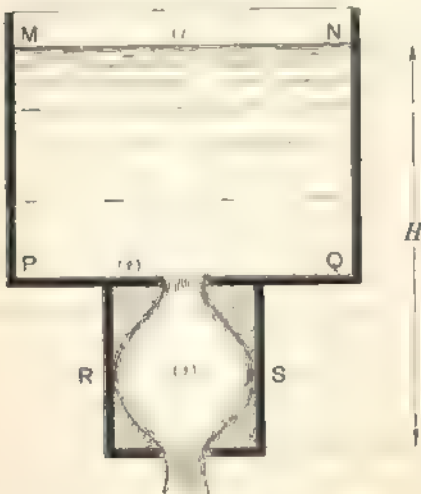
откуда

$$v = \sqrt{\frac{2g(h_1 - h_2)}{\left(\frac{\mu a}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{\mu a}{A_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{\mu a}{A_3}\right)^2}}.$$

Если сжатіе совершенно, т.-е., если всѣ отношенія  $\frac{a}{A_1}$ ,  $\frac{a}{A_2}$ ,  $\frac{a}{A_3}$ , очень малы, то съ достаточной точностью можно написать:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \\ Q &= \mu a \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

По Вейсбаху коэффициентъ  $\mu$  въ этомъ случаѣ на  $1\frac{1}{3}\%$  меньше, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ вытеканія въ атмосферу, а по Hamilton Smith'у коэффициентъ расхода при истеченіи подъ уровень меньше, нежели въ случаѣ истеченія въ атмосферу, только при малыхъ напорахъ и малыхъ отверстіяхъ: при отверстіяхъ больше  $0,3 \times 0,3 \text{ mtr}$ , а также при напорахъ свыше  $3 \text{ mtr}$ , разница уже ничтожна.



Фиг. 68.

Если сжатіе несовершенное (отношенія  $\frac{a}{A_1}$ ,  $\frac{a}{A_2}$  и  $\frac{a}{A_3}$  велики), то скорость и расходъ все-таки опредѣляются по уравненію (15), но для  $\mu$  здѣсь берутся разные значенія, смотря по степени несовершенства сжатія, на основаніи таблицъ Вейсбаха. Какъ видно, въ случаѣ истеченія подъ уровень скорость зависитъ только отъ высоты  $h_1 - h_2$  стоянія одного уровня надъ другимъ.

Подобно тому, какъ мы внесли потерю на ударъ въ этомъ случаѣ, необходимо вносить ее и во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ можно ожидать ее, т.-е. гдѣ существуетъ внезапное измѣненіе

сѣченія. Подобный случай мы имѣемъ, напримѣръ, въ сосудѣ вида фиг. 68. Всѣ величины, относящіяся къ сѣченію *mn*, будемъ отмѣчать значками (<sub>1</sub>), къ сѣченію *pq* — значками (<sub>2</sub>), къ сѣченію *rs* — значками (<sub>3</sub>), а для нижняго отверстия будемъ ставить буквы безъ значковъ. Коэффициентъ расхода въ сѣченіи *pq* назовемъ черезъ  $\mu_2$ , а въ нижнемъ отверстии—черезъ  $\mu$ . Какъ уже сказано, изъ опытовъ Вейсбаха слѣдуетъ, что

$$\mu_2 = 0,986 \mu.$$

Понятно, что уравненіе Д. Бернулли слѣдуетъ здѣсь написать такъ

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + \frac{(v_2 - v_3)^2}{2g},$$

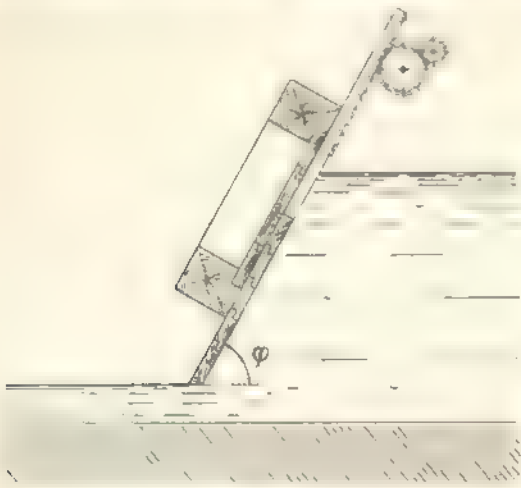
а уравненіе расхода:

$$Q = A_1 v_1 = \mu_2 A_2 v_2 = A_3 v_3 = \mu A v.$$

На основаніи обѣихъ строкъ получаемъ:

$$v = \sqrt{\frac{2g \left( H - \frac{p_1 - p}{\gamma} \right)}{1 - \left( \frac{\mu A}{A_1} \right)^2 - \mu^2 A^2 \left( \frac{1}{\mu_2 A_2} - \frac{1}{A_3} \right)^2}}.$$

Въ связи съ истеченіемъ подъ уровень стоитъ случай, когда къ отверстию приставляють желобъ, такъ что вытекающая струя падаетъ не свободно, а принуждена двигаться по желобу. Этотъ вопросъ освѣщенъ опытами того же Lesbros. Отверстія у него были шириною въ 0,2 *mt*r и высотой отъ 0,1 до 0,2 *mt*r. Ширина желоба была тоже



Фиг. 69.

0,2 *mt*r, т.-е. была какъ разъ равна ширинѣ отверстия. Двѣ серіи его опытовъ отличались устройствомъ желоба: одинъ былъ горизонтальный и имѣлъ длину въ 3 *mt*r, а другой имѣлъ уклонъ въ  $\frac{1}{10}$  и длину въ 2,5 *mt*r. Внутренняя обдѣлка отверстій соответствовала условіямъ какъ полнаго, такъ и неполнаго сжатія (кромѣ случая *B* табл. III).

Оказывается, желобъ вообще уменьшаетъ расходъ, наклонный—въ меньшей степени, горизонтальный—въ большей (какъ и слѣдовало ожидать, такъ какъ коэффициентъ  $\mu$  въ опытахъ Lesbros и тутъ вычислялся по напору въ центрѣ тяжести, а не по напору, равному разстоянію между уровнями передъ и за отверстиемъ,

какъ бы слѣдовало). При уклонѣ желоба въ  $\frac{1}{23}$  вліяніе его уже незаметно.

Здѣсь уместно упомянуть еще, какъ характеристику неполнаго сжатія, стоящаго въ связи съ присутствіемъ желоба, о той формѣ шлюзовыхъ отверстій, которая очень распространена при подвижныхъ водяныхъ колесахъ,—о наклонныхъ шлюзахъ (фиг. 69).

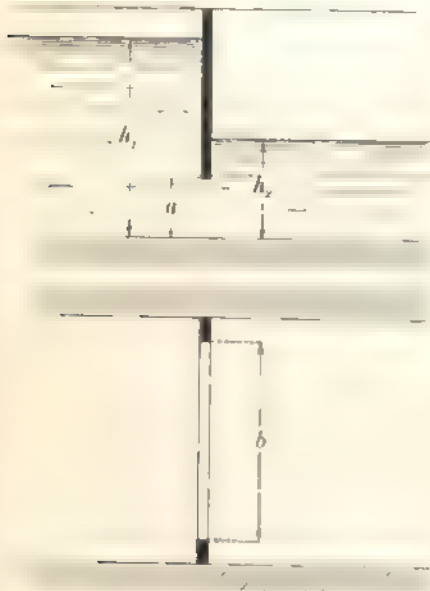


Они удобны не только для установки под ними колеса, но и дают большой расход. Poncelet ставил их под своими колесами и напелъ:

$$\begin{aligned} \text{при } \varphi = 45^\circ & \dots \dots \dots \mu = 0,50, \\ \text{„ } \varphi = 63^\circ 20' & \dots \dots \dots \mu = 0,74. \end{aligned}$$

Къ сожалѣнню, размѣры отверстій, для которыхъ онъ даетъ эти значенія  $\mu$ , не извѣстны.

При  $\varphi = 90^\circ$ , ежати съ 4-хъ сторонъ и горизонтальномъ желобѣ Lesbros напелъ  $\mu = 0,63$  при размѣрахъ  $b = 0,2 \text{ mtr}$ ,  $e = 0,05 \text{ mtr}$ ; эта величина значительно меньше данныхъ Poncelet и объясняется наклономъ стѣнки.



Фиг. 70.

Къ сожалѣнню, опыты Lesbros, распространявшіеся на довольно большіе напоры, касались только малыхъ отверстій ( $20 \times 20 \text{ см}$ ). Vogemann, наоборотъ, имѣлъ довольно большія отверстія (фиг. 70), но зато малые напоры. Именно, онъ сдѣлалъ 63 опыта (Civilingenieur, 1880—81), въ которыхъ:

$h_1$  измѣнялось отъ 0,049 *mtr* до 0,415 *mtr*,  
 $h_2$  „ „ 0,043 „ „ 0,264 „ „  
 $b$  было трехъ размѣровъ: 0,52, 0,78 и 1,0 *mtr*,  
 $Q$  измѣнялось отъ 48 *lt* до 135 *lt*.

Онъ пишетъ:

$$Q = \mu ab \sqrt{2g(h_1 - h_2)};$$

при этомъ  $\mu$  можно вычислить при подобныхъ условіяхъ изъ формулы:

$$\mu = 0,43479 + 0,2566 \sqrt{\frac{a}{h_1 + \frac{a}{2}}} + 0,03121 \frac{1}{h_2 + \frac{a}{2}} \sqrt{\frac{1}{b}}$$

### § 14. Результаты опытовъ надъ истеченіемъ изъ отверстій.

I. Малыя отверстія въ тонкой стѣнкѣ; напоръ по всей площади постояненъ.

а) Отверстіе въ горизонтальномъ днѣ (табл. 1).

Таблица 1. Опыты Bossut.

Напоръ 11' 8" 10" старой парижской системы \*).

Диаметръ круга или сторона квадрата въ линіяхъ.	$\mu$	$\alpha$	$\varphi = \frac{\mu}{\alpha}$
Кругъ . . . . . 12	0,6164	0,666	0,926
„ . . . . . 24	0,6179	0,659	0,937
Квадратъ . . . . . 12	0,6157	0,666	0,924
(среднія значенія: . . . . .	0,616	0,666 $\left( = \frac{2}{3} \right)$	0,925

\*) 1 старый парижскій футъ — 12' = 144" = 0,324839 *mtr*  $\sim$  325 *mm*.

По Michelotti, при больших отверстиях ( $d = 6''$ )  $\mu = 0,618$ , а при  $d = 3''$  коэффициент  $\mu = 0,611$ , при малых напорах  $\mu$  увеличивается соответственно до 0,619 и до 0,612, т.-е. весьма мало.

b) *Отверстие в стенку сосуда* (см. табл. 2).

Таблица 2 (составлена по Вейсбаху).

Диаметры круглых отверстий въ <i>mm</i>	При напорахъ въ <i>mtz</i> :						
	0,02	0,101	0,250	0,600	0,909	13,57	103,58
	получены коэффициенты $\mu$ :						
10	0,711	0,665	0,637	0,628	0,641	0,632	0,600
20	—	—	0,629	0,621	—	—	—
30	—	—	0,622	0,614	—	—	—
40	—	—	0,614	0,607	—	—	—

Значения 1, 2, 4, 5 и 7 вертикальныхъ строкъ относятся къ отверстию со скругленными кромками.

Въ среднемъ  $\mu = 0,62$ ;  $\varphi = 0,97$ ;  $\alpha = 0,64$ .

Съ увеличеніемъ напора  $\mu$  уменьшается, а также,  $\varphi$  увеличивается.

Съ увеличеніемъ отверстия  $\mu$  уменьшается.

c) *Отверстія въ боковой стѣнкѣ* по опытамъ Bovey (таблицы 3 и 4).

Въ этихъ двухъ таблицахъ коэффициентовъ  $\mu$  буквою *T* помѣчены результаты опытовъ надъ отверстиемъ, толщина стѣнки котораго была равна 0,16"; буквою *S* отмѣчены, наоборотъ, случаи тонкой стѣнки съ острыми кромками.

Таблица 3.

Площадь каждаго изъ отверстій = 0,197 кв. дм.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Напоръ въ футахъ.	Круглое.		Квадратное съ вертикальными:			Прячюугольное				
			сторонами.		диаго- налями.	$h = 2b$		$h = \frac{b}{2}$	$h = 4b$	$h = \frac{1}{4}b$
	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>	<i>S</i>
1	0,624	0,618	0,623	0,628	0,623	0,635	0,640	0,641	0,658	0,659
2	0,616	0,611	0,613	0,621	0,619	0,626	0,633	0,632	0,646	0,646
4	0,610	0,607	0,606	0,617	0,614	0,619	0,629	0,629	0,637	0,637
10	0,606	0,604	0,602	0,610	0,611	0,612	0,624	0,623	0,630	0,629
20	0,604	0,601	0,600	0,610	0,609	0,602	0,620	0,620	0,622	0,622

Таблица 4.

Площадь каждого из отверстій = 0,0625 кв. дм.

1	2		3		4		5		6		7		8		9	
	Круглое		Квадратное съ верт. стор.		Прямоугольное. $h = 2b$		Прямоугольное. $h = 4b$									
	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>	<i>T</i>	<i>S</i>
1	0,678	0,620	0,643	0,627	0,662	0,640	0,688	0,671								
2	0,618	0,613	0,631	0,621	0,643	0,629	0,655	0,657								
4	0,610	0,605	0,620	0,615	0,631	0,620	0,642	0,643								
10	0,604	0,600	0,613	0,608	0,621	0,613	0,629	0,629								
20	0,601	0,597	0,607	0,604	0,618	0,608	0,621	0,622								

Отсюда слѣдуетъ:

1) Съ увеличеніемъ напора расходъ уменьшается; при малыхъ напорахъ это замѣчается рѣзче.

2) Въ толстой (*T*) стѣнкѣ расходъ нѣсколько больше, чѣмъ въ тонкой (*S*), что опять таки рѣзче видно при малыхъ напорахъ; при очень малыхъ напорахъ и очень узкомъ отверстіи (первыя цифры столбцовъ 8 и 9 таблицы 4) наблюдается даже обратное.

3) Изъ сравненія графъ 8 и 9, 10 и 11 таблицы 3 видимъ, что расходъ не зависитъ отъ расположенія прямоугольнаго отверстія, т.-е. больший или меньшій размѣръ играетъ роль высоты *h* сѣченія.

4) Съ увеличеніемъ отверстія при большихъ напорахъ расходъ увеличивается, при малыхъ и среднихъ напорахъ уменьшается, — результатъ, согласный съ опытами Вейсбаха.

5) Чѣмъ щелеобразнѣе отверстие при той же площади, тѣмъ больше расходъ.

4) *Несовершенное сжатіе* имѣетъ мѣсто, когда передъ отверстіемъ съ площадью  $A_1$  имѣетъ мѣсто замѣтная скорость, т.-е. когда площадь  $A_0$  сосуда передъ отверстіемъ не очень велика. Если отношеніе  $\frac{A_1}{A_0} = n$ , то коэффициентъ расхода  $\mu_n$  по коэф-ту  $\mu_0$  (совершенное сжатіе) выражается Вейсбахомъ такъ:

для круглыхъ отверстій:

$$\mu_n = \mu_0 \{1 + 0,04564 (14,821^n - 1)\} = \mu_0 (1 + l_1),$$

для прямоугольныхъ:

$$\mu_n = \mu_0 \{1 + 0,076 (9^n - 1)\} = \mu_0 (1 + l_1).$$

Значенія  $\mu_0$  надо брать по вышеприведеннымъ даннымъ, напр., по табл. 2; значенія же  $l$  и  $l_1$  подсчитаны для разныхъ  $n$  въ слѣдующей таблицѣ (5)

Таблица 5.

$n$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$l$	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112	0,134	0,161	0,189	0,260	0,351	0,471	0,631
$l_1$	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128	0,152	0,178	0,208	0,278	0,365	0,473	0,604

Эти формулы (а следовательно, и таблица) справедливы для сосуда вида фиг. 57, т.-е. когда отверстие concentрично съ плоской стѣнкой площадью  $A_0$ , надъ которой возвышаются призматически остальные стѣнки сосуда безъ всякихъ рѣзкихъ измѣненій сѣченія. Для случая фиг. 56 Вейсбахъ нашелъ, что истинный коэффициентъ  $\mu_n$  можно опредѣлять по коэффициенту  $\mu_0$  при совершенномъ сжатіи такъ:

$$\mu_n = \mu_0 (1 + 0,102n + 0,067n^2 + 0,046n^3) = \mu_0 (1 + l_2).$$

Здѣсь  $n$  имѣть то же значеніе, что и выше. По этой формулѣ подсчитать рядъ значеній  $l_2$  при разныхъ  $n$  (см. табл. 6):

Таблица 6.

$n$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
$l_2$	0,013	0,027	0,043	0,060	0,080	0,102	0,127	0,152	0,181	0,227

Меньшее, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ, увеличеніе коэф-та расхода объясняется тѣмъ, что при входѣ въ трубку  $MM$  имѣетъ мѣсто сжатіе.

е) *Неполное сжатіе.*

Когда сжатіе устранено по длинѣ  $n$  периметра отверстия, а этотъ послѣдній имѣть длину  $p$ , то, по Бидону, коэф-тъ расхода будетъ

для прямоугольныхъ отверстій.....  $\mu_n = \mu_0 \left(1 + 0,152 \frac{n}{p}\right),$

для круглыхъ отверстій. ... ..  $\mu_n = \mu_0 \left(1 + 0,128 \frac{n}{p}\right);$

$\mu_0$  есть коэффициентъ расхода для даннаго случая при полномъ сжатіи  $\left(\frac{n}{p} = 0\right)$ . Эти выраженія тѣмъ точнѣе, чѣмъ меньше  $\frac{n}{p}$ . По Вейсбаху, въ случаѣ прямоугольныхъ большихъ отверстій нужно брать:

$$\mu_n = \mu_0 \left(1 + 0,157 \frac{n}{p}\right).$$

II. Большія отверстія.

а) Коэффициенты расходов  $\mu$ , въ *катортнвыхъ* отверстіяхъ въ вертикальной тонкой стѣнѣ, по Hamilton Smith'y („Hydraulics“, New-York, 1886, p. 58), приведены въ таблицѣ 7.

Таблица 7 \*).

Напоръ въ центрѣ отверстія въ <i>mt.</i>	При сторонѣ квадрата въ <i>mt.</i>					
	0,0061	0,0152	0,0304	0,061	0,182	0,304
0,122	—	0,637	0,621	—	—	—
0,152	—	0,633	0,619	0,605	0,597	—
0,182	0,660	0,630	0,617	0,605	0,598	—
0,213	0,656	0,628	0,616	0,605	0,599	0,596
0,243	0,652	0,625	0,615	0,605	0,600	0,597
0,274	0,650	0,623	0,614	0,605	0,601	0,598
0,304	0,648	0,622	0,613	0,605	0,601	0,599
0,428	0,642	0,618	0,610	0,605	0,602	0,601
0,608	0,637	0,615	0,608	0,605	0,604	0,602
0,912	0,632	0,612	0,607	0,605	0,604	0,603
1,216	0,628	0,610	0,606	0,605	0,603	0,602
1,824	0,623	0,609	0,605	0,604	0,603	0,602
2,432	0,619	0,608	0,605	0,604	0,603	0,602
3,040	0,616	0,606	0,604	0,603	0,602	0,601
6,080	0,606	0,603	0,602	0,602	0,601	0,600
30,400	0,599	0,598	0,598	0,598	0,598	0,598

Эта таблица подтверждаетъ первыми четырьмя столбцами предыдущіе выводы объ измѣненіи коэффициента расхода съ напоромъ и величиною отверстія, пока оно мало. При большихъ отверстіяхъ съ увеличеніемъ напора расходъ сначала увеличивается, и потомъ уменьшается. При очень большихъ напорахъ ( $\infty 30$  *mt.*) коэф-тъ расхода, повиданому, не зависитъ отъ величины отверстія и приближается къ постоянной величинѣ  $\infty 0,598$ .

\*) При пересчетѣ таблицы Смитъ было принято, что  $l' = 0,304$  *mt.* Въ этой и послѣдующихъ таблицахъ жирнымъ шрифтомъ отмѣчены наибольшія значенія коэффициента расхода.

б) Коэффициенты расхода через *круглые* отверстия в вертикальной тонкой стенке (по Hamilton Smith'y, „Hydraulics“, стр. 59) (см. табл. 8):

Таблица 8 <sup>\*)</sup>.

Напоръ въ центрѣ отверстия въ <i>mt.</i>	При диаметрахъ въ <i>mt.</i>					
	0,0061	0,0152	0,0304	0,0608	0,182	0,304
0,122	—	0,631	0,618	—	—	—
0,152	—	0,627	0,615	0,600	0,592	—
0,182	0,655	0,624	0,613	0,601	0,593	—
0,213	0,651	0,622	0,611	<b>0,601</b>	0,594	0,590
0,243	0,648	0,620	0,610	<b>0,601</b>	0,594	0,591
0,274	0,646	0,618	0,609	0,601	0,595	0,591
0,304	0,644	0,617	0,608	0,600	0,595	0,591
0,426	0,638	0,613	0,605	0,600	0,596	0,593
0,608	0,632	0,610	0,604	0,599	0,597	0,595
0,912	0,627	0,606	0,603	0,599	<b>0,598</b>	<b>0,597</b>
1,216	0,623	0,605	0,602	0,599	0,597	0,596
1,824	0,618	0,604	0,600	<b>0,598</b>	0,597	0,596
2,432	0,614	0,603	0,600	0,598	0,596	0,596
3,040	0,611	0,601	0,598	0,597	0,596	0,595
6,080	0,601	0,598	0,596	0,596	0,596	0,594
30,400	0,593	0,592	0,592	0,592	0,592	0,592

Въ этомъ случаѣ коэффициенты всё нѣсколько ниже, чѣмъ для квадратныхъ отверстій, что хорошо согласуется съ вышеприведенными опытами Вомеу (таблицы 3 и 4). Замѣчания, сдѣланныя по поводу таблицы 2, остаются въ силѣ и здѣсь. При очень большихъ напорахъ для круглыхъ отверстій  $\mu \approx 0,591$ .

в) Коэффициенты расхода через *прямоугольные* отверстия (*b* — горизонтальный, *h* — вертикальный размѣры отверстия) в тонкой вертикальной стенкѣ (по опытамъ Poncelet и Lesbros) (см. табл. 9); звездочкой отмѣчены здѣсь числа, начиная съ которыхъ значенія  $\mu$  получены экстраполированіемъ.

<sup>\*)</sup> При пересчетѣ было принято, что  $1' = 0,304 \text{ mt.}$

Таблица 9.

Напоръ  $H_1$  измѣрялся на вѣкоторомъ разстояніи отъ отверстія, гдѣ можно было принять свободную поверхность за горизонтальную плоскость.

Напоръ $H_1$ въ <i>мтр</i> надъ верхнимъ ребромъ отвер- стія.	Размѣръ $b=0,200$ <i>мтр.</i>						Разм. $b=0,6$ <i>мтр.</i>	
	Р а з м ѣ р њ <i>h</i> п њ <i>ш</i> <i>t</i> <i>г.</i>						Разм. <i>h</i> въ <i>мтр.</i>	
	0,01	0,02	0,03	0,05	0,10	0,20	0,02	0,20
0,010	0,701	0,660	0,630	0,607	—	—	0,644	—
0,015	0,697	0,660	0,632	0,612	0,593	—	0,644	—
0,02	0,694	0,659	0,634	0,615	0,596	0,572	0,643	—
0,03	0,688	0,659	0,638	0,620	0,600	0,578	0,642	0,593
0,04	0,683	0,658	0,640	0,623	0,603	0,582	0,642	0,595
0,05	0,679	0,658	0,640	0,625	0,605	0,585	0,641	0,597
0,06	0,676	0,657	0,640	0,627	0,607	0,587	0,641	0,599
0,07	0,673	0,656	0,639	0,628	0,609	0,588	0,640	0,600
0,08	0,670	0,656	0,638	0,629	0,610	0,589	0,640	0,601
0,09	0,668	0,655	0,637	0,629	0,610	0,591	0,639	0,601
0,10	0,666	0,654	0,637	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
0,12	0,663	0,653	0,636	0,630	0,612	0,593	0,638	0,603
0,14	0,660	0,651	0,635	0,630	0,613	0,595	0,637	0,603
0,16	0,658	0,650	0,634	0,631	0,614	0,596	0,637	0,604
0,18	0,657	0,649	0,634	0,630	0,615	0,597	0,636	0,605
0,20	0,655	0,648	0,633	0,630	0,615	0,598	0,635	0,605
0,25	0,653	0,646	0,632	0,630	0,616	0,599	0,634	0,606
0,3	0,650	0,644	0,632	0,629	0,616	0,600	0,633	0,607
0,4	0,647	0,642	0,631	0,628	0,617	0,602	0,631	0,607
0,5	0,644	0,640	0,630	0,628	0,617	0,603	0,630	0,607
0,6	0,642	0,638	0,630	0,627	0,617	0,604	0,629	0,607
0,7	0,640	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604	0,628	0,607
0,8	0,637	0,636	0,629	0,627	0,616	0,605	0,628	0,606
0,9	0,635	0,634	0,628	0,626	0,615	0,605	0,627	0,606
1,0	0,632	0,633	0,628	0,626	0,615	0,605	0,626	0,605
1,1	0,629	0,631	0,627	0,625	0,614	0,604	0,626	0,604
1,2	0,626	0,628	0,626	0,624	0,614	0,604	0,625	0,604
1,3	0,622	0,625	0,624	0,622	0,613	0,603	0,624	0,603
1,4	0,618	0,622	0,622	0,621	0,612	0,603	0,624	0,603
1,5	0,615*	0,619*	0,620*	0,620	0,611	0,602	0,623	0,602
1,6	0,613	0,617	0,618	0,618	0,611	0,602	0,623	0,602
1,7	0,612	0,615	0,616	0,617	0,610*	0,602*	0,622	0,602*
1,8	0,612	0,614	0,615	0,615*	0,609	0,601	0,621*	0,602
1,9	0,611	0,612	0,613	0,614	0,608	0,601	0,621	0,602
2,0	0,611	0,612	0,612	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
3,0	0,609	0,610	0,608	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

Изъ этой таблицы слѣдуетъ:

1) Для малыхъ отверстій, при чемъ главную роль играетъ наименьшій размѣръ сѣченія, съ увеличеніемъ напора расходъ убываетъ.

2) Для отверстій съ наименьшимъ размѣромъ  $h > 30 \text{ mm}$  коэффициентъ расхода сначала возрастаетъ, а потомъ убываетъ вмѣстѣ съ увеличеніемъ напора, съ замѣтнымъ стремленіемъ къ числамъ, даннымъ Smith'омъ для квадратныхъ отверстій.

3) Вообще, большей площади отверстия соотвѣтствуетъ меньшій коэффициентъ расхода.

4) Чѣмъ больше ширина отверстия, тѣмъ менѣе вліяетъ напоръ на величину коэффициента расхода.

Опредѣленный только въ некоторыхъ случаяхъ коэффициентъ скорости  $\varphi$  и здѣсь сохраняетъ приблизительно свою величину:  $\varphi = 0,98$ .

д) *Несовершенное сжатіе.*

Вообще остается въ силѣ поправка Вейсбаха, приведенная въ п. I, д этого §. Въ частности для отверстій Poncelet, поставленныхъ въ водопроводномъ ларѣ, Weisbach даетъ еще слѣдующее выраженіе коэф-та расхода, когда отношеніе  $n$  площади отверстия  $A$  къ площади сѣченія ларя  $A_0$   $\left( \frac{A}{A_0} - n \right)$  не превосходитъ 0,5:

$$\mu_n = \mu_0 (1 + 0,641n^2) - \rho\mu_0,$$

гдѣ  $\mu_0$  есть коэф-тъ изъ опытовъ Poncelet и Lesbros.

Таблица 10 даетъ величины коэффициента  $\rho$  для разныхъ  $n$ .

Таблица 10.

$n$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\rho$	1,002	1,008	1,014	1,026	1,040	1,058	1,079	1,103	1,130	1,160

е) *Неполное сжатіе.*

Lesbros производилъ опыта съ истеченіемъ въ воздухъ изъ квадратнаго отверстия  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ cm}$ , при чемъ передъ отверстиемъ устанавливались перегородки по типамъ фигуръ таблицы II отъ A до H. Результаты опытовъ приведены ниже, въ табл. 11:

Таблица 11.

Значенія  $\mu$  въ формулѣ  $(\mu = \mu_0 \sqrt{2\eta \left( H_1 + \frac{e}{2} \right)})$ ; напоръ измѣрялся, какъ въ таблицѣ 9.

Отверстия устроены по типамъ таблицы III. Размѣръ  $e = 0,2 \text{ mtr.}$

Напоръ $H_1$ въ перьяхъ кромки отверстія въ $\text{mtr.}$	A	B	C	D	E	F	G	H
0,02	0,572	0,587	—	0,589	0,599	—	—	—
0,05	0,585	0,593	0,631	0,595	0,608	0,622	—	0,636
0,10	0,592	0,600	0,631	0,601	0,615	0,628	—	0,639
0,20	0,598	0,606	0,632	0,607	0,621	0,633	0,708	0,643
0,50	0,603	0,610	0,631	0,611	0,623	0,636	0,680	0,644
1,00	0,605	0,611	0,628	0,612	0,624	0,637	0,667	0,642
1,50	0,602	0,611	0,627	0,611	0,624	0,637	0,672	0,641
2,00	0,601	0,610	0,626	0,611	0,619	0,636	0,668	0,640
3,00	0,601	0,609	0,624	0,610	0,614	0,634	0,665	0,638



Таблица 11 даёт несколько меньшие коэффициенты расхода, нежели формула Вейсбаха, приведенная выше (см. I, e):

$$\mu_n = \mu_0 \left( 1 + 0,15 \frac{h}{p} \right).$$

Слѣдующая таблица (см. табл. 12) даёт, по Lesbros, понятие о вліяніи частичнаго затопления отверстия вслѣдствие приставленнаго къ нему желоба; поперечные размѣры желоба равны размѣрамъ отверстия (20 см — 20 см; длина его — 3 мтр; положенъ опъ горизонтально (отмѣченная звѣздочкой колонны относятся къ наклонному желобу длиною въ 2½ мтр при уклонѣ 1/10).

Таблица 12.

Коэф-ты  $\mu$  въ формулѣ  $Q = abc \sqrt{2g \left( H_1 + \frac{v^2}{2g} \right)}$  при отверстияхъ, устроенныхъ по табл. III: размѣръ  $e$  былъ равенъ 0,2 мтр.

Напоръ $H_1$ въ верхней крайней отверстию въ мтр.	A	B	C	E	E*	F	F*	G	G*	H
0,02	0,480	0,480	0,496	0,480	0,527	—	—	—	—	0,468
0,05	0,511	0,517	0,531	0,510	0,553	0,560	0,546	0,528	—	0,520
0,10	0,542	0,545	0,563	0,538	0,574	0,534	0,569	0,560	0,593	0,552
0,20	0,574	0,576	0,591	0,566	0,592	0,562	0,589	0,589	0,617	0,582
0,50	0,599	0,602	0,621	0,592	0,607	0,591	0,608	0,591	0,632	0,613
1,00	0,601	0,609	<b>0,628</b>	0,600	0,610	0,601	0,615	0,601	0,638	0,623
1,50	0,601	0,610	0,627	0,602	<b>0,610</b>	0,604	0,617	0,604	0,641	<b>0,624</b>
2,00	<b>0,601</b>	<b>0,610</b>	0,626	<b>0,602</b>	0,609	<b>0,604</b>	<b>0,617</b>	<b>0,604</b>	<b>0,642</b>	0,624
3,00	0,601	0,609	0,624	0,601	0,608	0,602	0,616	0,602	0,641	0,622

Вліяніе желоба при большихъ напорахъ почти не чувствительно, кромѣ случаевъ E, F, G и H; наклонный желобъ уменьшаетъ коэффициентъ расхода въ меньшей степени, нежели горизонтальный.

Lesbros бралъ нѣсколько типовъ наклонныхъ желобовъ, при отверстияхъ 200 мм — 200 мм, устроенныхъ по типу G, и нашелъ, что соответствующій коэффициентъ расхода  $\mu'$  получается по коэффициенту  $\mu$  изъ таблицы 11, если подожить

$$\mu' = \frac{\mu}{1 + \delta}.$$

Значения  $\delta$  для разных напоров приведены в таблицѣ 13.

Таблица 13.

Желобъ.		При напорѣ $H_1$ въ <i>mtr</i> въ верхней кромкѣ отверстія.	Значенія $\delta$
Длина въ <i>mtr</i> .	Наклонъ къ гориз.		
3	$\frac{1}{20}$	0,11	0,214
		1,00	0,054
3	$\frac{1}{15}$	0,11	0,207
1,24	$\frac{1}{5,25}$	0,11	0,116
		1,52	0,006
0,74	$\frac{1}{2,5}$	0,11	0,057
		1,17	0,000
0,15	$\frac{1}{2,5}$	0,11	0,000
2,25	гориз.	0,11	0,134

Вліяніе толщины стѣнки, напора и неполноты сжатія можно видѣть изъ приводимой ниже таблицы 14 опытовъ Graeff'a, произведенныхъ имъ на притокѣ Дуны Furgens: напоры измѣнялись до 40 *mtr*; отверстія были или чистыя (истеченіе въ воздухъ) или въ короткій желобъ. Въ томъ и другомъ случаѣ:

подъ *A* разумѣется отверстіе въ тонкой стѣнкѣ;

„ *B* — отверстіе безъ сжатія на вертикальныхъ сторонахъ (ширина отверстія равна ширинѣ подводящаго канала); нижняя и верхняя кромки тонкія;

„ *C* — безъ сжатія внизу (отверстіе доходитъ до дна); прочія три кромки тонкія.

„ *D* — только верхняя кромка тонкая; отверстіе доходитъ до дна канала и имѣетъ его ширину;

„ *E* — отверстіе въ стѣнкѣ толщиной въ 40—50 *mm*, съ сжатіемъ со всѣхъ сторонъ.

„ *F* — отверстіе, подобное *C*, но въ толстой стѣнкѣ;

„ *G* — отверстіе, подобное *D*, но въ толстой стѣнкѣ.

Результаты опытовъ разбиты на 2 главныя группы: къ одной отнесены отверстія съ малой высотой  $e$ , къ другой—съ большей. Напоры  $H_1$  измѣрялись надъ верхней кромкой отверстія (не въ центрѣ тяжести).

Таблица 14

коэффициентов расхода  $\mu$  въ формулѣ  $(\mu = \mu h \sqrt{e}) \quad 2\eta \left( H_1 + \frac{e}{2} \right)$ .

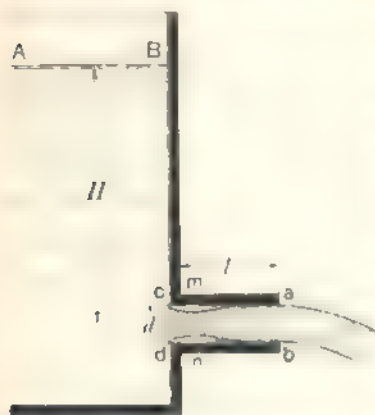
2 Большія отверстія ( $e > 30 \text{ мм}$ )							Малыя отверстія ( $e < 30 \text{ мм}$ )							
Тяга устройств отверстія.	A	B	C	D	E	F	G	A	B	C	D	E	F	G
Значенія $\frac{H_1}{e}$														
1. Истеченіе въ воздухѣ.														
1	0,61	0,65	0,67	0,70	0,65	0,68	—	0,67	0,70	0,71	0,72	0,71	0,75	—
5	0,62	0,64	0,67	0,69	0,67	0,70	—	0,66	0,66	0,70	0,71	0,70	0,74	—
10	<b>0,62</b>	0,63	0,67	0,69	<b>0,68</b>	<b>0,71</b>	—	0,65	0,65	0,69	0,70	0,70	0,74	—
20	0,61	0,63	0,66	0,68	0,68	0,71	—	0,64	0,65	0,69	0,70	0,70	0,74	—
40	0,61	0,62	0,66	0,68	0,68	0,70	—	0,63	0,64	0,69	0,69	0,69	0,73	—
100	0,60	0,60	0,66	0,68	0,66	0,69	—	0,61	0,63	0,68	0,68	0,69	0,72	—
400	0,60	0,60	0,65	0,67	0,66	0,68	—	0,60	0,63	0,68	0,68	0,68	0,71	—
1000 и выше.	0,60	0,60	0,65	0,67	0,66	0,68	—	0,60	0,62	0,67	0,67	0,68	0,71	—
2. Истеченіе въ короткій желобѣ.														
1	0,57	0,64	0,60	0,60	0,62	0,65	—	0,65	0,67	0,67	0,69	0,68	0,70	—
5	0,61	0,64	0,62	0,64	0,63	0,66	—	0,64	0,66	0,67	0,68	0,67	0,71	—
10	0,61	0,63	0,63	0,65	0,64	0,67	—	0,64	0,65	0,67	0,68	0,67	<b>0,71</b>	—
20	<b>0,61</b>	0,63	<b>0,63</b>	<b>0,65</b>	<b>0,65</b>	<b>0,67</b>	—	0,63	0,64	0,66	0,68	0,67	0,70	—
40	0,61	0,62	0,63	0,65	0,64	0,66	—	0,62	0,63	0,66	0,67	0,66	0,70	—
100	0,60	0,60	0,62	0,64	0,63	0,65	0,84	0,61	0,62	0,65	0,67	0,66	0,69	0,86
400	0,60	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,81	0,60	0,61	0,65	0,66	0,65	0,68	0,84
1000 и выше.	0,60	0,60	0,62	0,63	0,63	0,64	0,80	0,60	0,61	0,64	0,66	0,65	0,67	0,81

Какъ видно изъ таблицы, результаты Graeff'a не вполне сошлись съ данными Lesbros; общее же положеніе, — уменьшеніе коэффициента  $\mu$  съ увеличеніемъ напора и увеличеніемъ отверстія, — видно отчетливо. При очень большихъ напорахъ и большихъ отверстіяхъ, почти во всѣхъ случаяхъ, коэффициентъ расхода  $\mu$  стремится къ постоянному значенію, близкому къ тому, которое даютъ Smith, Lesbros и другіе, т.-е. около 0,6.

### § 15. Истечение через отверстия съ насадками

До сихъ поръ мы разсматривали истечение жидкости черезъ отверстия въ тонкой стѣнкѣ. Теперь разсмотримъ случаи отверстій въ толстой стѣнкѣ. Разница между этими двумя случаями выступаетъ наиболѣе отчетливо въ случаяхъ отверстій съ насадками, — короткими придатками, коническими и цилиндрическими, плотно приставленными къ отверстию. Разсмотримъ слѣдующе типы насадковъ:

1) *Насадокъ Вентури*, короткий вѣнпный цилиндрическій насадокъ (фиг. 71). На основаніи опытовъ Venturi, Eytelwein'a, Weisbach'a и др.



Фиг. 71.

оказывается, что при такомъ насадкѣ *сжатія нѣтъ* ( $\alpha = 1$ ); зато, если изъ отверстия въ тонкой стѣнкѣ струя выходитъ прозрачная, какъ кристаллъ, то здѣсь она выходитъ сравнительно мутной, что показываетъ, что отдѣльныя струйки ея идутъ по совершенно неодинаковымъ траекторіямъ и что правильность ихъ движения нарушена здѣсь какими-то посторонними причинами, дѣйствующими въ насадкѣ. При одинаковыхъ условіяхъ струя изъ насадка летитъ не такъ далеко, какъ изъ отверстия безъ насадка. Коэффициентъ расхода  $\mu$  оказывается равнымъ 0.82 (въ тонкой стѣнкѣ  $\mu = 0,62$ ). Описанныя явленія наблюдаются

при условіи, что длина  $l$  насадка не больше трехъ, но и не меньше двухъ диаметровъ отверстия. Если сѣченіе отверстия есть  $f$ , а напоръ въ центрѣ тяжести  $H$ , то для расхода черезъ насадокъ имѣемъ формулу:

$$Q = 0,82 f \sqrt{2gH}.$$

При тѣхъ же условіяхъ черезъ отверстие въ тонкой стѣнкѣ выливается количество воды:

$$Q_1 = 0,62 f \sqrt{2gH}.$$

Слѣдовательно,

$$Q : Q_1 = 0,82 : 0,62 \approx 1,3,$$

т.-е. *насадокъ увеличиваетъ расходъ почти на 30 %.*

Такъ какъ при этомъ насадкѣ

$$\alpha = 1,$$

то

$$\varphi = \mu = 0,82,$$

а скорость  $v$  истечения черезъ насадокъ:

$$v = 0,82 \sqrt{2gH};$$

при отверстіи же въ тонкой стѣнкѣ скорость  $v_1$  есть

$$v_1 = 0,975\sqrt{2gH}.$$

Вычисляя напоръ, соответствующій скорости  $v$ , получаемъ:

$$h_v = \frac{v^2}{2g} = 0,82^2 H \approx \frac{2}{3} H,$$

т.-е. цѣлая треть напора истрачена на преодоленіе сопротивленія при прохожденіи черезъ насадокъ.

При тонкой же стѣнкѣ напоръ  $h_v$  опредѣляется величиной

$$h_v = \frac{v_1^2}{2g} = 0,975^2 H = 0,951 H,$$

т.-е. на сопротивленіе потрачено только 5% напора. Слѣдовательно, потеря напора при насадкѣ больше, чѣмъ при тонкой стѣнкѣ, въ

$$\frac{0,33}{0,05} = 6,6 \text{ разъ.}$$

Сообразно съ этимъ коэффициентъ сопротивленія при протеканіи черезъ насадокъ опредѣлится черезъ:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0,486 \approx 0,5,$$

тогда какъ въ тонкой стѣнкѣ онъ примѣрно въ десять разъ меньше.

При выходѣ изъ отверстія вода обладаетъ живою силой, которая, вообще, измѣряется произведеніемъ  $\frac{Qv}{g} \cdot \frac{v^2}{2}$ . Назовемъ эту величину черезъ  $A$ .

Подсчитывая ее для обоихъ ваятыхъ нами случаевъ, находимъ при насадкѣ:

$$A_{\text{нас.}} = \gamma \frac{0,82f\sqrt{2gH}}{g} \cdot \frac{0,82^2 \cdot 2gH}{2} = 0,82^2 \gamma f H \sqrt{2gH} = 0,551 \gamma f H \sqrt{2gH};$$

при такомъ же отверстіи въ тонкой стѣнкѣ имѣемъ

$$A_{\text{тонк. ст.}} = \gamma \frac{0,62f\sqrt{2gH}}{g} \cdot \frac{0,975^2 \cdot 2gH}{2} = 0,59 \gamma f H \sqrt{2gH},$$

т.-е., несмотря на значительное уменьшеніе расхода, струя изъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ выноситъ большій запасъ живой силы, нежели при насадкѣ. Имѣемъ затѣмъ:

$$\frac{A_{\text{нас.}}}{A_{\text{тонк. ст.}}} = \frac{0,551}{0,590} = 0,934.$$

Какъ видно, насадокъ даетъ общую потерю живой силы почти на 7% большую, а потому, если, напр., черезъ данное отверстіе вода подводится къ двигателю для утилизации ея живой силы, то насадка Вентури употреблять не слѣдуетъ.

Этотъ насадокъ имѣеть, однако, и теоретическій интересъ, такъ какъ даетъ возможность, на основаніи нѣкоторыхъ допущеній, объяснить элементарнымъ путемъ все явленіе истеченія черезъ него.

Причина отсутствія сжатія понятна: къ отверстию *ab* отдѣльныя струйки подходятъ все въ одномъ направленіи, обусловливаемомъ стѣнками насадка, а потому нѣтъ основанія для новаго измѣненія направленія струекъ.

Большая потеря напора можетъ быть объяснена слѣдующими соображеніями. При входѣ въ насадокъ струя въ сѣченіи *cd* должна сжаться, такъ какъ въ этомъ мѣстѣ, несомнѣнно, должно быть измѣненіе направленія для отдѣльныхъ струекъ. Гдѣ-либо въ *mn* имѣется наиболѣе сжатое сѣченіе; пройдя его, струя снова расширяется и заполняетъ всю трубку. Для того, чтобы имѣть возможность примѣнить уравненіе Д. Бернулли, допустимъ, что дальнѣйшее теченіе происходитъ параллельными струями. Измѣненіе сѣченія изъ *mn* въ *ab* довольно внезапно, а потому здѣсь имѣеть мѣсто ударъ, вызывающій потерю напора въ количествѣ  $\frac{(v_1 - v)^2}{2g}$ , гдѣ  $v_1$  есть скорость въ сжатомъ сѣченіи *mn*, а  $v$ —скорость въ насадкѣ тамъ, гдѣ струя уже наполнила его. Допустимъ, что сжатіе въ *mn* происходитъ такъ же, какъ оно происходитъ при истеченіи изъ отверстій въ тонкой стѣнкѣ. Тогда мы можемъ написать уравненіе расхода для сѣченія *ab* (площадь его есть  $a$ ,—та же, что и въ *cd*) такъ:

$$Q = av;$$

для сѣченія же *mn*, по предыдущему, мы должны написать:

$$Q = \alpha av_1,$$

гдѣ  $\alpha$  можно принять равнымъ 0,64, какъ для отверстій въ тонкой стѣнкѣ. Поэтому

$$v_1 = \frac{1}{\alpha} v,$$

и, слѣдовательно, потерянный на ударъ напоръ есть

$$\frac{v^2}{2g} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)^2.$$

Этотъ запасъ работы расходуется на приведеніе въ вихревое движеніе и нѣкоторое нагрѣваніе массы воды, заключающейся между сжатою струею и стѣнками насадка, равно какъ и на возмущенія внутри самой струи.

Но это еще не единственный источникъ потери: очевидно, что при прохожденіи черезъ сѣченіе *cd* часть напора тратится на преодоленіе сопротивленія у кромки; эту потерю для отверстій въ тонкой стѣнкѣ мы оцѣнили величиной  $\zeta \frac{v^2}{2g}$ , гдѣ  $\zeta = 0,06$ . Кромѣ того, есть еще треніе о стѣнки насадка. Но эта послѣдняя потеря очень мала, такъ какъ насадокъ, вообще,

имѣетъ небольшую длину; поэтому будемъ имѣть въ виду только потерю на ударъ при входѣ въ насадокъ и напишемъ уравненіе Д. Бернулли для движенія отъ уровня *AB*, гдѣ скорость = 0, до сѣченія *ab*, гдѣ предположимъ наличие давленія  $p'_0$ , отличнаго отъ давленія  $p_0$ , имѣющагося въ *AB*. Находимъ:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p'_0}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} + \zeta \frac{v_1^2}{2g} \dots \dots (A)$$

Такъ какъ

$$Q = av = \alpha av_1,$$

то изъ (A), послѣ преобразованій, получаемъ:

$$v = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2} \cdot \sqrt{2g \left(H + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p'_0}{\gamma}\right)} \dots \dots (16)$$

Если истеченіе происходитъ въ атмосферу, т.-е. если  $p_0 = p'_0$ , и если, далѣе, предположить, что коэффициенты  $\alpha$  и  $\zeta$  имѣютъ здѣсь тѣ же значенія, что и при истеченіи черезъ отверстія въ тонкой стѣнкѣ, т.-е.  $\alpha = 0,64$  и  $\zeta = 0,06$ , то по уравненію (16) получимъ:

$$v = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{0,64} - 1\right)^2 + \frac{0,06}{0,64^2}} \cdot \sqrt{2gH} = 0,827 \sqrt{2gH},$$

т.-е. величину, меньше, чѣмъ на 1%, отличающуюся отъ дѣйствительно наблюдаемой скорости

$$v = 0,82 \sqrt{2gH}.$$

Такая малая разниця между результатомъ опыта и тѣмъ, что мы получили на основаніи теоретическихъ соображеній, вполне объясняется пренебреженіемъ упомянутой выше потери на треніе въ насадкѣ, а потому можно сказать, что вся картина истеченія истолковывается нами правильно.

Опредѣлимъ давленіе  $p_1$  около сжатого сѣченія, для чего напишемъ уравненіе Д. Бернулли для движенія отъ *AB* до *mn*:

$$\frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} (1 + \zeta).$$

Замѣнимъ здѣсь  $v_1$  черезъ  $\frac{v}{\alpha}$ , при чемъ  $v$  возьмемъ по ур-ію (16), а вмѣсто перваго радикала введемъ дѣйствительно наблюдаемый коэффициентъ расхода  $\mu_2$ ; получимъ:

$$\frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\mu_2^2 (1 + \zeta)}{\alpha^2} \left[ H + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p'_0}{\gamma} \right] \dots \dots (B)$$

Такъ какъ

$$1 - \zeta = \frac{1}{q^2}$$

и

$$a \varphi = \mu,$$

т.-е. коэффициенту расхода въ тонкой стѣнкѣ, то, внося въ ур-іе (B)  $\mu^2$  вмѣсто  $\frac{a^2}{\gamma}$  и дѣлая некоторыя преобразованія, легко получимъ:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p'_0}{\gamma} \left[ \left( \frac{\mu_2}{\mu} \right)^2 - 1 \right] \left( H - \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p'_0}{\gamma} \right) \dots \dots \dots (17)$$

Такъ какъ  $\mu_2 = 0,82$ , а  $\mu = 0,62$ , то мы, во всякомъ случаѣ, будемъ имѣть

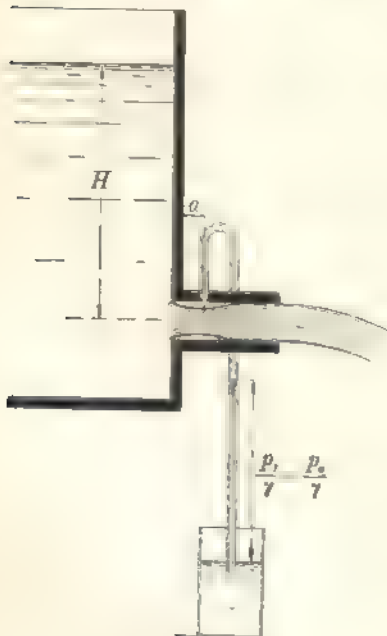
$$p_1 < p'_0,$$

т.-е. что въ насадкѣ имѣется разрѣженіе по сравненію со средою, куда происходитъ истеченіе, потому что, конечно, для возможности движенія жидкости изъ сосуда въ окружающую среду необходимо имѣть

$$H + \frac{p_0}{\gamma} > \frac{p'_0}{\gamma}.$$

Этого и слѣдовало ожидать, такъ какъ  $r_1 > r$ . Если истеченіе происходитъ въ атмосферу, т.-е. если  $p_0 = p_a$ , то уравненіе (17) переходитъ въ ур-іе:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} = \left( \frac{0,82^2}{0,62^2} - 1 \right) H = 0,74 H \sim \frac{3}{4} H.$$



Фиг. 72.

Если поэтому въ насадкѣ около сжатого сѣченія сдѣлать отверстіе и вставить въ него обратный пьезометръ (т.-е. загнутую книзу трубку, опущенную въ сосудъ съ водою) (фиг. 72), то въ немъ вода должна подняться на высоту, равную почти  $\frac{3}{4}$  напора въ центрѣ тяжести отверстія насадки. Въ одномъ изъ опытовъ Вентури было:  $H = 0,88 \text{ mtr}$ ,  $d = 0,0406 \text{ mtr}$  и разстояніе  $a = 0,018 \text{ mtr}$ . Вода поднялась въ трубкѣ на высоту  $0,65 \text{ mtr}$ . Отношеніе  $\frac{0,65}{0,88} = 0,748$ , что вполне согласно съ полученнымъ нами результатомъ и тѣмъ самымъ подтверждаетъ допустимость принятыхъ значеній  $\mu$  и  $\mu_2$ .

Наоборотъ, если около сжатого сѣченія сдѣлать въ стѣнкѣ насадка отверстія и оставить ихъ открытыми, то разрѣже-



не образоваться уже не сможет, и истечение будет происходить такъ, какъ если бы насадка не было совсѣмъ.

Наконецъ, можно сказать, что описываемыя явленія при истеченіи черезъ насадокъ Вентури могутъ существовать только до тѣхъ поръ, пока напоръ  $H$  не превосходитъ опредѣленнаго предѣла. Для совершенной жидкости гидродинамическое давление, во всякомъ случаѣ, должно быть больше нуля:

$$p_1 > 0,$$

или, по уравненію (17),

$$\frac{p'_0}{\gamma} - \left[ \left( \frac{\mu_2}{\mu} \right)^2 - 1 \right] \left[ H + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p'_0}{\gamma} \right] > 0.$$

Изявъ это неравенство относительно  $H$ , получимъ:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} < \frac{p'_0}{\gamma} + \frac{p'_0}{\gamma} \left[ \left( \frac{\mu_2}{\mu} \right)^2 - 1 \right],$$

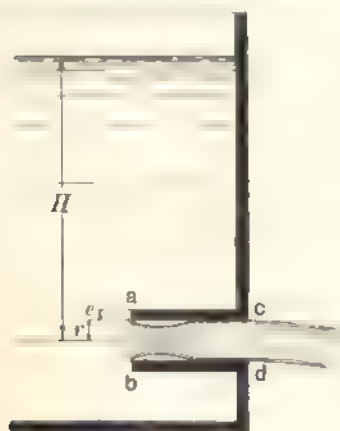
т.-е.

$$H + \frac{p_0}{\gamma} < \frac{p'_0}{\gamma} \cdot \frac{1}{1 - \left( \frac{\mu}{\mu_2} \right)^2}.$$

Внося сюда  $\mu = 0,62$ ,  $\mu_2 = 0,82$ , получимъ:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} < \frac{p'_0}{\gamma} \cdot \left[ \frac{1}{1 - 0,575} \right] = 2,37 \frac{p'_0}{\gamma}.$$

Въ частномъ случаѣ истеченія въ атмосферу нужно положить



Фиг. 73.

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p'_0}{\gamma} = 10,33 \text{ mtr},$$

а потому

$$H < 1,37 \cdot 10,33 \text{ mtr}$$

или

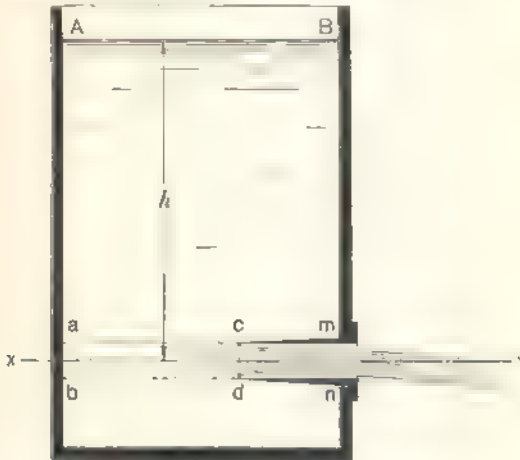
$$H < 14,15 \text{ mtr}.$$

При ббльшемъ напорѣ истеченіе черезъ насадокъ будетъ уже отличаться отъ описаннаго: вода его не заполнитъ и будетъ протекать по нему со свободною поверхностью, и для восстановленія явленія насадка придется его удлинить.

2) *Насадокъ Борда* (фиг. 73),—короткій внутренній цилиндрическій насадокъ. Если опытъ вести такъ, что закрыть сначала  $ab$ , и при этомъ стѣнка насадка очень тонка, то, по Vidone'у,  $\mu = 0,5$ ,—наблюдается очень

большое сжатие. Если стѣнка толста ( $e > 0,4 r$ ), то  $\mu = 0,61$ , т.-е. дѣло происходитъ такъ, какъ если бы имѣлось отверстие въ тонкой стѣнкѣ. Если закрыть  $cd$  и дожидаться, пока изъ трубы выйдетъ воздухъ, то въ первомъ случаѣ (очень тонкая стѣнка)  $\mu = 0,71$ , а во второмъ  $\mu = 0,81$  (какъ въ насадкѣ Вентури). Однако Вейсбахъ не получилъ въ первомъ случаѣ такого малаго коэффициента расхода; по его даннымъ нужно считать въ первомъ случаѣ  $\mu = 0,54$ .

Этотъ насадокъ интересенъ не столько своимъ практическимъ значеніемъ, сколько тѣмъ, что величину коэф-та сжатія въ немъ можно получить теоретическимъ путемъ, а именно:



Фиг. 74.

Мы знаемъ, что гидродинамическое давленіе въ любой точкѣ жидкости отличается отъ гидростатическаго въ зависимости отъ величины скорости этой точки. Понятно, что чѣмъ дальше отъ отверстия мы будемъ брать точки жидкости, тѣмъ меньшія скорости мы будемъ въ нихъ встрѣчать и тѣмъ давленіе въ нихъ будетъ ближе къ гидростатическому. Слѣдовательно, если длина насадка Борда достаточно велика, напр., если  $l \infty 2,5 d$ , то по вертикальной стѣнкѣ  $mb$  (фиг. 74), равно

какъ и по всей противолежащей стѣнкѣ, давленіе можно считать гидростатическимъ. Поэтому для массы  $ABmcdbaA$  уравненіе проекцій количествъ движенія на горизонтальную ось  $xx$  напишется такъ:

$$\frac{\gamma \omega_1 v^2}{g} = -p_0 \omega + (p_0 + \gamma h) \omega \dots \dots \dots (18)$$

Здѣсь  $\omega_1$  есть площадь наименьшаго сѣченія струи,  $\omega$ —площадь сѣченія насадка  $cd$ ,  $p_0 \omega$  есть давленіе на отверстіе извнѣ,  $(p_0 + \gamma h) \omega$  есть давленіе на противолежащую отверстію часть стѣнки  $ab$ . Всѣ прочія давленія или взаимно уравновѣшиваются (по  $Aa$  и  $Bm$ ) или перпендикулярны къ оси  $xx$  (въ  $AB$ ,  $bd$ ,  $dn$ ,  $cm$ ). Вертикальная сила тяжести тоже не входитъ въ уравненіе, такъ какъ ось  $xx$  горизонтальна.

Полагая

$$v = \varphi \sqrt{2gh},$$

гдѣ  $\varphi$  можно считать попержнему  $= 0,975$ , получаемъ соотношеніе:

$$\varphi^2 \gamma h \cdot 2\omega_1 = \gamma h \omega,$$

откуда

$$\frac{c_1}{c} = \frac{1}{2q^2} \dots$$

Слѣдовательно,

$$u = \omega q \frac{1}{2q} = 0,513.$$

что довольно близко подтверждается опытом.

Легко убѣдиться, что уравнение (18) справедливо только въ томъ случаѣ, если толщина стѣнки въ  $c$  и  $d$  очень мала и если поверхность  $cmnp$  цилиндрична, а не представляетъ конуса, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ давленіе отъ этой поверхности на воду даетъ проекцію противъ движенія, которую нужно будетъ, слѣдовательно, внести во вторую часть ур-ія (18) со знакомъ минусъ; но въ то же время на противоположной стѣнкѣ придется разсмотрѣть давленіе на кольцевой части, представляющей проекцію этой конической поверхности, и это давленіе войдетъ въ уравненіе (18) съ плюсомъ. Очевидно, что эта положительная величина по абсолютной величинѣ больше, чѣмъ первая отрицательная, такъ какъ въблизи отверстія гидродинамическое давленіе, очевидно, въ нашемъ случаѣ меньше, чѣмъ на противоположной стѣнкѣ. въ итогѣ вторая часть уравненія (18) увеличится, отчего отношеніе  $\frac{c_1}{c}$  будетъ больше, чѣмъ 0,513. Такъ какъ въ дѣйствительности конической поверхности насадка, при условіи очень тонкой стѣнки, избѣжать почти нельзя, то въ этомъ именно и нужно искать причину того, что Вейсбахъ не получилъ съ насадками Борда величины, меньшей 0,54.



Фиг. 75

3) Тотъ же цилиндрической насадокъ *Вентури* (фиг. 75) можетъ быть поставленъ подъ угломъ  $\delta$  къ нормали, проведенной къ вертикальной стѣнкѣ; онъ даетъ меньшій расходъ, чѣмъ насадокъ Вентури. Сжатія опять нѣтъ, т.-е.  $\alpha = 1$ . Выше мы видѣли, что коэффициентъ скорости  $\varphi$ , а потому въ нашемъ случаѣ и  $\mu$ , равное  $\varphi$ , могутъ быть выражены по коэффициенту сопротивленія  $\zeta_1$  такъ:

$$q = \frac{1}{1 + \zeta_1} u.$$

По Вейсбаху въ этомъ случаѣ:

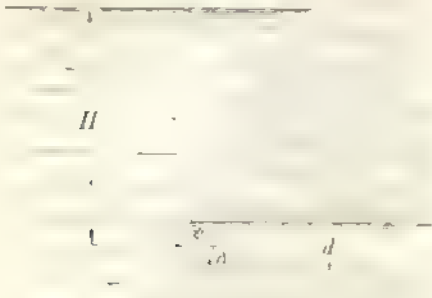
$$\zeta_1 = 0,505 + 0,303 \sin \delta + 0,226 \sin^2 \delta \dots \dots \dots (19)$$

Такой случай имѣетъ мѣсто, напр., въ плотинахъ (фиг. 76): если уголь откоса есть  $\mu$ , а труба горизонтальна, то  $\delta = 90^\circ - \mu$ , и на сопротивление

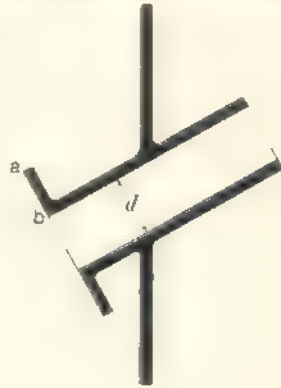
при входѣ пойдетъ, по уравненію (19), часть скоростнаго напора  $\zeta_1$ , оцѣниваемая выраженіемъ:

$$\zeta_1 = 0,505 + 0,303 \cos \varphi + 0,226 \cos^2 \varphi \dots \dots \dots (20)$$

Этой формулой оцѣнено только сопротивление входа и потери на длинѣ насадка около трехъ диаметровъ трубы; прочая часть трубы вносить еще



Фиг. 76.

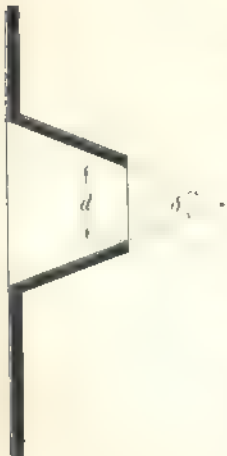


Фиг. 77.

сопротивленія, коэффициентъ  $\zeta_2$ , которыхъ можетъ быть оцѣненъ на основаніи данныхъ III главы. Въ итогѣ расходъ черезъ отверстіе площадью  $F$ , подъ напоромъ  $H$ , будетъ:

$$Q = \frac{1}{1 + \zeta_1 + \zeta_2} F \sqrt{2gH}.$$

Само собою понятно, что насадокъ, поставленный косо, но имѣющій плоскую торцевую стѣнку, нормальную къ его оси (фиг. 77), не отличается отъ насадка Вентури, коль скоро протяженіе этой стѣнки достаточно, напр., если  $ab > \frac{d}{2}$ .



Фиг. 78.

4) Наконецъ, если насадокъ призматическій и его длина приблизительно равна утроенному большому измѣренію отверстія, то коэффициентъ расхода почти такой же, какъ и при кругломъ насадкѣ.

5) *Конические насадки.* Изъ нихъ наиболѣе практичны коническіе *сходящіеся* насадки (фиг. 78): они мало уменьшаютъ скорость  $v$  и въ то же время повышаютъ коэффициентъ расхода. Понятно, что при углѣ сходимости  $\delta = 0$  коническій насадокъ обращается въ насадокъ Вентури, а при  $\delta = 180^\circ$  — въ отверстіе въ тонкой стѣнкѣ.

Лучшее изслѣдованіе коническихъ насадковъ произвели d'Aubuisson и Castel. По опытамъ ихъ оказалось, что наибольшее  $\mu$  соответствуетъ углу сходимости конуса въ  $13^\circ 24'$ ; коэф-тъ  $\eta$  непрерывно возрастаетъ съ

увеличеніем  $\delta$ . Между прочимъ, такіе насадки употребляются въ пожарныхъ брандспойтахъ: тамъ дѣлають  $\delta = 5^\circ$ , соотвѣтственно чему  $\varphi = 0,92$ .

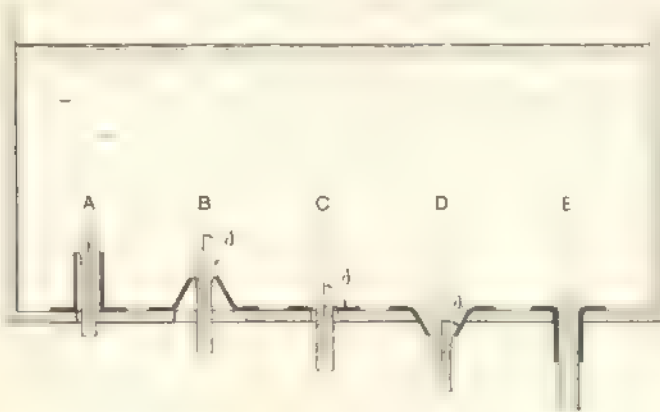
Названные авторы, изслѣдуя насадки въ 15 *mm* диаметромъ и въ 40 *mm* длиною, при постоянномъ напорѣ въ 3 *mtr*, пришли къ слѣдующимъ даннымъ (см. табл. 15).

Таблица 15.

$\delta$	0°00'	3°10'	5°26'	7°52'	10°20'	12°04'	13°24'	14°28'	15°28'	23°00'	40°20'	48°50'
$\mu$	0,829	0,895	0,924	0,930	0,938	0,942	<b>0,946</b>	0,941	0,934	0,914	0,870	0,847
$\varphi$	0,820	0,894	0,919	0,932	0,951	0,955	0,963	0,966	0,970	0,974	0,980	0,984

Lespinasse нашелъ для сходящихся пирамидальныхъ насадковъ, употребляющихся при водяныхъ колесахъ,  $\mu = 0,976$  и даже 0,987.

Результаты, полученные Вейсбахомъ для подобныхъ насадковъ, не вполне сходятся съ данными Кастеля. Его насадки имѣли диаметръ 50 *mm*, а напоры измѣнялись отъ 300 *mm* до 3 *mtr*. При этомъ онъ сравнивалъ не только вѣшние, но и внутренніе конические насадки (фиг. 79), получая такимъ образомъ всевозможные насадки отъ Борда до Вентури. Изъ фигуры видно, что названо угломъ  $\delta$ , который равенъ нулю для насадка Вентури,  $90^\circ$  для отверстія въ тонкой стѣнкѣ и т. д.



Фиг. 79.

Слѣдуетъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что въ насадкѣ типа *D* края стѣнки умышленно хорошо скругляются, въ чемъ и лежитъ главная причина несогласія данныхъ Вейсбаха съ данными д'Обюссона и Кастеля. Точно также, насадка *E* есть не чистый насадокъ Вентури: скругленные края дѣлають невозможнымъ образование затата свѣченія внутри насадка. Результаты наблюдений Вейсбаха выражены Цейнеромъ

слѣдующей формулой, дающей коэффициентъ расхода  $\mu$  для всякаго угла  $\delta$  по коэффициенту  $\mu$  для отверстія въ тонкой стѣнкѣ:

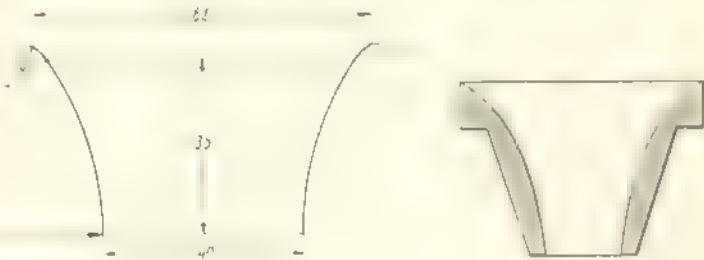
$$\mu_{\delta} = \mu [1 + 0,33214 \cos^2\delta + 0,16672 \cos^4\delta].$$

Цейнеръ принимаетъ тутъ  $\mu = 0,6385^*)$ .

Опыты Вейсбаха для слѣдующихъ величины коэффициента  $\mu$ :

$\delta$	180°	157°5	135°	112°5	90°	67°5	45°	22°5	11°2	7°5	0°
$\mu_{\delta}$	0,541	0,546	0,577	0,606	0,632	0,684	0,753	0,882	0,924	0,949	0,966

6) Къ сходящимся коническимъ насадкамъ можно отнести и *насадки, очерченные по профилю сжатой струи* (эти насадки даютъ наибольшіе коэффициенты расходовъ). Одно построение (Bossut) было приведено выше



Фиг. 80.

Фиг. 81.

(см. фиг. 53, стр. 104). На фиг. 80 данъ профиль насадка Вейсбаха, съ которымъ онъ получилъ въ среднемъ  $\mu = \varphi = 0,97$ . На фигурѣ размѣры поставлены въ  $mm$ . На фиг. 81 представленъ другой насадокъ Вейсбаха съ диаметромъ 10  $mm$ ; этотъ насадокъ при разныхъ напорахъ далъ слѣдующія значенія для  $\mu = \varphi$ :

Напоръ $h$ въ $mgr.$	0,02	0,5	3,5	17	103
$\varphi$	0,959	0,967	0,975	0,994	0,994

Слѣдуетъ сравнить первый насадокъ Francis'a, описанный въ слѣдующемъ пунктѣ.

\*) См. Civilingenieur, Bd. 2. 1856, S. 53.

7) Съ коническими расходящимися насадками дѣлали опыты Эйтельвейнъ, Вентури и другіе. На фиг. 82 представленъ профиль одного изъ



Фиг. 82.

насадковъ Эйтельвейна, давшій наилучшіе результаты \*) и имѣвшій уголъ при вершинѣ около  $5^\circ$ . Если ур-іе расхода отнести къ сѣченію  $ab$ , то коэффициентъ расхода  $\mu = 1,5526$ , т.е. въ  $\frac{1,55}{0,62} = 2,5$  раза больше, чѣмъ въ

случаѣ тонкой стѣнки, и въ  $\frac{1,55}{0,82} = 1,9$  разъ болѣе, чѣмъ въ насадкѣ Вентури; если же ур-іе расхода отнести къ выпускному отверстию  $cd$ , то, по опытамъ Эйтельвейна,  $\mu = 0,483$ , т.е. выходитъ меньше, нежели при соответственномъ отверстіи въ тонкой стѣнкѣ. Прочіе типы расходящихся насадковъ и у Вентури, и у Эйтельвейна дали хорошіе результаты.

Изъ разсмотрѣнія коэффициентовъ расхода въ первомъ и второмъ случаѣ видимъ, что коэффициентъ сопротивленія, вносимаго всѣмъ насадкомъ и отнесеннаго къ скоростному напору, имѣющемуся въ концѣ насадка, очень великъ, а именно, онъ достигаетъ значенія:

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} = 1 = \frac{1}{0,483^2} = 1 = 3,3,$$

такъ что изъ всего напора  $H$  на образованіе скорости въ концѣ насадка расходуется только  $\frac{H}{1 + \zeta} = 0,233 H$ : остальная же часть напора затрачивается на преодоленіе сопротивленій. Съ другой стороны, коэффициентъ расхода, отнесеннаго къ узкому сѣченію насадка, равенъ  $1,5526$ , т.е. расходъ на  $55,26\%$  больше того, что дало бы ур-іе Торричелли. Это значитъ, что скорость теченія въ узкомъ мѣстѣ насадка больше той, которая соответствуетъ напору. А это, въ свою очередь, показываетъ, что давленіе здѣсь меньше атмосфернаго, что легко обнаруживается пьезометромъ.

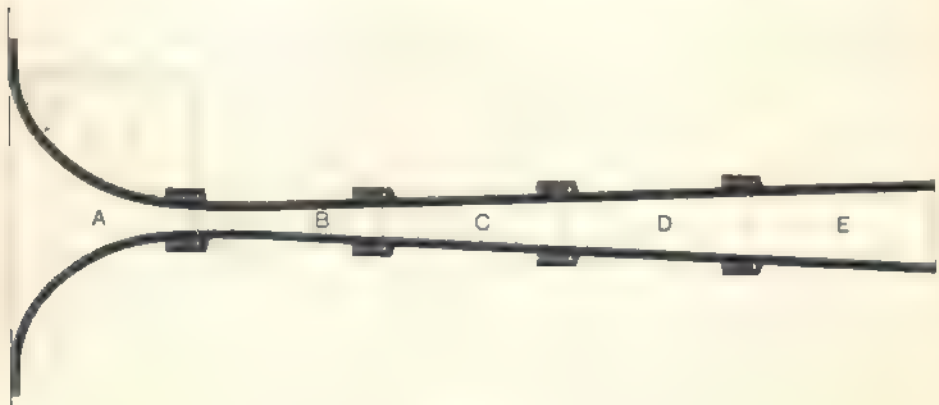
Итакъ, если мы имѣемъ данный напоръ и данное отверстіе, то очень легко значительно повысить водопрпускную способность этого отверстія, приставляя къ нему расходящейся насадокъ. Съ другой стороны, каждый килограммъ протекшей черезъ такой насадокъ

\*) На фигурѣ размѣры указаны въ прусскихъ линіяхъ.

воды будетъ уносить въ видѣ живой силы только небольшую часть полной энергии (напора), затраченной на его перемѣщеніе, т.-е. будетъ обладать малой работоспособностью, а слѣд., будетъ мало размывать дальнѣйшее русло. Въ этихъ двухъ обстоятельствахъ и заключается практическая важность расходящихся насадковъ.

Нужно замѣтить, что существенное вліяніе на коэффициентъ расхода оказываетъ длина насадка, что, конечно, вполне естественно, такъ какъ увеличеніе длины вноситъ новыя сопротивленія. Въ этомъ отношеніи поучительны опыты Francis'a<sup>\*)</sup>, они особенно имѣютъ цѣну для опредѣленія сопротивленія, вносимаго коническими всасывающими трубами турбинъ.

Насадокъ Francis'a свививался изъ 5 частей: *A, B, C, D* и *E* (фиг. 83). Часть *A* очерчена по цилиндрѣ для возможно полного устранения сжатія при вхоdѣ; часть *B*



Фиг. 83.

имѣть криволинейный переходъ, образованный дугою круга радиусомъ въ 22',60, и часть усѣченного конуса; части *C, D* и *E* представляютъ продолженіе того же конуса. Всѣ части чугунныя, внутри шлифованныя наждакомъ. Последовательно диаметры были слѣдующіе:

въ стыкѣ <i>A—B</i>	диаметръ = 0',1018,
„ „ <i>B—C</i>	„ = 0',1454,
„ „ <i>C—D</i>	„ = 0',2339,
„ „ <i>D—E</i>	„ = 0',3209,
въ концѣ части <i>E</i>	„ = 0',4085.

Такъ какъ длина каждой части около 1', то уголъ конуса при вершинѣ былъ около 5°.

Истеченіе происходило подъ уровень (въ отличіе отъ всѣхъ вышеприведенныхъ данныхъ) въ условіяхъ совершеннаго сжатія, т.-е. безъ замѣтной скорости передъ насадкомъ. Для сравненія Francisъ наблюдалъ въ тѣхъ же условіяхъ истеченіе изъ отверстия въ тонкой стѣнкѣ, при диаметрѣ въ 0',1017. Результаты помѣщены въ нижеприведенной таблицѣ 16.

<sup>\*)</sup> См. J. Francis. Lowell hydraulic experiments. 1871. Стр. 209—221.



Таблица 16.

Типъ насадка	Напоръ въ футахъ	Коеф-тъ расхода, отнесенный		Типъ насадка.	Напоръ въ футахъ.	Коеф-тъ расхода, отнесенный	
		къ узкому сѣченію насадка.	къ конеч- ному сѣченію насадка.			къ узкому сѣченію насадка.	къ конеч- ному сѣченію насадка.
<b>A</b>	0,53		0,927	<b>A, B, C, D</b>	0,13	2,080	0,209
	0,78		0,935		0,27	2,252	0,227
	0,96		0,928		0,44	2,260	0,227
	1,23		0,933		0,63	2,303	0,232
	1,40		0,937		0,92	2,378	0,239
	1,52		0,944		1,18	2,431	0,245
<b>A, B</b>				1,36	2,427	0,244	
	0,20	1,481	0,726	<b>A, B, C, D, E</b>	0,11	2,055	0,128
	0,30	1,513	0,742		0,21	2,168	0,136
	0,40	1,538	0,754		0,31	2,262	0,141
	0,56	1,576	0,773		0,42	2,307	0,143
	0,67	1,587	0,778		0,64	2,302	0,143
	0,85	1,592	0,780		0,96	2,314	0,144
	1,46	1,595	0,782		1,29	2,393	0,149
	0,10	1,893	0,359		1,36	2,326	0,144
	0,21	2,030	0,385		1,42	2,261	0,140
0,31	2,068	0,392					
<b>A, B, C</b>	0,50	2,118	0,401	Тонкая стѣнка; источеніе подъ уровнемъ.	1,02	0,5915	
	0,71	2,153	0,408		1,32	0,5918	
	1,10	2,164	0,410		1,49	0,5922	
	1,31	2,123	0,402				

Изъ данныхъ этой таблицы видно, что въ первыхъ двухъ случаяхъ коэффициентъ расхода съ напоромъ возрастаетъ, а въ остальныхъ онъ достигаетъ максимума и съ дальнѣйшимъ повышеніемъ напора начинаетъ падать. Длина конуса, а тѣмъ самымъ и отношеніе выпускнаго сѣченія къ узкому, имѣютъ большое вліяніе на величину коэффициента расхода: чѣмъ давлѣе насадка при одинаковомъ углѣ конуса, тѣмъ сильнѣе его всасывающее дѣйствіе, но въ то же время тѣмъ больше потеря напора, имъ причиняемая. Такие насадки поэтому вполне цѣлесообразны тамъ, гдѣ при данномъ vaporѣ и расходѣ требуется возможно малое сѣченіе отверстия.

Кромѣ того, такая обѣлка выпускнаго отверстия можетъ представлять существенную выгоду въ слѣдующемъ случаѣ. Для ясности предположимъ условия франсоисовскаго

наблюдая группы *ABCDE* при напоре 1',36. В этом случае насадок пропускает 1 секунду 0,17736 куб. фут. воды, так что скорость в узком месте его была 21',7621. В узком же насадке она была 1',3515. Чтобы заставить воду проходить съ такой скоростью, потребовался напоръ въ 1',36. Теперь посмотримъ, какъ и напоръ потребовался для того, чтобы протонять воду съ такими же скоростями въ дутье, если бы къ стѣнкѣ стюда была приставлена только часть *A*, а части *B*, *C*, *D* и *E* были замѣнены цилиндрическою трубою такого же диаметра, какъ широкій конецъ части *E*. Въ этомъ случаѣ пришлось бы:

1) Преодолѣть сопротивленіе въ насадкѣ *A*; изъ таблицы Francis'a видно, что для такихъ скоростей въ этомъ случаѣ можно считать  $\eta = 0,95$ ; следовательно,

$$z = \frac{1}{\eta^2} - 1 = 0,11;$$

такъ какъ требуется имѣть скорость  $v = 21,7621$ , то на это сопротивленіе уйдетъ напоръ

$$z \frac{v^2}{2g} = 0,11 \frac{21,7621^2}{2 \cdot 32,1618} \approx 0,81 \text{ *).$$

2) Далѣе будетъ имѣть мѣсто потеря на ударъ при переходѣ съ скорости  $v = 21,7621$  въ скорости  $v_1 = 1',3515$ ; на это потратится напоръ

$$\frac{(v - v_1)^2}{2g} = \frac{20,4106^2}{64,3236} = 6,48.$$

3) Будутъ сопротивленія и въ самой трубѣ; но ихъ оставимъ въ сторонѣ, такъ какъ при небольшой длинѣ трубы они невелики, и, кромѣ того, вопроса о сопротивленіи въ трубахъ мы еще пока не разсматривали.

4) Наконецъ, на созданіе самой скорости  $v_1 = 1',3515$  нуженъ напоръ  $\frac{v_1^2}{2g} = 0,03$ .

Итакъ, на все потребуется затрата напора

$$0,81 + 6,48 + 0,03 = 7,32,$$

т. е. почти въ 5,5 разъ больше, чѣмъ въ предыдущемъ случаѣ. Отсюда видно, что во всѣхъ случаяхъ, когда скорость въ узкомъ отверстіи такъ или иначе опредѣляется заранее, всегда выгодно перевести ее, помощью плавно расширяющагося насадка, на меньшую и затѣмъ уже выпускать воду съ нежелательною величиною скорости. Съ этими условіями какъ разъ придется встрѣтиться въ турбинахъ.

Числа таблицы 16-й позволяютъ, кромѣ того, указать какъ распределяются потери напора по отдѣльнымъ частямъ каждаго такого насадка. Раземотримъ, напримѣръ, насадокъ *ABCDE*. При напорѣ 0',42, коэффициентъ расхода для послѣдняго сѣченія в части *E*, который мы будемъ называть  $\mu_e$ , въ таблицѣ — 0,143. Поэтому заключаемъ, что на всѣ сопротивленія насадка затрачивается напоръ, въ  $\frac{1}{\mu_e^2} - 1$  разъ превосходящій конечный скоростной напоръ; внося числа, находимъ, что вся потеря напора равна

$$\frac{1}{0,143^2} - 1 \frac{v_e^2}{2g} = 48 \frac{v_e^2}{2g}.$$

При этомъ расходъ черезъ насадокъ по его сѣченію и напоръ вычисляется въ 0,0977 куб. футъ. Выдѣлимъ изъ этой потери ту ея часть, которая приходится на часть *AB*, и ту часть, которая вызвана конусомъ *CDE*. Для этой цѣли разыскиваемъ то значеніе коэф-та расхода  $\mu_r$ , которое наблюдалось въ насадкѣ *AB*, при условіяхъ тѣхъ же самыхъ скоростей, т. е. того же самого расхода, какъ и въ данномъ случаѣ. Путемъ нѣсколькихъ пробъ находимъ, что при напорѣ 0',85 насадокъ *AB* пропускалъ расходъ 0,0961 куб. футъ, такъ что скорости этого эксперимента весьма близки къ скоростямъ нашего случая, а потому

\* Ускореніе тяжести  $g = 9,81 \text{ мтр} = 32',1618$ .

говоримъ, что если для насадка **AB** при этихъ скоростяхъ коэф-тъ расхода по таблицѣ  $\mu_b = 0,7804$ , что соответствуетъ коэф-ту сопротивленія на всемъ пути **AB**:

$$\zeta = \frac{1}{\mu_b^2} - 1 = \frac{1}{0,7804^2} - 1 = 0,645,$$

то и въ нашемъ случаѣ потеря напора на пути **AB** выражается такъ.

$$\zeta \frac{v^2}{2g} = 0,645 \frac{v^2}{2g}$$

Зная также диаметры сѣченій  $d$  и  $e$  (см. выше), заключаемъ, что

$$\frac{v^2}{2g} = 4,4085^2 : 0,1454^2 = 7,88$$

Послѣ этого потеря напора на пути **AB** при нашей скорости вычислится такъ:

$$0,645 \frac{v^2}{2g} = 0,645 \cdot 7,88 \frac{v^2}{2g} = 40 \frac{v^2}{2g}$$

Взглянувъ же и въ поппон потерн напора, находимъ, что собственно конусъ **CE** внесетъ не очень большую потерю — всего въ  $8 \frac{v^2}{2g}$  — главная же потеря вызвана частью **AB** насадка.

Продѣлавъ эти вычисления для нѣсколькихъ напоровъ, замѣтимъ, что чи-ловый коэф-тъ сопротивленія въ какъ разѣ не очень отличается отъ 8 для конуса **CDE**, мало отличается отъ 2,5 для конуса **CD** и, наконецъ, близокъ къ 1 для конуса **C**. Такое изменение этого коэф-та слѣдуетъ приписать, главнымъ образомъ, различнымъ значениямъ скоростей напоровъ, къ которымъ относятся потери, и отчасти различному влиянню тренія въ этихъ числахъ.

Въ заключеніе приводимъ по Ruhlmann'у (съ нѣкоторыми исправленіями) сводную таблицу N. 17 полученныхъ въ этомъ параграфѣ результатовъ. Предпоследній столбець даетъ величину напора, соответствующаго выходной скорости  $\frac{v^2}{2g}$ . Если бы воздухъ не оказывалъ сопротивленія, то это была бы высота подъема струи, бьющей вверхъ. Последний столбець даетъ величины  $\frac{QH}{g} \frac{v^2}{2}$ , т.е. полные запасы живой силы, уносимые всей струей. Если черезъ данное отверстіе вода подводится къ двигателю, то желательнo, конечно, имѣть эту величину возможно большой. Буквой **A** обозначено произведеніе  $\gamma F H$   $2gH$ , т.е. тотъ запасъ работы, который струя унесла бы съ собой, если бы при прохожденіи подъ напоромъ **H** черезъ отверстіе площадью **F** она не встрѣчала никакихъ сопротивленій и не испытывала сжатія.

Изъ этой таблицы видно, что, если желательно имѣть высоко бьющую струю, нужно или ставить насадокъ, очерченный по профилю сжатой струи, или брать просто отверстіе въ тонкой стѣнкѣ, или, наконецъ, коническій сходящійся насадокъ съ угломъ  $\theta$  около  $13^\circ$ .

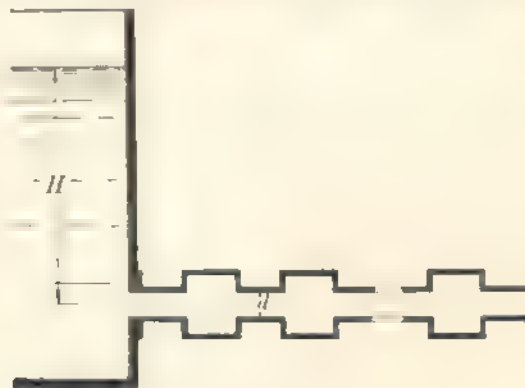
Если рѣчь идетъ о сбереженіи полнаго запаса живой силы струи, то наиболѣе целесообразенъ насадокъ, очерченный по формѣ сжатой струи, а затѣмъ коническій сходящійся насадокъ; прочіе типы отверстій даютъ большія потери.

Таблица 17.

Типъ отверстія.	$\varphi$	$\mu$	$\frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H$	$\frac{Qv}{g} \cdot \frac{v^2}{2} =$ $= \mu \varphi^2 \gamma F H v \sqrt{2gH} =$ $= \mu \varphi^3 A.$
Тонкая стѣнка.	0,975	0,620	0,951 <i>H</i>	0,590 <i>A</i>
Насадокъ Вентури.	0,820	0,820	0,672 <i>H</i>	0,551 <i>A</i>
Коническій сходящійся насадокъ $\delta = 13^\circ 24'$ .	0,963	0,946	0,927 <i>H</i>	0,877 <i>A</i>
Насадокъ по формѣ сжатой струи	0,980	0,980	0,960 <i>H</i>	0,941 <i>A</i>
Насадокъ Эйтеля-вейна.	0,483	0,483	0,233 <i>H</i>	0,113 <i>A</i>

Наконецъ, если рѣчь идетъ, наоборотъ, о возможно полномъ погашеніи живой силы струи еще внутри насадка, во избѣжаніе, напр., размывовъ дальнѣйшаго русла, то наилучшимъ является расходящійся насадокъ. Поэтому трубы, выводящія воду изъ-подъ желѣзнодорожныхъ насыпей, оканчиваются расходящимися по теченію откосными крыльями.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ ставится требованіе, чтобы черезъ данное отверстіе могло проходить возможно малое количество жидкости. Вышеприведенная таблица значеніями коэф-товъ  $\mu$  даетъ отвѣтъ на вопросъ, какая конструкция отверстія наиболее пригодна въ этомъ случаѣ.



Фиг. 84.

Однако, есть возможность понизить значеніе  $\mu$  почти до любой малой величины, конструируя все отверстіе такъ, чтобы оно состояло изъ ряда чередующихся другъ за другомъ насадковъ. Такъ, напр., на фиг. 84 изображены приставленные къ сосуду *n* насадковъ Вентури, раздѣленныхъ между

собою ( $n-1$ ) уширениями. Допустимъ, что эти уширенія настолько велики, что, вступая въ нихъ, струя всякій разъ теряетъ на ударъ весь запасъ приобретенной ранѣ живой силы; кромѣ того, пусть диаметры всѣхъ насадковъ равны между собою. Тогда ур-е Д. Бернулли для движения по такому сложному насадку будетъ, очевидно, таково:

$$H = n(1 + \zeta) \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ  $\zeta$  есть коэффициентъ сопротивленія, вносимаго каждымъ отдѣльнымъ насадкомъ. Послѣ этого расходъ черезъ весь насадокъ съ диаметромъ  $d$  выразится такъ:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{n(1 + \zeta)}}.$$

Такимъ образомъ, коэф-тъ расхода насадка, вообще равный  $\frac{1}{1 + \zeta}$ , уменьшается при такомъ расположеніи въ  $\sqrt{n}$  разъ. Въ этомъ заключается идея *лабиринтовыхъ сальниковъ*: вмѣсто набивки во втулкѣ сальника располагаютъ рядъ проточекъ, вносящихъ послѣдовательно чередующіяся уширенія и суженія вытекающей струи: этимъ создается настолько большая потеря напора, что утечка въ сальникѣ значительно уменьшается, хотя, конечно, никогда не можетъ быть доведена до нуля.

Замѣтимъ, наконецъ, что всѣ числовыя данныя, приведенныя въ § 11—15, относятся къ водѣ. Несомнѣнно, что значенія всѣхъ коэф-товъ измѣняются въ зависимости отъ степени вязкости той или иной жидкости. При этомъ, очевидно, зависимость эта такова, что съ увеличеніемъ вязкости коэф-ты скорости и расхода должны уменьшаться. Поэтому иногда степень вязкости характеризуютъ именно коэф-томъ  $\mu$ . Такъ принято, напр., поступать на заводахъ, приготовляющихъ смазочныя масла, керосинъ и т. п. При этомъ пользуются приборами, такъ называемыми *вискозиметрами*, основанными на опредѣленіи времени протеканія опредѣленнаго объема вещества черезъ опредѣленное, неизмѣнное отверстие, при опредѣленныхъ напорѣ и температурѣ.

### § 16. Истеченіе черезъ водосливы.

Очень часто встрѣчается особый типъ отверстій,—такъ называемые водосливы,—для которыхъ характерно то, что не весь периметръ струи образованъ твердыми стѣнками: всякое отверстие въ боковой стѣнкѣ сосуда становится водосливомъ, если уровень воды въ сосудѣ стоитъ не настолько высоко, чтобы вытекающая струя касалась верхней кромки отверстия. Обыкновенно водосливныя отверстия имѣютъ форму прямоугольника или трапеціи. Въ прямоугольныхъ отверстияхъ нижняя кромка обыкновенно горизонтальна и называется *порогомъ* водослива. Будемъ называть водосливъ *совершеннымъ*, если порогъ лежитъ выше уровня воды въ отводящемъ каналѣ; въ противномъ случаѣ водосливъ называютъ *несовершеннымъ*. Мы

будем рассматривать исключительно прямоугольные водосливы и сначала установимся только на случай совершенного водослива.

Громадное большинство авторов рассматривают водосливъ, какъ предѣльный случай прямоугольнаго отверстия, для котораго мы получили въ § 12 (стр. 108) ур-е расхода (13) въ такомъ видѣ:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left( h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right),$$

гдѣ  $b$  есть горизонтальный размѣръ отверстия, а  $h_2$  и  $h_1$  — напоры въ нижней и верхней кромкахъ отверстия. Полагая для водослива  $h_1 = 0$ , такъ какъ самой кромки нѣтъ, и  $h_2 = h$ , получимъ отсюда

$$Q = \frac{2}{3} \mu b h \sqrt{2gh}.$$

Такъ какъ коэффициентъ  $\mu$  слѣдуетъ определять изъ соответствующихъ опытовъ, то пишутъ просто

$$Q = \mu b h \sqrt{2gh} \quad (1)$$

вводя коэффициентъ  $\mu$ , въ составъ новаго коэф-та  $\mu$

По смыслу формулы слѣдуетъ, что коэффициентомъ  $\mu$  стараются исправить погрѣшность выражения  $b h \sqrt{2gh}$ , въ которомъ  $b h$  есть какъ бы площадь отверстия, а  $\sqrt{2gh}$  есть скорость, предполагаемая одинаковой для всѣхъ частицъ, проходящихъ черезъ это отверстие. Понятно, что такой видъ уравненія является крайней патялкой. Кромѣ того, очевидно, что здѣсь возможно несовершенное сжатіе, т.-е. въ сосудѣ, прудѣ, каналѣ и т. п. передъ водосливомъ можетъ быть столь большая скорость  $v_0$ , что соответствующій ей напоръ  $\frac{v_0^2}{2g}$  является существенной прибавкой къ напору  $h$ , такъ что, исходя изъ выраженія расхода въ прямоугольномъ отверстіи подъ напорами  $h_2$ ,  $h_1$  и скоростнымъ напоромъ  $\frac{v_0^2}{2g}$ , можно было бы написать, что при этихъ условіяхъ пройдетъ количество воды:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[ \left( h_2 + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left( h_1 + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right].$$

Полагая опять для водослива  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = h$ , имѣемъ

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \left[ \left( h + \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left( \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right].$$

Но и тутъ предпочитаютъ сохранить видъ уравненія (1), исправляя новую неточность соответственнымъ измѣненіемъ  $\mu$ .

Несомненно, даѣе, что и тутъ можетъ быть явленіе, аналогичное неполному сжатію: очевидно, не безразлично, въ толстой или тонкой стѣнкѣ сдѣлано отверстіе. Наконецъ, не безъ влияния должно быть и то обстоятельство, сдѣлано ли отверстіе въ вертикальной стѣнкѣ или наклонной. Все эти обстоятельства болѣе или менѣе подробно изслѣдованы очень многими экспериментаторами; тѣмъ не менѣе несовершенство уравненія (1) приводитъ къ тому, что вычисления по нему даютъ только весьма приближительныя рѣшенія. Правда, такова судьба всѣхъ эмпирическихъ формулъ, но все же весьма важно имѣть теоретически обоснованную величину влияния отдѣльных факторовъ на коэффициентъ  $\mu$ , если уже нельзя получить уравненія, точно выражающаго явленіе.

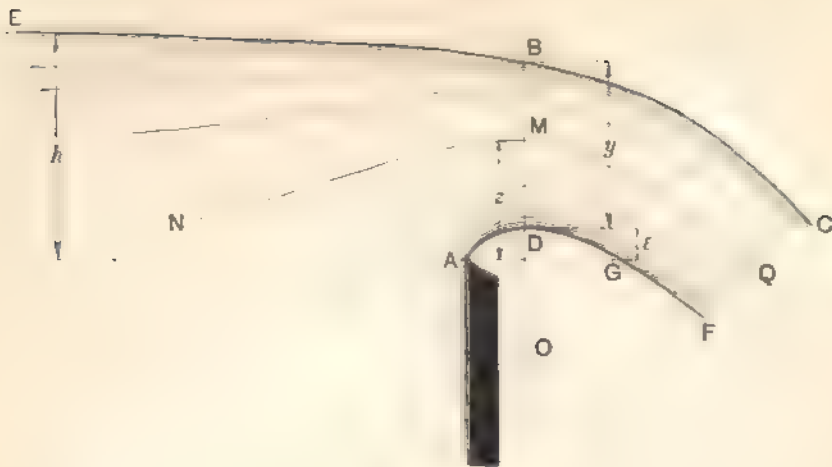
Въ этомъ отношеніи шагомъ впередъ является теорія истеченія черезъ водосливъ, предложенная французскимъ математикомъ Boussinesq въ 1880 г. и опубликованная имъ въ рядѣ мемуаровъ въ Comptes rendus Парижской Академіи Наукъ за 1887—1889 гг. Обширность и нѣкоторая сложность этой теоріи не позволяютъ привести ее здѣсь цѣликомъ, поэтому мы остановимся только на простѣйшемъ случаѣ, разсматриваемомъ Boussinesq, — именно, на случаѣ *совершенно водослива, сдѣланнаго въ вертикальной тонкой стѣнкѣ при наличности совершеннаго, тѣни и неполнаго, сжатія*.

Совершенство сжатія обуславливается тѣмъ, что передъ порогомъ глубина канала очень велика, такъ что въ каналѣ нѣтъ никакой замѣтной скорости, а его неполнота вызывается тѣмъ, что водосливъ протянуть во всю ширину подводящаго канала, такъ что сжатія съ боковъ нѣтъ. Кроме того, будемъ считать, что каналъ очень широкъ, — настолько, что влияніемъ боковыхъ стѣнокъ можно пренебречь и разсматривать не весь водосливъ, а только единицу его ширины. Давно установленъ тотъ фактъ, что горизонтальная свободная поверхность въ подводимомъ каналѣ, по мѣрѣ приближенія къ порогу  $A$ , понижается, представляя кривой профиль  $EBC$  (фиг. 85). Напоръ  $h$  надъ порогомъ сдѣлается по тому измѣрять на довольно большомъ разстояніи  $BE$  отъ порога, напр., не менѣе  $1,5 m$ ). Это пониженіе уровня можно разсматривать, какъ сжатіе струи. Несомненно, сжатіе должно существовать также и внизу, такъ что частица, идущая сначала по стѣнкѣ, покидая ее въ  $A$ , сначала подымается кверху, до  $D$ , а затѣмъ уже падаетъ. Наличие такого сжатія была подмѣчена давно, но значеніе ему придалъ только Boussinesq, а обстоятельныя опредѣленія его сдѣлалъ Bazin по настоянію перваго. Такимъ образомъ, мы видимъ, что при напорѣ  $h$  надъ порогомъ истеченіе происходитъ какъ бы черезъ отверстіе высотой  $BD = y$ .

Теорія Boussinesq построена на слѣдующихъ четырехъ предположеніяхъ

1) Жидкость считается совершенной, т.-е. не претерпѣвающей потерь пара при своемъ движеніи, такъ что для какой-нибудь элементарной струйки  $MMQ$  уравненіе установившагося движенія отъ  $M$ , гдѣ скорость незамѣтна, т.-е. равна нулю, а давленіе не отличается отъ гидростатическаго,

\* В. и Г. П. — одинъ изъ наиболее извѣстныхъ экспериментаторовъ послѣдняго времени въ области истеченій черезъ водосливы, измѣрялъ напоръ въ разстояніи  $5 m$  отъ порога.



Фиг. 85.

т.е. зависеть исключительно от глубины погружения частицы под свободной поверхностью, до *M* в сжатом сечении *BD* должно быть написано такъ:

$$h - \frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ *v*, *p* и *z* относятся къ точкѣ *M*, и притомъ, *p* представляет не само гидродинамическое давленіе въ точкѣ *M*, а только его избытокъ надъ атмосфернымъ давленіемъ.

2) Примѣняется постулатъ, высказанный Bélanger и называемый *принципомъ наибольшаго расхода*. Пояснимъ его слѣдующимъ образомъ. Вообразимъ рядъ открытых желобовъ, совершенно одинаковыхъ какъ по формѣ и размѣрамъ, такъ и по расположенію относительно одной и той же горизонтальной плоскости. Если черезъ каждый изъ этихъ желобовъ мы будемъ пропускать въ установившемся движеніи разные расходы жидкости, то, несомнѣнно, свободныя поверхности въ каждомъ изъ желобовъ расположатся различно; при этомъ, чѣмъ болѣе расходъ проходитъ черезъ желобъ, тѣмъ очевидно, выше расположится свободная поверхность потока по всей его длинѣ; нельзя вообразить, чтобы расходъ въ немъ увеличился, безъ повышения свободной поверхности въ желобѣ. Поэтому можно сказать, что при данномъ расположеніи свободной поверхности желобъ пропускаетъ въ установившемся движеніи наибольшій возможный расходъ, и, наоборотъ, при данномъ расходѣ свободная поверхность установившагося потока располагается возможно низко.

Въ примѣненіи къ водосливу этотъ постулатъ приводитъ къ слѣдующему уравненію. Вообразимъ сначала, что уровень за водосливомъ стоитъ на той же высотѣ надъ порогомъ, что и до него. Будемъ опускать этотъ уровень: черезъ порогъ переливается нѣкоторое количество воды, при чемъ горизонтъ въ *B* понижается, отчасти вызывая пониженіе горизонта и



въ  $E$ ; при этомъ, въ силу того, что сѣченіе  $E$  взято тамъ, гдѣ скорости нѣтъ, пониженіе уровня здѣсь ничтожно мало по сравненію съ пониженіемъ въ точкѣ  $B$ ; кромѣ того, измѣняется положеніе точки  $D$ , притомъ такъ, что толщина струи уменьшается. Чѣмъ дальше опускается горизонтъ за порогомъ, тѣмъ меньше, до извѣстнаго предѣла, это пониженіе сказывается на уменьшеніи толщины струи. Наконецъ, пусть за порогомъ уровень опустился такъ низко, что его дальнѣйшее пониженіе перестаетъ уже вліять на истеченіе. Это послѣднее опусканіе вызываетъ послѣднее уменьшеніе ( $-dy$ ) толщины струи, которое все-таки несравненно ощутительнѣе, нежели соответствующее послѣднее измѣненіе ( $-dh$ ) высоты  $h$  точки  $E$ . Такимъ образомъ, за все время пониженія уровня за порогомъ можно считать  $dh$  очень малымъ по сравненію съ  $dy$ , а въ послѣдній моментъ нужно положить

$$\frac{dh}{dy} = 0.$$

Съ другой стороны, расходъ  $Q$ , очевидно, является функцией напора  $h$  и толщины струи  $y$ , т. е.

$$Q = F(h, y).$$

При этомъ оба переменныя  $h$  и  $y$  тоже связаны между собою функциональной зависимостью. По принципу наибольшаго расхода необходимо, очевидно, имѣть для  $Q_{max}$  уравненіе

$$\frac{dQ}{dy} = 0;$$

а такъ какъ  $Q$  есть функция двухъ переменныхъ, то

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{\partial Q}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dy} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (A)$$

Но мы уже видѣли, что  $\frac{dh}{dy} = 0$ ; слѣдовательно, должно быть удовлетворено уравненію

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Итакъ, если мы выразимъ  $Q$  въ функцияхъ напора  $h$  и толщины струи  $y$ , возьмемъ отъ этого выраженія частную производную по  $y$  и приравняемъ ее нулю, то получимъ уравненіе, являющееся слѣдствіемъ названнаго постулата, такъ какъ условіе (A) основано на немъ.

3) Третье допущеніе состоитъ въ томъ, что сжатое сѣченіе  $BD$  принимается плоскимъ и вертикальнымъ; другими словами, допускается, что всѣ частицы, проходя черезъ вертикаль  $BD$ , имѣютъ горизонтальныя, хотя и не-

равныя скорости; траекторіи отдѣльныхъ струекъ, вообще кривыя, согласно этому, имѣють одну общую вертикальную нормаль *ВDD*. (Очевидно, что это допущеніе произвольно, и, напр., для струйки *ЕBC* совершенно невѣрно, но по видимому, въ немъ нѣтъ существеннаго отступленія отъ дѣйствительности.

4) Крімъ того, Boussinesq предполагаетъ, что отдѣльныя струйки имѣють не только общую нормаль, но и общій центръ кривизны для элементовъ, лежащихъ на линіи *BD*. Это допущеніе тоже произвольно, но тѣмъ не менѣе не представляетъ ничего невѣроятнаго и въ то же время есть простѣйшее, которое только можно вообразить. Называя радіусъ кривизны струйки *ADF* для точки *D* черезъ  $R_0 = OD$ , можемъ выразить радіусъ кривизны  $R$  струйки *NMQ* для точки *M* ур-іемъ:

$$R = R_0 - \varepsilon + z.$$

Двумя послѣдними допущеніями мы обусловливаемъ опредѣленный законъ распределенія давленій въ сѣченіи *BD*. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ общее уравненіе движенія жидкости по оси *z*-овъ:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dz} = Z - \left( \frac{dw}{dt} \right).$$

Здѣсь  $Z$  есть проекція внѣшнихъ силъ на вертикаль. Для воды  $Z = -g$ , если ось *z*-овъ направлена вверхъ;  $\left( \frac{dw}{dt} \right)$  представляетъ проекцію полного ускоренія на ось *z*-овъ. Такъ какъ, по предположенію, радіусъ кривизны всѣхъ траекторій для сѣченія *BD* вертикаленъ, то проекція полного ускоренія на ось *z*-овъ равна его проекціи на радіусъ кривизны, т.-е. равна центростремительному ускоренію:

$$\left( \frac{dw}{dt} \right) = - \frac{v^2}{R}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dz} = -g + \frac{v^2}{R_0 + z - \varepsilon} \dots \dots \dots (3)$$

Дифференцируя по *z* уравненіе (2), имѣемъ

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dz} = -g - v \frac{dv}{dz}$$

Сравнивая два послѣднія выраженія, находимъ:

$$R_0 = z - \varepsilon - \frac{v^2}{g}$$

Раздѣляя переменныя, получаемъ:

$$R_0 \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t} \quad (1)$$

Интегрируя послѣднее уравненіе, получимъ, очевидно

$$r(R_0 + z - \varepsilon) = \text{const.} \quad (4)$$

Это ур-іе представляетъ законъ измѣненія скорости съ измѣненіемъ координаты  $z$  сѣченія  $BD$ . Соединяя его съ ур-іемъ (2), легко получить законъ измѣненія давленія въ этомъ сѣченіи.

Примѣнимъ это уравненіе къ струйкѣ  $EBC$ , полагая

$$z = y$$

и

$$z = \varepsilon - y$$

получимъ:

$$r_1(R_0 + y) = r(R_0 + z - \varepsilon).$$

Уравненіе (2) для той же струйки, при  $p = 0$ , даетъ

$$r_1 = \sqrt{2g(h - \varepsilon - y)}.$$

Слѣдовательно,

$$r(R_0 + z - \varepsilon) = (R_0 + y)\sqrt{2g(h - \varepsilon - y)} \quad (B)$$

Далѣе, примѣнимъ тѣ же два уравненія къ струйкѣ  $ADF$ , для чего придется положить:

$$z = \varepsilon + \dots$$

Что же касается до избытка давленія  $p$ , то онъ, вообще, можетъ отличаться отъ нуля, такъ какъ при разсматриваемомъ нами случаѣ истеченія безъ бокового сжатія, если не обезпечить доступа воздуха подъ струю, то тамъ можетъ образоваться разрѣженіе; въ нѣкоторыхъ, впрочемъ, случаяхъ, какъ увидимъ, здѣсь имѣется давленіе и больше атмосфернаго. Поэтому положимъ, что въ  $D$  есть нѣкоторое избыточное давленіе  $p_0$ , которое выразимъ въ доляхъ напора  $(h - \varepsilon)$  надъ точкой  $D$  такъ:

$$p_0 = -n\gamma(h - \varepsilon).$$

Коэффициентъ  $n$  можетъ быть самъ по себѣ и положительнъ, и отрицателенъ. Если  $n$  отрицателенъ, то  $p_0$  есть въ полномъ смыслѣ избытокъ давленія, отклоняющій струю кверху. Если  $n = 0$ , то и  $p_0 = 0$ ,

т.-е. давленіе подь струей равно атмосферному, что соотвѣтствуетъ такъ называемой *свободной струей* (парре libre). Наконецъ, если  $n$  положительно, то подь струю получается разрѣженіе, и атмосферное давленіе прижимаетъ струю книзу въ большей или меньшей степени, смотря по величинѣ разрѣженія.

Итакъ, уравненія (2) и (4) дадутъ въ этомъ случаѣ.

$$r(R_0 + z - \varepsilon) = R_0 \sqrt{2g(h - \varepsilon)(1 + n)} \dots \dots \dots (5)$$

Соединяя это уравненіе съ ур. (B), получаемъ:

$$(R_0 + y)\sqrt{h - \varepsilon - y} = R_0 \sqrt{(h - \varepsilon)(1 + n)} \dots \dots \dots (6)$$

Обозначимъ для краткости:

$$\sqrt{\frac{h - \varepsilon - y}{(h - \varepsilon)(1 + n)}} = \frac{R_0}{R_0 + y} = k \dots \dots \dots (7)$$

Эти послѣднія соотношенія преобразуются въ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} h \frac{y}{h - \varepsilon} &= 1 - k^2(1 + n), \\ \frac{R_0}{y} &= \frac{k}{1 - k^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

По смыслу обозначенія (7)  $k$  есть абсолютное число, т.-е. для насъ оно положительно ( $k > 0$ ). Кроме того, изъ второго ур-ія (8) видно, что  $k$  во всякомъ случаѣ меньше единицы, такъ какъ отрицательное  $R_0$  значило бы, что вся струя загибается кверху, чего, конечно, быть не можетъ. Далѣе, какъ было упомянуто, всегда

$$y < h - \varepsilon,$$

слѣдовательно,

$$y < h - \varepsilon,$$

а потому имѣемъ

$$0 < 1 - k^2(1 + n) < 1.$$

Такимъ образомъ, получаемъ для  $k$  слѣдующія предѣльные значенія:

$$\left. \begin{aligned} 1 > k^2(1 + n) > 0, \\ 1 > k > 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Опредѣлить величину  $\varepsilon$  вообще не представляется возможнымъ: поэтому Boussinesq вноситъ новое, пятое, предположеніе, основанное на резуль-

татахъ наблюдений Bazin'a, а именно, онъ считаетъ, что отношеніе  $\frac{\varepsilon}{h}$  есть постоянная величина.

Такъ какъ  $h$  есть всегда данная величина, то, при данномъ  $n$ , уравненія (5) и (8) даютъ возможность опредѣлить сначала  $y$ , потомъ  $R_0$ , затѣмъ для любой точки  $M$  скорость  $v$ , а по ней изъ (2) давленіе  $p$ , — все это въ зависимости отъ неизвѣстной пока величины  $y$ , т.-е. отъ новаго переменнаго  $h$ , введеннаго обозначеніемъ (7). Очевидно поэтому, что и расходъ  $q$  черезъ единицу ширины водослива ( $Q = qb$ ) можно выразить также въ функціи  $h$ .

Понятно, что вообще:

$$q = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + y} v dz.$$

Внося сюда  $v$  по уравненію (5), при чемъ, конечно  $h$ ,  $\varepsilon$ ,  $R_0$  и  $n$  отъ  $z$  не зависятъ, получимъ:

$$q = R_0 \sqrt{2g(h - \varepsilon)(1 + n)} \int_{\varepsilon}^{\varepsilon + y} \frac{dz}{R_0 \sqrt{z - \varepsilon}} = R_0 \sqrt{2g(h - \varepsilon)(1 + n)} \cdot L_n \frac{R_0 \sqrt{h - \varepsilon}}{R_0}$$

Выражая  $R_0$  и  $y$  по  $h$ , а  $(h - \varepsilon)$  по уравненіямъ (7) и (8), находимъ:

$$q = \sqrt{2g(h - \varepsilon)(1 + n)} \cdot \frac{h}{1} \frac{1}{h} (h - \varepsilon) \left[ 1 - k^2(1 + n) \right] L_n \frac{1}{h}$$

Послѣ простыхъ преобразованій это даетъ:

$$q = f(k) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{h} \right)^2 h \sqrt{2gh},$$

гдѣ для краткости письма обозначено:

$$f(k) = \left[ h \sqrt{1 + n} - h \sqrt{1 - n} \right]^2 \frac{L_n h}{h - 1}$$

..... (10)

Полезно отмѣтить, что, если положить

$$f(k) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{h} \right)^2 = u,$$

то это выраженіе расхода является тождественнымъ съ уравненіемъ (1).

Изъ неравенствъ (9) видно, что какъ само  $h$ , такъ и  $h^2(1 + n)$  суть положительныя правильныя дроби; слѣдовательно, величина  $f(k)$  во всякомъ случаѣ положительна. Однако, при  $h = 1$  и при  $h = 0$ , т.-е. при предѣль-

ныхъ возможныхъ значенійхъ  $h$ ,  $f(h)$  получаетъ неопредѣленные значенія  $\frac{0}{0}$  и  $\frac{\infty}{\infty}$  ( $0 - 0$ ),  $(-\infty)$ . Въ то же время при  $h \downarrow 1 - n = 0$ , а также при  $h \downarrow 1 - n = 1$ , имѣемъ  $f(h) = 0$ ; а такъ какъ при промежуточныхъ значеніяхъ  $h$  это количество, какъ мы замѣтили, всегда положительно, то слѣдовательно,  $f(h)$  имѣетъ нѣкоторый maximum.

На основаніи постулата Bѣlanger—Boussinesq заключаемъ, что  $q$  будетъ имѣть то именно значеніе, которое соответствуетъ максимуму  $f(h)$ . На основаніи предыдущаго слѣдовало бы, собственно, дифференцировать  $q$  по  $y$ ; но такъ какъ мы считаемъ  $h$  независимымъ,  $\frac{\xi}{h} = const$ , а  $n$  даннымъ, то какъ  $q$ , такъ и  $k$  являются явными функціями одного  $y$ , а потому дифференцированіе по  $y$  можно замѣнить дифференцированіемъ по  $h$  \*). Легко также видѣть, что

$$\frac{\partial q}{\partial k} = \frac{\partial f(k)}{\partial k} \cdot C,$$

гдѣ  $C$  есть  $const$ , равное  $(1 - \frac{\xi}{h})^2 h \downarrow 2qh$ . Поэтому условіе  $\frac{\partial q}{\partial h} = 0$  сводится къ условію  $\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 0$ .

Составляемъ, на основаніи второй строки (10), ур-не  $\frac{\partial}{\partial k} f(k) = 0$ ; имѣемъ:

$$\frac{L_n k}{k-1} \{ \sqrt{1+n} - 3k^2 (\sqrt{1+n})^2 \} + \frac{(k-1)-k}{(k-1)^2} L_n k \{ \sqrt{1+n} - k^2 (\sqrt{1+n})^2 \} = 0.$$

Сокращая на  $\sqrt{1+n}$ , приводя къ одному знаменателю и собирая въ правую часть члены съ общимъ множителемъ  $k^2(1+n)$ , получаемъ:

$$(k-1)L_n k + (k-1) - k L_n k - k^2(1+n) \{ 3(k-1)L_n k + (k-1) - k L_n k \}.$$

Дѣлая приведеніе въ обѣихъ частяхъ равенства и дѣля все уравненіе на  $L_n k$ , получаемъ:

$$\frac{k-1}{L_n k} - 1 = k^2(1+n) \left\{ \frac{k-1}{L_n k} + 2(k-1) - 1 \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Наконецъ, рѣшая это ур-не, но не относительно  $k$ , а относительно  $k^2(1+n)$ , находимъ:

$$k^2(1+n) = \left. \begin{array}{l} \frac{1}{1 - q(h)} \\ \frac{2}{q(h)} - \frac{1}{L_n k} - \frac{1}{k} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

гдѣ обозначено:

\*) Строго говоря, эта замѣна возможна, если полученную производную умножимъ еще на  $\frac{dk}{dy}$ . Но такъ какъ мы имѣемъ въ виду приравнять все нулю, то, очевидно,  $\frac{dk}{dy}$  при этомъ сократится, и у насъ останется только  $\frac{\partial q}{\partial k} = 0$  вмѣсто  $\frac{\partial q}{\partial y} = 0$ .

Итакъ, составаяя ур-іе  $\frac{d}{dh} f(k) = 0$  на основаніи ур-ія (10), мы находимъ соотношеніе (11) или (12) между  $k$  и  $n$ , которое вполне опредѣляетъ величину  $k$ , т. е. дѣлаетъ вопросъ объ истеченіи черезъ водосливъ при данныхъ напорѣ и давленіи подъ струєю, вполне рѣшеннымъ, въ предположеніи лишь, что  $\frac{\varepsilon}{h} = const.$

Рѣшеніе уравненія (12) не составитъ затрудненія, если опредѣлять изъ него не  $k$  для всякаго заданнаго  $n$ , а, наоборотъ, находить то  $n$ , которое соотвѣтствуетъ всѣмъ возможнымъ величинамъ  $k$ , относительно котораго мы уже знаемъ, что  $1 > k > 0$ . Въ таблицѣ 18 приведены какъ нѣкоторые корни ур-ія (12), такъ и соотвѣтствующія имъ значенія нѣкоторыхъ величинъ, характеризующихъ истеченіе.

Таблица 18.

$k$	$n$	$\frac{y}{h - \varepsilon}$	$\frac{R_0}{h - \varepsilon}$	$f(k)$
0	$+\infty$	0,6867	0	$+\infty$
0,1	24,2800	0,7472	0,0830	0,9612
0,2	4,9790	0,7608	0,1902	0,7486
0,3	1,5575	0,7698	0,3299	0,6352
0,4	0,3981	0,7766	0,5177	0,5605
0,46854	0	0,7806	0,6881	0,5216
0,5	-0,1283	0,7821	0,7821	0,5061
0,6	-0,4074	0,7867	1,1800	0,4640
0,7	-0,5726	0,7906	1,8450	0,4301
0,8	-0,6783	0,7941	3,1760	0,4020
0,9	-0,7494	0,7971	7,1740	0,3783
1,0	-0,8000	0,8000	$+\infty$	0,3578

Требуютъ поясненія рѣшенія этихъ уравненій въ случаѣ  $n = 0$  и въ случаѣ  $k = 1$ . Если  $n = 0$ , то удобно находить соотвѣтственное  $k$  не изъ ур-ія (12), а изъ (11). Изъ него въ этомъ случаѣ получаемъ:

$$\frac{k-1}{L_n k} = 1 - k^2 \sqrt{\frac{k-1}{L_n k}} = 2k - 1 - 1 \quad \left. \right\}$$

Отсюда

$$\frac{k-1}{L_n k} = 1 - \frac{2k^2}{k^2} \sqrt{\frac{k-1}{k^2}} = \frac{2k^2}{1-k}$$

$$\frac{k-1}{L_n k} = \frac{1+k-2k^2}{1+k} = \frac{(1-k)(1+2k)}{1+k} \dots \dots \dots (13)$$

Заметая, что

$$L_{,k} = L_{,k}^{-1},$$

получимъ:

$$L_{,k}^{-1} = \frac{1+k}{1+2k} \dots \dots \dots (C)$$

Наконецъ, разлагая  $L_{,k}^{-1}$  въ рядъ, получимъ уравнение, содержащее  $k$  въ цѣлыхъ степеняхъ. Рѣшая его, Вон-син-ся находятъ  $k = 0,46854$ . Что это действительно есть корень уравнения, убеждаемся непосредственной подстановкой въ ур-е (C). Получимъ:

$$\frac{1+k}{1+2k} = \frac{1,46854}{1,93708} = 0,7581.$$

$$L_{,k}^{-1} = L_{,2,135} = L_{,213,5} = L_{,100} = 3,3637 = 4,6052 = 0,7585$$

Равенство (C) удовлетворяется съ вполне достаточной точностью

Для нахождения  $f(k)$  удобно предварительно преобразовать ея выражение (10) при помощи уравнения (11). Такъ какъ въ нашемъ случаѣ  $n = 0$ , то, очевидно,

$$f(k) = \frac{k(1-k^2)(1+k)}{(1-k)(1+2k)} = \frac{k(1+k)^2}{1+2k} = 0,5216.$$

Рѣшение уравненія (12) при  $k = 1$  дѣлается такъ: очевидно, въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$g'(k) = \frac{1}{0^+ 0}$$

Чтобы раскрыть эту неопредѣленность, поступаемъ по общему правилу, беря производныя отъ числителя и знаменателя:

$$g'(k) = \frac{\frac{d}{dk} (1-k - L_{,k})}{\frac{d}{dk} [(1-k) L_{,k}]} = \left\{ \frac{1 - \frac{1}{k}}{-L_{,k}k + \frac{1-k}{k}} \right\}_{k=1} = 0/0.$$

Продолжая раскрывать неопредѣленность, беремъ вторыя производныя; получаемъ:

$$g''(k) = \frac{\frac{d}{dk} (-k+1)}{\frac{d}{dk} (1-k - L_{,k})} = \left\{ \frac{-1}{-1-L_{,k}k - \frac{k}{k}} \right\}_{k=1} = \frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно,

$$\{g(k)\}_{k=1} = \frac{1}{2}$$

и потому, по уравненію (12),

$$1 - n = \frac{1}{2}$$

или

$$n = 0,5.$$

Подбавимъ же образомъ раскроемъ неопредѣленность значенія  $f(k)$  въ уравненіи (10) при  $k = 1$ .



Требуется также некоторого пояснения случай  $h = 0$ , которому по ур-ням (12) соответствует  $n = +\infty$ . Положительные значения  $n$  как мы видели, соответствуют разрыву под струей, которое, будучи измерено высотой водяного столба, не может, очевидно, быть больше 10,33 *mtr.*, — иначе случился бы разрыв; следовательно, величина  $n$  должна удовлетворять условию:

$$n \leq \frac{10,33}{h - \epsilon}.$$

или

$$n \leq \frac{10,33}{h - \epsilon}.$$

Отсюда видно, что  $n = +\infty$  только в том случае, когда

$$h - \epsilon = h - 1 - h = -1;$$

в нашем предположении, что  $\frac{\epsilon}{h} = const.$ , это возможно только при  $h = 0$ ; а в этом случае истечения нет. Значит, случай  $h = 0$  является только предельным и реального значения не имеет.

Итак, уравнение (12) или таблица (18) дают возможность исключить величину  $h$  из уравнений (10), после чего расход  $q$  будет зависеть от отношения  $\frac{\epsilon}{h}$ , от давления под струей  $n$  и от напора  $h$ . Так как, согласно с Boussinesq, мы условились считать  $\frac{\epsilon}{h} = const.$ , то расход через водослив становится вполне известным, если известны  $n$  и  $h$ , совершенно независимо от всяких эмпирических коэффициентов (кроме отношения  $\frac{\epsilon}{h}$ ). Измерение величины  $n$  можно заменить измерением, например, высоты  $h'$  точки  $B$  над порогом  $A$ , при чем большая ошибка не будет, если принять  $B$  на одной вертикали с  $A$ . Эта величина  $h'$ , очевидно, есть то, что мы назвали  $(y + \epsilon)$ ; вычитая из нея величину  $\frac{\epsilon}{h} \cdot h$ , где напор  $h$  также дается измерением, получим толщину струи, после чего находим отношение  $\frac{y}{h - \epsilon}$  и по таблицѣ берем соответствующее значение  $f(h)$ ; по нему находим и расход  $q$ .

Понятно, что когда доступ воздуха под струю обеспечен, т.-е. когда известно заранее, что  $n = 0$ , то этого второго измерения делать не нужно; нужно только знать напор  $h$ , и тогда расход  $Q$  через вертикальный совершенный водослив шириною  $b$ , без сжатия с боков, будет выражаться формулой:

$$Q = qb = 0,5216 \left(1 - \frac{\epsilon}{h}\right)^{3/2} bh \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (14)$$

Что касается величины отношения  $\frac{\epsilon}{h}$ , то Boussinesq считает ее постоянной на основании слѣдующих наблюдений Bazin'a \*):

\*) См. Annales des ponts et chaussées, 1890. 1<sup>er</sup> sér., page 66.

Vazin определялъ профили струй какъ *EBC*, такъ и *ADF*; доступъ воздуха подъ струю былъ обезпеченъ, такъ что  $n = 0$ . водосливъ былъ шириною въ 2 *mts*; высота порога надъ дномъ канала была 1,13 *mts*. т.-е настолько велика, что скорость въ каналѣ была незамѣтна (совершенное сжатіе); сжатія съ боковъ не было. Приводимъ въ таб. 19 полученные имъ величины  $\epsilon$  для разныхъ напоровъ  $h$ .

Таблица 19.

$h$ въ <i>mts</i> .	0,152	0,200	0,252	0,268	0,300	0,318	0,345	0,400	0,419
$v$ въ <i>mts</i> .	16,4	22,3	28,2	29,2	33,9	36,0	41,3	46,0	50,0
$\epsilon$	0,108	0,1115	0,112	0,109	0,113	0,113	0,120	0,115	0,100

Изъ таблицы видно, что, дѣйствительно, отношеніе  $\frac{\epsilon}{h}$  при разныхъ  $h$  (и при  $n = 0$ ) сохраняетъ почти постоянную величину. Чтобы считаться съ тѣмъ, что, все таки, въ каналѣ была нѣкоторая скорость, вызывавшая не вполне совершенное сжатіе, примемъ для  $\frac{\epsilon}{h}$  не его среднюю величину, а нѣсколько большую, — именно, будемъ считать  $\frac{\epsilon}{h} = 0,12$ . Тогда

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{h}\right)^{3/2} = 0,88^{3/2} = 0,825,$$

а потому по ур-ію (14) для  $n = 0$  получимъ:

$$Q = 0,5216 \cdot 0,825 bh \sqrt{2gh} = 0,43032 bh \sqrt{2gh}.$$

Непосредственныя измѣренія, указанныя ниже въ § 17. привели Vazin'a къ заключенію, что при  $n = 0$  и при очень большой глубинѣ передъ порогомъ, для напоровъ, измѣняющихся отъ 0,05 до 0,5 *mts*, числовой коэффициентъ въ этой формулѣ долженъ измѣняться отъ 0,448 до 0,412, т.-е въ среднемъ равенъ 0,430, что очень хорошо сходится съ теоретической величиной Boussinesq \*).

\* Нѣкоторое разногласіе результатовъ теории и наблюденій получится въ величинѣ отношенія  $\frac{y}{h} = \frac{y}{h - i} \cdot 1 - \frac{i}{h}$ , которое для  $i = 0$  по Boussinesq равно 0,7806 . 0,98 = 0,6869. Наблюденія Vazin'a дали въ среднемъ  $\frac{y}{h} = 0,668$ , т.-е. на 3% меньше. Поэтому въ 1889 г. (см Comptes rendus. 1889, томъ CIX, второе полугодіе, стр. 514) Boussinesq опубликовалъ новый мемуаръ, гдѣ, отказываясь отъ предположенія  $\frac{i}{h} = \text{const}$ , онъ вводитъ предположеніе

**§ 17. Практическія данныя объ истеченіи через водосливы.**

Основнымъ матеріаломъ по этому вопросу служили раніе опыты Leshros; далѣе большое значеніе имѣли опыты Francis'a (въ 50-хъ годахъ) позднѣе появились обширные опыты Fteley и Stearns'a. Въ періодъ времени отъ 1886 по 1895 г. извѣстный французскій гидравликъ Bazin произвелъ длинный рядъ наблюденій надъ водосливами въ 2 м<sup>т</sup> длиной, — наблюденій весьма разнообразныхъ и обстоятельныхъ. Результаты наблюденій со всеми подробностями публиковались въ журналѣ Annales des ponts et chaussées по мѣрѣ хода работъ. въ 1898 году Bazin издалъ главные результаты своихъ наблюденій въ книгѣ „Experiences nouvelles sur l'écoulement en déversoir“. Обширную экспериментальную работу по этому вопросу опубликовалъ въ „Журналѣ о-ва нѣмецкихъ инженеровъ“ за 1890 годъ (стр. 1255 и слѣд.) ганноверскій профессоръ Frese. Заслуживаетъ упоминанія также работа извѣстнаго турбиннаго заводчика W. Mansen, помѣщенная въ томъ же журналѣ за 1892 годъ (стр. 1057 и слѣд.). Данныя Bazin'a лягутъ въ основу нижеслѣдующаго изложенія; иногда придется дѣлать сближенія съ данными другихъ авторовъ.

**А)** Начнемъ съ случая *свободнаго изліянія въ атмосферу* ( $n = 0$ ). Расходъ опредѣляется по уравненію (1); коэффициентъ  $\mu$  зависитъ отъ очень многихъ обстоятельствъ. Одно изъ важнѣйшихъ—это большая или меньшая степень совершенства сжатія; далѣе, имѣетъ вліяніе положеніе стѣнки водослива и большая или меньшая толщина его кромки; важно, наконецъ, присутствіе или отсутствіе бокового сжатія. Разсмотримъ эти случаи по порядку.

1) *Вертикальный водосливъ съ тонкой стѣнкой безъ сжатія съ боковъ.* Несовершенное сжатіе наблюдается при замѣтной скорости передъ порогомъ; это есть то, съ чѣмъ почти всегда приходится и необходимо считаться. Обыкновенно разсуждаютъ такъ: если передъ водосливомъ вода обладаетъ нѣкоторой средней скоростью \*)  $v_0$ , то истеченіе происходитъ не только подъ напоромъ  $h$ , но еще подъ добавочнымъ напоромъ, пропорціональнымъ напору  $\frac{v_0^2}{2g}$ , — обозначимъ его черезъ  $\alpha \frac{v_0^2}{2g}$ ; поэтому, если въ первое изъ ур-ій (10) вмѣсто  $h$  подставимъ  $h + \alpha \frac{v_0^2}{2g}$ , то получимъ такимъ образомъ выраженіе расхода черезъ единицу ширины водослива въ формѣ:

$$q = \mu \left( h + \alpha \frac{v_0^2}{2g} \right) \sqrt{2g \left( h + \alpha \frac{v_0^2}{2g} \right)} = \mu \sqrt{2g \left( h + \alpha \frac{v_0^2}{2g} \right)^3} \dots (15)$$

гдѣ

$$\mu = \left( 1 - \frac{2g\epsilon}{2gh - v_0^2} \right)^{3/2} \left[ k + 1 - n = (k \sqrt{1 - n^2})^3 \right] \frac{L_n k}{k - 1}$$

$\epsilon = const.$  Пользуясь этимъ соотношеніемъ и ур-емъ (8), онъ выражаетъ величину  $1 - \frac{v_0^2}{gh}$  въ функціи  $k$  и относитъ ее къ переменной величинѣ  $f(k)$  въ ур-яхъ (10). Диф-не по  $k$  этой новой величинѣ  $f(k)$  даетъ, конечно, новое ур-е (12), связывающее  $k$  съ  $n$ . Рѣшая его путемъ послѣдовательныхъ приближеній и считая  $\frac{\epsilon}{gh} = 0,14$ , Boussinesq получаетъ для случая  $n = 0$ :

$$\frac{v_0}{h} = 0,664,$$

$$\epsilon = 0,435 bh \sqrt{2gh},$$

что очень хорошо сходится съ данными Bazin'a.

\*) См. главу IV „Движеніе воды въ каналахъ“.

Въ мемуарѣ отъ 17 и 24 сентября 1888 года (см. Comptes rendus. томъ CVII) Boussinesq даетъ составъ коэффициента  $\alpha$  и его зависимость отъ  $h$  и  $n$ . Мы ограничимся изложеніемъ результатовъ, полученныхъ Bazin'омъ въ его многочисленныхъ опытахъ \*).

Представимъ уравненіе (15) въ такомъ видѣ:

$$q = \mu h \sqrt{2gh} \left( 1 - \alpha \frac{v_0^2}{2gh} \right)^{3/2}.$$

Такъ какъ  $\frac{v_0^2}{2gh}$  есть всегда небольшая правильная дробь, то, разлагая степень въ рядъ и ограничиваясь только однимъ членомъ, содержащимъ первую степень этой дроби, можемъ написать

$$q = \mu h \sqrt{2gh} \left( 1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{v_0^2}{2gh} \right).$$

Если полная глубина передъ каналомъ (тамъ же, гдѣ имѣруется напоръ  $h$ ) есть  $H$ , то, очевидно,

$$v_0 = \frac{q}{H},$$

а потому можно положить:

$$\frac{v_0^2}{2gh} = \frac{q^2}{2ghH^2} = M^2 \left( \frac{h}{H} \right)^2.$$

По смыслу введеннаго обозначенія слѣдуетъ, что подъ буквой  $M$  мы подразумѣваемъ:

$$M = \frac{q}{h \sqrt{2gh}} = \mu \left[ 1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{v_0^2}{2gh} \right]$$

или, замѣняя скорость  $v_0$  черезъ вышеприведенное ея выраженіе:

$$M = \mu \left[ 1 + \frac{3}{2} \alpha M^2 \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right].$$

Обозначая далѣе одной буквой  $K$  эмпирической коэффициентъ  $\frac{3}{2} \alpha M^2$ , входящій въ послѣднюю часть равенства, находимъ, что расходъ опредѣляется ур-іемъ

$$\left. \begin{aligned} q &= Mh\sqrt{2gh}, \\ M &= \mu \left[ 1 + K \left( \frac{h}{H} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

\*) См. Annales des ponts et chaussées, 1882, 2<sup>o</sup> sém., page 417.



Величина  $M$  является, следовательно, коэффициентом расхода при несовершенном сжатии;  $\mu$  есть тоже коэффициент расхода при  $H$  очень большим по сравнению с  $h$ , т.-е. при совершенном сжатии.

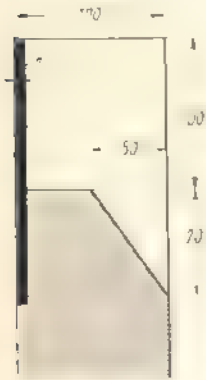
На основании своих опытов Bazin дает для  $\mu$  значение  $\frac{2}{3}$ , а для  $K$  величину 0,55, причем, следовательно,

$$M = \mu \left\{ 1 + 0,55 \frac{h^2}{H^2} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Самая величина  $\mu$  определялась из сравнения наблюдений над водосливами разной глубины (подробнее см. последнюю упомянутую статью Bazin'a); из этих данных Bazin вывел формулу:

$$\mu = 0,405 + \frac{0,003}{h} \dots \dots \dots (18)$$

По формулѣ (17) подсчитана нижеприводимая таблица 20. Указанные въ ней значенія  $\mu$  не вполне соответствуют формулѣ (18).



Фиг. 86.

На отдельной таблицѣ III данныя этой таблицы представлены графически въ примененіи къ пяти водосливамъ, испытаннымъ Bazin'омъ. Точки представляютъ величины  $M$ , полученные наблюдениемъ. Какъ видно, пока напоръ малъ, т.-е. пока расходъ, а следовательно, и скорость, въ подводящемъ каналѣ малы, всѣ коэффициенты уменьшаются съ увеличеніемъ напора, подобно случаю отверстій. Съ увеличеніемъ напора и, следовательно, скорости подхода, последняя сильно влияетъ, и коэффициентъ расхода растетъ тѣмъ быстрее, чѣмъ меньше высота ( $H - h$ ) водослива. Коэффициентъ  $\mu$ , наоборотъ, непрерывно убываетъ, такъ какъ онъ предполагаетъ полное отсутствіе скорости подхода. Изъ таблицы видно также, что кривыя очень хорошо передаютъ результаты наблюдений.

ошибки, вообще, не достигаютъ 1°, такъ что уравненіями (17) и (18) пользоваться, вообще, можно. Профиль водослива въ Bazin'a указанъ на фиг. 86.

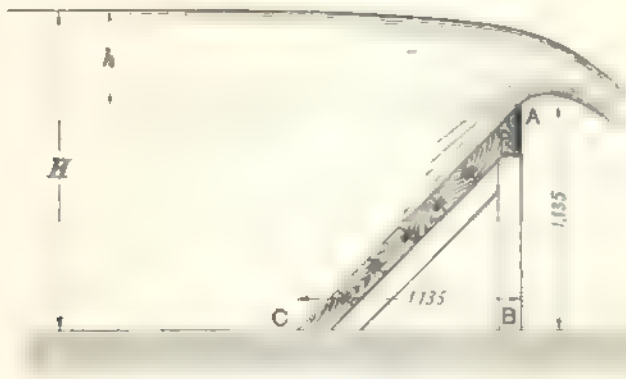
2) Очень часто условіе вертикальности стѣнки не бываетъ соблюжено.—*стѣнка водослива можетъ быть наклонена по теченію* (фиг. 87) или *противъ течения* (фиг. 88).

Само собою понятно, что здѣсь нельзя ожидать, чтобы отношеніе  $\frac{k}{h}$  сохраняло ту же величину, какъ для вертикальнаго водослива; напротивъ того, на фиг. 87 должно ждать меньшаго  $\frac{k}{h}$ , а на фиг. 88—большаго  $\frac{k}{h}$ , нежели въ случаѣ фиг. 85. Что касается до величины этого отношенія, то теорія Boussinesq отвѣта на этотъ вопросъ не даетъ. Зато, согласно съ нею, оба случая фиг. 87 и 88, кромѣ величины  $\frac{k}{h}$ , ничѣмъ существенно не отличаются отъ случая фиг. 85. На это указалъ Bazin, обстоятельно изучившій рядъ водосливовъ типа фиг. 88, у которыхъ отношеніе  $\frac{AB}{BC}$  было или  $\frac{1}{1}$ , или  $\frac{3}{2}$ , или  $\frac{3}{1}$ , а также

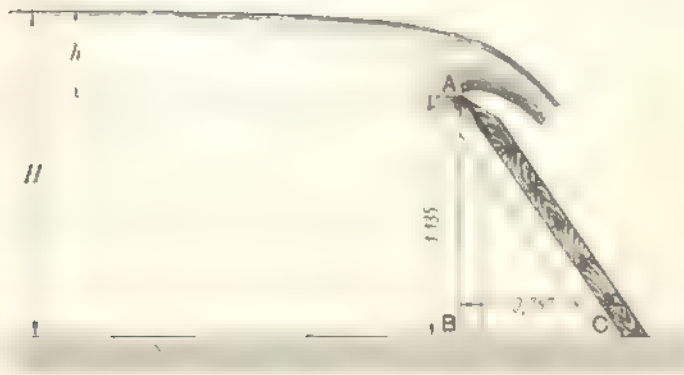
Таблица 20.

Напор $h$ въ $m/s$ .	Значения коэф-товъ $M$ въ ур-н (17) при высотъ порога надъ дномъ канала ( $H-h$ ) въ $m$ .									$M$ при $H$ очень больш., пономь.
	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	1,00	1,50	2,00	
0,05	0,458	0,453	0,451	0,450	0,449	0,449	0,449	0,448	0,448	0,4481
0,06	0,456	0,450	0,447	0,445	0,445	0,444	0,443	0,443	0,443	0,4427
0,07	0,455	0,448	0,445	0,443	0,442	0,441	0,440	0,440	0,439	0,4391
0,08	0,456	0,447	0,443	0,441	0,440	0,438	0,438	0,437	0,437	0,4363
0,09	0,457	0,447	0,442	0,440	0,438	0,436	0,436	0,435	0,434	0,4340
0,10	0,459	0,447	0,442	0,439	0,437	0,435	0,434	0,433	0,433	0,4322
0,12	0,462	0,446	0,442	0,438	0,436	0,433	0,432	0,430	0,430	0,4291
0,14	0,466	0,450	0,443	0,438	0,435	0,432	0,430	0,428	0,428	0,4267
0,16	0,471	0,453	0,444	0,438	0,435	0,431	0,429	0,427	0,426	0,4246
0,18	0,475	0,456	0,445	0,439	0,435	0,431	0,428	0,426	0,425	0,4229
0,20	0,480	0,459	0,447	0,440	0,436	0,431	0,428	0,425	0,423	0,4215
0,22	0,484	0,462	0,449	0,442	0,437	0,431	0,428	0,424	0,423	0,4203
0,24	0,488	0,465	0,452	0,444	0,438	0,432	0,428	0,424	0,422	0,4194
0,26	0,492	0,468	0,455	0,446	0,440	0,432	0,429	0,424	0,422	0,4187
0,28	0,496	0,472	0,457	0,448	0,441	0,433	0,429	0,424	0,422	0,4181
0,30	0,500	0,475	0,460	0,450	0,443	0,434	0,430	0,424	0,421	0,4174
0,32	0,504	0,478	0,462	0,452	0,444	0,436	0,430	0,424	0,421	0,4168
0,34	0,507	0,481	0,464	0,454	0,446	0,437	0,431	0,424	0,421	0,4162
0,36	0,510	0,483	0,467	0,456	0,448	0,438	0,432	0,424	0,421	0,4156
0,38	0,513	0,486	0,469	0,458	0,449	0,439	0,432	0,424	0,421	0,4150
0,40	0,516	0,489	0,472	0,459	0,451	0,440	0,433	0,424	0,421	0,4144
0,42	—	0,491	0,474	0,461	0,452	0,441	0,434	0,425	0,421	0,4139
0,44	—	0,494	0,476	0,463	0,454	0,442	0,435	0,425	0,421	0,4134
0,46	—	0,496	0,478	0,465	0,456	0,443	0,435	0,435	0,421	0,4128
0,48	—	0,498	0,480	0,467	0,457	0,444	0,436	0,425	0,421	0,4122
0,50	—	0,500	0,482	0,468	0,459	0,445	0,437	0,426	0,421	0,4118
0,52	—	0,502	0,484	0,470	0,460	0,446	0,438	0,426	0,421	0,4113
0,54	—	0,504	0,485	0,472	0,461	0,447	0,439	0,426	0,421	0,4108
0,56	—	0,506	0,487	0,473	0,463	0,449	0,439	0,427	0,421	0,4103
0,58	—	0,508	0,489	0,475	0,464	0,450	0,440	0,427	0,421	0,4099
0,60	—	0,510	0,491	0,476	0,466	0,451	0,441	0,428	0,421	0,4095
0,62	—	—	0,492	0,478	0,467	0,452	0,442	0,428	0,422	0,4091
0,64	—	—	0,494	0,480	0,469	0,453	0,443	0,429	0,422	0,4087
0,66	—	—	0,495	0,481	0,470	0,454	0,444	0,429	0,422	0,4084
0,68	—	—	0,497	0,483	0,471	0,455	0,445	0,430	0,422	0,4080
0,70	—	—	0,498	0,484	0,473	0,456	0,446	0,430	0,423	0,4077

рядъ водосливовъ по типу фиг. 87, гдѣ отношеніе  $\frac{AB}{BC}$  было соответственно равно  
 $\frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{4}$ .



Фиг. 87.



Фиг. 88.

Эти наблюденія подтверждаютъ теорію Boussinesq, если наблюдаемые расходы будутъ пропорциональны наблюдаемымъ значениямъ  $(1 - \frac{\epsilon}{h})^{3/2}$ , согласно уравненію (14). Въ табл. 21 приведены округленные результаты наблюденій Визина \* надъ водосливомъ шириною въ 1.13 mtr (AB = 1.13 mtr), причемъ для сравненія приведены отношенія коэффициентовъ расхода въ наклонныхъ водосливахъ къ коэффициенту расхода въ вертикальномъ водосливѣ, и рядомъ же приведены соответствующія отношенія величинъ  $(1 - \frac{\epsilon}{h})^{3/2}$ .

\* См. Annales des ponts et chaussees, 1890, 1 sem., p. 33 et 46.

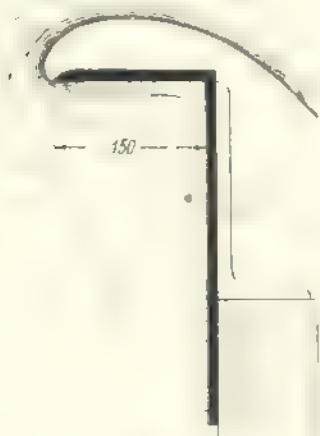


Таблица 21.

Водосливъ съ глубиной порога надъ дномъ подводщаго канала = 1,13 *mgr.*

	Наклонъ противъ течения.			Вертикаль ный.	Наклонъ по течению.				
	1:1	3:2	3:1		3:1	3:2	1:1	1:2	1:4
Отношенія $\frac{\xi}{h}$	0.159	0.150	0.136	0.112	0.089	0.061	0.041	0.012	0.003
Значеніе <i>M</i> при напорѣ въ <i>mgr.</i>	0.10—0.15	—	—	0.4307	0.4488	0.4668	0.4777	0.4896	0.4692
	0.15—0.25	—	0.3989	0.4066	0.4266	0.4456	0.4636	0.4762	0.4844
	0.25—0.35	0.3941	0.3986	0.4098	0.4266	0.4469	0.4650	0.4768	0.4850
	0.35—0.45	0.3976	0.4006	0.4136	0.4286	0.4468	0.4656	0.4775	0.4883
Среднее значеніе <i>M</i> .	0.3958	0.3993	0.4100	0.4281	0.4475	0.4652	0.4771	0.4868	0.4721
Отношенія <i>M</i> .	0.9250	0.9330	0.9580	1.0000	1.0450	1.0870	1.1150	1.1370	1.1030
Отношенія величинъ $(1 - \frac{\xi}{h})^3$	0.9210	0.9370	0.9590	1.0000	1.0390	1.0870	1.1220	1.1740	0.1890

Какъ видно, эти отношенія въ двухъ послѣднихъ горизонтальныхъ строкахъ весьма мало отличаются другъ отъ друга, кромѣ наклонныхъ по течению водосливовъ, болѣе пологихъ, нежели 1:1, т.е. образующихъ съ горизонтомъ уголъ меньше 45°. Это вполне естественно, такъ какъ чѣмъ положе стѣнка, тѣмъ сильнѣе должно сказываться замедляющее вліяніе тренія о стѣнку: отношеніе коэффициентовъ расхода должно быть меньше, нежели ожидаемое въ зависимости отъ величины  $\frac{\xi}{h}$ , что и видно по таблицѣ 21.



Фиг. 89.

При такихъ водосливахъ выбираютъ *M* по таблицѣ 20 или уравненію (17) и исправляютъ согласно предпоследней горизонтальной строкѣ таблицы 21.

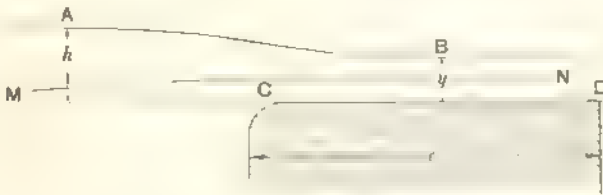
Предѣльнымъ случаемъ наклона противъ течения можно считать случай, указанный на фиг. 89, гдѣ къ вертикальной стѣнкѣ *AB* пригнана тонкая и узкая (150 *mm*) желѣзная доска, образующая передъ водосливомъ нѣчто подобное насадку Борда.

Примѣняя сюда ур-е количества движенія, причѣмъ распределеіе скоростей въ сжатомъ сѣченіи принимается по ур-ю (4), совершенно подобно тому, какъ это было

сдѣлано для насадки Борда, Boussinesq находитъ, что въ этомъ случаѣ отношеніе  $\frac{\varepsilon}{h}$  должно имѣть значеніе 0,2 \*). Bazin для этого случая найдетъ  $\frac{\varepsilon}{h} = 0,188$ , что довольно близко къ результату Boussinesq. Здѣсь, какъ и въ насадкѣ Борда, гѣйствительное сжатіе нѣсколько меньше теоретическаго.

3) Если случай фиг. 89 можно разсматривать, какъ предѣльный случай фигуры 88 то *водосливъ съ толстой стѣнкой* (фиг. 90) можно считать предѣльнымъ случаемъ фигуры 87. Уравненія (10) примѣнимы и тутъ \*\*); но отъ нихъ нельзя ожидать большой точности, такъ какъ становится замѣтнымъ треніе о толстую стѣнку; Bélanger получилъ тотъ же результатъ, къ которому придемъ, примѣняя къ этому случаю уравненія (10), но гораздо болѣе простымъ путемъ, а именно:

Въ какомъ-нибудь сѣченіи *B* (фиг. 90) надъ стѣнкою *CD* можно считать, что всѣ струйки движутся прямолинейно и параллельно, если только



Фиг. 90.

стѣнка *CD* достаточно толста, чтобы направить струйки и, кромѣ того, если передъ *C* она скруглена такъ, что струйка, вступающая въ *C*, не испытываетъ сжатія. Если въ сѣченіи *B* струйки прямолинейны и параллельны, то давленія въ немъ распределяются по закону гидростатики; то же можно сказать и о всякомъ другомъ сѣченіи *A*, взятомъ достаточно далеко передъ порогомъ, чтобы считать въ немъ скорость равною нулю. Тогда для какой-нибудь струйки *MN* можно написать уравненіе Д. Бернулли въ предѣлахъ отъ *A* до *B* въ видѣ:

$$h - y + \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (E)$$

гдѣ *y* есть глубина сѣченія *B*, а *v* есть скорость струйки. Отсюда видно, что скорости всѣхъ струекъ одинаковы, какъ при истеченіи подъ уровень подъ напоромъ  $h - y$ . Это справедливо, конечно, постольку, поскольку треніе о стѣнки не вліяетъ на движеніе жидкости. Опредѣляя изъ (E) ско-

\*) См. Comptes rendus, 1887, томъ CV, второе полугодіе, стр. 697.

\*\*\*) Ibid., стр. 632.

ростъ  $c$  и подсчитывая расходъ  $Q$ , найдемъ, что, при ширинѣ водослива  $b$ , черезъ него перельется количество жидкости.

$$Q = byr = by\sqrt{2g(h-y)}.$$

Для опредѣленія высоты  $y$  примѣнимъ принципъ наибольшаго расхода, т. е. составляемъ производную  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  и приравняемъ ее нулю; находимъ:

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = b\sqrt{2g} \left\{ \sqrt{h-y} - \frac{y}{2\sqrt{h-y}} \right\} = 0.$$

Отсюда находимъ

$$2h - 2y = y$$

или

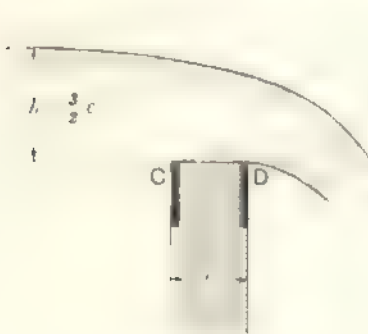
$$y = \frac{2}{3}h.$$

Послѣ этого:

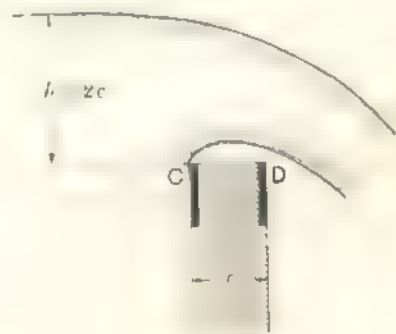
$$Q = \frac{2}{3\sqrt{3}} bh\sqrt{2gh} = 0,385 bh\sqrt{2gh}.$$

При условіяхъ, положенныхъ въ основу вывода (хорошее скругленіе кромки  $C$  и достаточная длина  $CD$ , — хотя и не чрезмерная, чтобы не особенно увеличивать вліянія тренія). Lesbros получилъ вмѣсто 0,385 только 0,35, а Bazin—немного больше, 0,373.

Болѣе обстоятельное изслѣдованіе водосливовъ съ толстымъ порогомъ было предпринято въ 1877 г. американцами Fteley и Stearns'омъ, а еще позднѣе Bazin'омъ \*). Въ опытахъ этого послѣдняго размѣръ  $c$  (толщина стѣнки) измѣнялся отъ 100 до 200 *mm*. Оказалось, что, пока напоръ  $h$  не



Фиг. 91.



Фиг. 92.

превосходить приблизительно  $\frac{3}{2}c$ , струя плотно прилегаетъ къ площадкѣ  $CD$  (фиг. 91); если же напоръ  $h$  превосходить  $2c$ , то струя ни въ какомъ случаѣ къ стѣнкѣ  $CD$  не прилегаетъ (см. фиг. 92), и истеченіе происходитъ, какъ черезъ тонкую стѣнку. Это можно объяснить тѣмъ, что при условіяхъ

\*) См. Annales des ponts et chaussées, 1806, 2<sup>ème</sup>., p. 645.

фиг. 85 длина  $AG$  имѣть среднюю величину  $\frac{2}{3} h$ , подобно тому, какъ въ среднемъ  $\epsilon = 0.12 h$ . Слѣдовательно, пока  $c > \frac{2}{3} h$  или  $h < \frac{3}{2} c$ , струя ударяется о стѣнку, увлекаетъ воздухъ, заключенный между нею и стѣнкою, и какъ бы прилипаетъ къ стѣнкѣ. Если  $h > 2c$ , то струя за стѣнку уже не задѣваетъ, и истеченіе отъ размѣра  $c$  не зависитъ. При измѣненіяхъ напора между указанными предѣлами, смотря по степени свободы доступа воздуха подъ струю, она или прилипаетъ къ стѣнкѣ или отстаетъ отъ нея; форма фиг. 92 устойчивѣе; такъ, напр., плывущее тѣло вызываетъ переходъ отъ формы фиг. 91 къ формѣ фиг. 92.

Поэтому, когда  $h > 2c$ , то явление можно разсматривать, какъ явление съ тонкой стѣнкой.

Когда  $h < 2c$ , Bazin предлагаетъ выбрать изъ таблицы (20) или по уравненіямъ (17) и (18) коэффициентъ расхода  $M$  или  $\mu$ , смотря по высотѣ водослива, для тонкой стѣнки и по нему найти коэффициентъ расхода  $m$  для толстой стѣнки по слѣдующей формулѣ, весьма близко выражающей результаты его опытовъ:

$$m = M \left( 0.70 - 0.185 \frac{h}{c} \right) \dots \dots \dots (19)$$

Изъ этой формулы получаемъ, что:

при $\frac{h}{c} = 0.5$	отношеніе $\frac{m}{M}$	0.79,	} или = 1, если получается теченіе по фиг. 92, т.-е. если струя отстаетъ отъ площади $CD$
" " = 1.0	" "	0.88,	
" " = 1.5	" "	0.98,	
" " = 2.0	" "	1.07,	
" $\frac{h}{c} > 2.0$	" "	1.00.	

Отсюда видно, какъ сильно влияетъ толщина стѣнки. Формула (19) прихвѣнча для толщинъ  $c$  до 250 *mm*. Въ этихъ предѣлахъ она очень близко передаетъ результаты, полученные Fteley и Stearns'омъ. Съ меньшей точностью она приложима и къ болѣе широкимъ порогамъ, и тутъ можетъ оказаться ошибка уже до 1%.

При толстыхъ порогахъ существенное влияние оказываетъ *наличность закругленія передней его кромки*. По Fteley и Stearns'у, закругленіе оказываетъ на ходъ явленія такъ, какъ если бы вмѣсто напора  $h$  былъ на дѣлѣ напоръ  $(h - 0.7R)$ , гдѣ черезъ  $R$  обозначенъ радиусъ закругленія; другими словами, коэффициентъ расхода въ такомъ случаѣ можно увеличить въ отношеніи  $(1 + 0.7 \frac{R}{h})^2$ , что почти равно  $1 - \frac{R}{h}$ . Закругляя переднюю кромку водослива радиусомъ въ 100 *mm*, Bazin нашелъ, что, при толщинѣ водослива  $c$  въ 0.8 *mtg* расходъ увеличивался на 12% по сравненію съ тѣмъ же водосливомъ безъ закругленія; если же  $c$  было равно 2 *mtg*, то увеличеніе расхода достигало 14%.

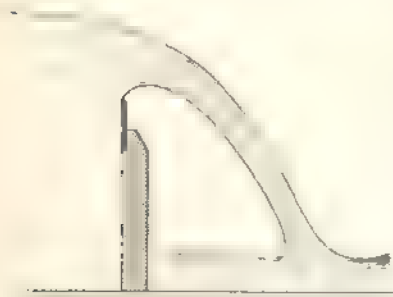
4) Наконецъ, можетъ оказаться и боковое сжатіе, когда *водосливъ занимаетъ только часть ширины канала*. Въ этомъ случаѣ Francis рекомендуетъ поступать такъ: по его наблюденіямъ\*, боковое сжатіе какъ бы уменьшаетъ ширину водослива  $b$  на одну десятую напора  $h$ , такъ что если сжатіе имѣетъ мѣсто съ обѣихъ концовъ водослива, то при опре-

\* См. его работу „Lowel, hydraulic experiments“. New-York, 1871, p. 133.

дѣленія  $Q$  слѣдуетъ брать не всю ширину  $b$  водослива, а только  $(b - 0,2 h)$ . Онъ отмѣчаетъ, что это справедливо только въ томъ случаѣ, если  $h < \frac{b}{3}$  и если скорость передъ водосливомъ не велика.

В) До сихъ поръ мы говорили о случаѣ  $n = 0$ , т.-е. о свободномъ истеченіи, для осуществленія чего необходимо обезпечить доступъ воздуха подъ струю. Весьма часто этого не дѣлаютъ, оставляя ширину отводящаго канала равною ширинѣ водослива, который въ свою очередь имѣетъ ширину подводящаго канала. Въ такомъ случаѣ между струей и стѣнками водослива образуется совершенно замкнутое пространство, въ которомъ устанавливается нѣкоторое опредѣленное давленіе, отличное отъ атмосфернаго, и  $n$  уже не равно нулю. Величина этого давленія зависитъ отъ слѣдующихъ обстоятельствъ.

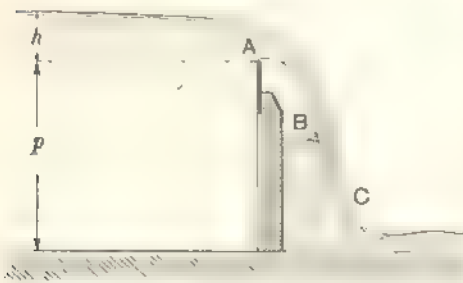
Представимъ себѣ сначала струю съ обезпеченнымъ подъ нее доступомъ воздуха (фиг. 93). Это достигается, наприм., тѣмъ, что ширина канала, куда вода выливается, дѣлается больше ширины водослива; если же обѣ ширины одинаковы, то того же можно достигнуть, ставя по бокамъ воздушные колодцы и соединяя ихъ щелями съ пространствомъ подъ струей. Въ нѣкоторый моментъ закроемъ эти щели и тѣмъ самымъ прекратимъ сообщеніе этого пространства съ атмосферой, замыкая въ немъ нѣкоторое количество воздуха. Понятно, что вода постепенно увлекаетъ съ собою часть этого воздуха, отчего подъ струей получается разрѣженіе. Увлеченіе воздуха будетъ происходить тѣмъ энергичнѣе, разрѣженіе будетъ тѣмъ больше, и, на-конецъ,  $n$  будетъ получать тѣмъ большее положительное значеніе, чѣмъ больше скорость на нижней поверхности струи, т.-е. чѣмъ больше напоръ  $h$  и чѣмъ меньше глубина канала передъ порогомъ. Если, при этомъ, порогъ водослива поднять достаточно высоко надъ уровнемъ воды



Фиг. 93.

увлекаетъ съ собою часть этого

воздуха, отчего подъ струей получается разрѣженіе. Увлеченіе воздуха будетъ происходить тѣмъ энергичнѣе, разрѣженіе будетъ тѣмъ больше, и, на-конецъ,  $n$  будетъ получать тѣмъ большее положительное значеніе, чѣмъ больше скорость на нижней поверхности струи, т.-е. чѣмъ больше напоръ  $h$  и чѣмъ меньше глубина канала передъ порогомъ. Если, при этомъ, порогъ водослива поднять достаточно высоко надъ уровнемъ воды



Фиг. 94.

въ отводящемъ каналѣ, т.-е. если водосливъ совершенный, то, благодаря разрѣженію, струя будетъ подсаживать подъ себя воду изъ отводящаго канала (фиг. 94). Если же водосливъ несовершенный т.-е. если уровень за порогомъ стоитъ выше него, то подъ порогомъ можно ждать уже избы-

точного надъ атмосферною давленія, и „ можетъ получить отрицательное значеніе, зависящее отъ глубины погруженія порога подъ уровеньъ въ отводящемъ каналѣ.

Въ одной замѣткѣ (см. Comptes rendus. 1889 г., томъ (IX, page 541) Boussinesq опредѣляетъ то предѣльное значеніе возвышенія порога надъ дномъ отводящаго канала для каждаго даннаго расхода, начиная съ котораго водосливъ становится несовершеннымъ; но это опредѣленіе сопряжено съ довольно большими трудностями, и, кромѣ того, тутъ уже нельзя безъ замѣтной ошибки пренебречь трениемъ жидкости. Поэтому, оставляя въ сторонѣ вопросъ о теоретическомъ опредѣленіи величины давленія подъ струею, скажемъ нѣсколько словъ о томъ, какъ происходитъ явленіе, основываясь на работахъ того же Bazin'a, помѣщенныхъ въ Annales des ponts et chaussées за 1891 г. (2-е полугодіе, стр. 445) и 1894 г. (1-е полугодіе, стр. 249).

Наблюдая истечение на водосливѣ въ тонкой стѣнкѣ, у котораго высота порога надъ дномъ канала была  $p = 0,75 \text{ mtr.}$  а профиль былъ какъ на фиг. 86, при послѣдовательномъ, притомъ, увеличеніи напора, онъ отмѣтилъ слѣдующее (доступа воздуха подъ струю нѣтъ):

1) *Малые напоры*, — не болѣе  $0,235 \text{ mtr.}$  Подъ струей удерживается нѣкоторое количество разрѣженнаго воздуха, влѣдствіе этого замѣчается нѣкоторое отжатіе струи къ стѣнкѣ водослива и подсасываніе воды изъ отводящаго канала (фиг. 94). По мѣрѣ увеличенія напора и отжатіе и подъемъ воды все увеличиваются; увеличивается также и коэффициентъ расхода. Если при свободной струѣ коэффициентъ расхода есть  $\mu$ , а въ этомъ случаѣ  $m$ , то при очень малыхъ напорахъ наблюдается

$$m = \mu.$$

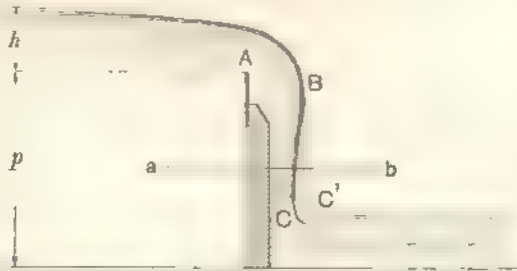
а при напорахъ около  $0,235 \text{ mtr.}$  получалось

$$m = 1,08 \mu.$$

Такую струю Bazin называетъ *отжатой* (nappe déprimée). Она прозрачна и ея поверхность совершенно гладкая.

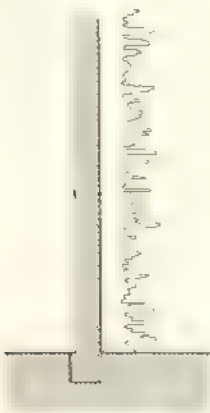
2) *Средніе напоры*, — отъ  $0,210$  до  $0,295 \text{ mtr.}$  Съ приближеніемъ напора къ  $0,235 \text{ mtr.}$  весь воздухъ изъ пространства *AB* быстро увлекается, и струя внезапно какъ бы притягивается къ стѣнкѣ; подошва *C* струи отходитъ назадъ, такъ что въ *B* (фиг. 95) можно провести къ струѣ вертикальную касательную, не задѣвающую струи. Поверхность струи не гладкая, а имѣетъ какъ бы рядъ складокъ, которыя имѣютъ профиль или *BC* или *BC'* (пунктиромъ). На фиг. 96 представлено горизонтальное сѣченіе переливающейся струи. Такую струю Bazin называетъ *прилипающею* (nappe adhérente). Какъ только прилипаніе произошло, то столь же внезапно измѣняется и коэффициентъ расхода изъ  $m = 1,08 \mu$  для предыдущаго случая въ  $m = 1,28 \mu$ . — онъ увеличивается, какъ видимъ, почти на  $20\%$ ; это увеличеніе расхода отра-

жается непосредственно на томъ, что уровень въ подводящемъ каналѣ внезапно опускается доведенный до высоты  $0,235 \text{ mtr}$ , напоръ  $h$  падаетъ



Фиг. 95.

до  $0,210 \text{ mtr}$  и удерживается на этой высотѣ, пока не измѣнимъ расхода. Если же черезъ каналъ начать пропускать больше воды, то напоръ  $h$  начинаетъ расти, но струя остается прилипшей, а отношеніе коэффициентовъ расхода  $\frac{m}{\mu}$  не измѣняется, со-



Фиг. 96.

храняя значеніе 1,28. Если ввести подъ струю порцію воздуха, то она быстро увлекается прочь, такъ что эта форма струи сейчасъ же восстанавливается. Такъ продолжается до тѣхъ поръ, пока напоръ  $h$  не достигнетъ величины  $0,295 \text{ mtr}$ .

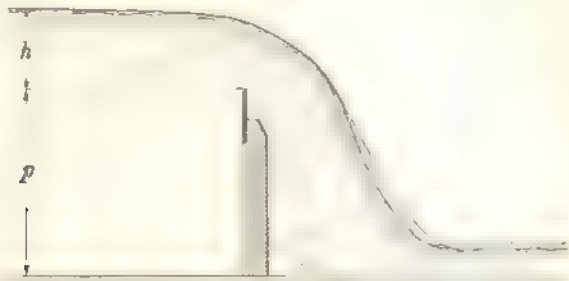
Нужно замѣтить, что прилипающая струя получалась у Вазин'а довольно устойчивой только потому, что толщина брусковъ, образующихъ стѣнку водослива, была значительна (фиг. 86); при меньшихъ толщинахъ,

для того, чтобы вызвать прилипание струи, необходимо очень осторожно увеличивать расходъ, безъ всякихъ толчковъ.—въ противномъ случаѣ отжатая струя переходитъ сразу въ слѣдующую.

3) *Большіе напоры* — свыше  $0,310 \text{ mtr}$ . Когда  $h$  достигнетъ величины  $0,295 \text{ mtr}$ , то происходитъ новая внезапная перемена явленія: струя удлиняется, а подъ нею оказывается заключенной вода (фиг. 97). Поверхность струи (внизу) попрежнему бороздчатая. И это превращеніе сопровождается внезапнымъ измѣненіемъ коэффициента расхода: онъ уменьшается до  $m = 1,19 \mu$  (вмѣсто  $1,28 \mu$ ), что вызываетъ внезапное повышение напора  $h$  отъ  $0,295 \text{ mtr}$  до  $0,310 \text{ mtr}$ . При дальнѣйшемъ возрастаніи напора коэффициентъ расхода уменьшается, достигая при  $h = 0,40 \text{ mtr}$  величины  $m = 1,12 \mu$ .

Такую струю Bazin называют *снизу затопленной* (*nappe noyée en dessous*). Это наиболее часто встречающаяся форма струи. Она очень устойчива.

При последовательном уменьшении расхода получаемъ тѣ же явленія чередующимися въ томъ же порядкѣ, съ тою разницею, что прилипающая струя, какъ болѣе устойчивая, при указанной толщинѣ стѣнки сохраняется и при очень малыхъ напорахъ, замѣняя отжатую. Кроме того, слѣдуетъ отмѣтить, что предѣльные напоры, указанные тутъ для перехода одной



Фиг. 97.

струи въ другую, не всегда строго соблюдаются: при напорахъ  $h = 1.0$  и  $1.3$  *мдт* можно получить или форму струи по фиг. 95 или по фиг. 97, безъ явной видимой причины: можетъ быть тутъ имѣеть значеніе какъ-нибудь случайное измѣненіе расхода, напр., подъ влияніемъ вѣтра



Фиг. 98

Кромѣ того, форма порога, выполненная въ видѣ тонкой стѣнки, образованной желѣзнымъ листомъ, пришитымъ къ деревяннымъ брускамъ (фиг. 89 или же такъ, какъ показано на фиг. 98, со склномъ задней грани подъ угломъ въ  $45^\circ$ , — затѣмъ толщина порога и т. д., — всѣ эти детали имѣють свое значеніе. Если, напр., форму порога фиг. 89 поставить задѣмъ наперетъ, то, вообще, не устанавливается никакого опредѣленнаго вида струи: она то прилипаетъ, то отрывается, переходя къ формѣ фиг. 94 или фиг. 95, смотря по напору; при этомъ уровень въ подводимомъ каналѣ непрерывно колеблется.

Наконецъ, когда порогъ стоитъ на разной высотѣ надъ дномъ въ отводящемъ каналѣ, то измѣняются и напоры, при которыхъ происходитъ перемѣна вида струи. При такой сложности явленія нельзя, конечно, получить точнаго совпаденія теоріи Boussinesq съ наблюденіями; тѣмъ не менѣе наблюденія Bazin'a даютъ коэффициенты расхода только на  $3-4^\circ$ , меньшіе нежели вычисленія по ур-ямъ (10) и (12).



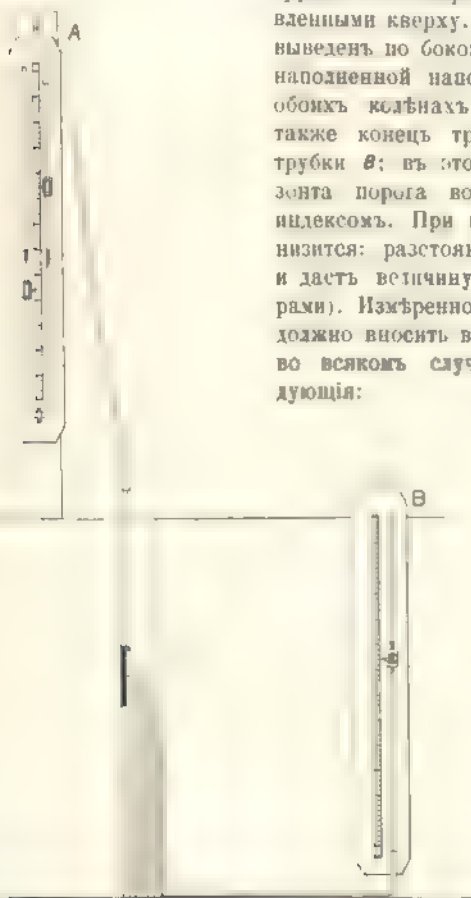
Исследования Bazin а приводят къ следующимъ результатамъ:

Будемъ предполагать, что вытекаетъ водосливъ въ тонкой стѣнкѣ.

В, 1) *Прилегающая струя* (фиг. 95). Коэф-тъ расхода въ этомъ случаѣ опредѣляется по коэф-ту  $\mu$  для свободной струи, взятому въ табл. 20\*, такимъ образомъ:

$$m = \mu \cdot 1,07 - \beta \frac{P_0}{h} \dots \dots \dots (20)$$

Туть  $h$  есть, попрежнему, напоръ,  $P_0$  есть разръженіе подъ струєю, выраженное столбомъ воды. Измѣрить это разръженіе можно помощью прибора, изображеннаго на фиг. 99: вдоль порога, на нѣсколько миллиметровъ ниже его, прокладывается свинцовая



трубка, съ отверстиями въ боковой поверхности, направленными вверх. Одинъ конецъ трубки закрыть, другой — вывести по боковой стѣнкѣ къ манометрической трубкѣ *A*, наполненной наполовину водою, разность горизонтовъ въ обоихъ колѣнахъ укажетъ, очевидно, искомое  $P_0$ . Можно также конецъ трубки соединить съ низомъ стеклянной трубки *B*: въ этой послѣдней вода наливается до горизонта порога водослива, и это положение отмѣчается индексомъ. При истеченіи уровень воды въ трубкѣ *B* понизится: разстояние отъ индекса до уровня въ трубкѣ и дастъ величину  $P_0$  (Вазаень пользовался обоими приборами). Измѣренное такъ давленіе  $P_0$ , какъ разръженіе, должно вносить въ ур-е (20) со знакомъ минусъ, отчего, во всякомъ случаѣ,  $m > \mu$ . Значенія коэф-та  $\beta$  слѣдующія:

При толщинѣ брусельъ  
100 *mm*    150 *mm*

Тонкая стѣнка (фиг. 86) . . .	0,122	0,133
Скошенная стѣнка (фиг. 95) . . .	0,104	0,123

Такия обстоятельства, какъ глубина передъ водосливомъ, отражаются на  $m$  только черезъ  $\mu$ ; отношеніе же  $\frac{m}{\mu}$  зависитъ только отъ отношенія  $\frac{P_0}{h}$ . Это послѣднее, какъ сказано, лучше получать путемъ прямого наблюденія.

Вмѣсто формулы (20) можно пользоваться таблицей 22 (см. стр. 175), дающей отношенія  $\frac{m}{\mu}$ , гдѣ  $m$  попрежнему есть коэф-тъ расхода въ аналогичныхъ условіяхъ, но при свободной струѣ (табл. 20 или ур-е 17).

Фиг. 99.

\*) Само собой разумѣется, что коэф-тъ расхода долженъ быть взятъ, принимая въ вниманіе глубину передъ водосливомъ, т.-е. въ табл. 20 нужно выбирать значенія  $M$ .

Таблица 22

значений отношения  $\frac{m}{\mu}$

Напоры въ метрахъ:	Высота водослива $p$ въ метр.							
	0,75		0,50		0,35		1,13	
	Толщина брусковъ въ мм.							
отъ до	100		100		100		150	
	Кромка							
	острая ф. 86	скошен *) ф. 95	острая ф. 86	скошен *) ф. 95	острая ф. 86	скошен *) ф. 95	острая ф. 86	скошен *) ф. 95
	1	2	3	4	5	6	7	8
0,050—0,075	1,191	1,039	1,215	1,089	1,210	1,097	1,202	1,104
0,075—0,100	1,207	1,092	1,210	1,126	1,218	1,156		
0,100—0,125	1,217	1,129	1,212	1,151	1,229	1,181	1,208	1,127
0,125—0,150	1,244	1,171	1,246	1,199	1,240	1,201		
0,150—0,175	1,254	1,220	1,256	1,214	1,245	1,224	1,224	1,163
0,175—0,200	1,277	1,248	1,260	1,247	—	1,226		
0,200—0,225	1,284	1,257	1,269	1,267	—	—	1,245	1,209
0,225—0,250	1,286	1,276	—	—	—	—		
0,250—0,275	1,283	1,297	—	—	—	—	1,255	1,249
0,275—0,300	1,281	1,296	—	—	—	—		
0,300—0,350	—	—	—	—	—	—	1,282	1,294
0,350—0,400	—	—	—	—	—	—	1,297	1,308
0,400—0,450	—	—	—	—	—	—	1,293	1,311

Какъ видно изъ этой таблицы, наибольший напоръ, при которомъ наблюдается прилипающая струя, зависитъ отъ глубины  $p$  канала, въ которомъ установленъ водосливъ. Имѣетъ влияние и толщина брусковъ, и форма кромки. Однако для острой кромки отношение  $\frac{m}{\mu}$  измѣняется во всякъхъ случаяхъ въ предѣлахъ отъ 1,2 до 1,3; для скошенной кромки это отношение измѣняется въ болѣе широкихъ предѣлахъ,—отъ 1,1 до 1,3. Во всякомъ случаѣ, прилипающая струя пропускаетъ значительно (отъ 10 до 30%) болѣе количество воды, нежели свободная.

\*) Подъ  $\angle 45^\circ$ .

В, 2) *Струя подтопленная снизу* Здесь нужно различать два случая. Первый указан на фиг. 97, а также на фиг. 100: течение в отводящем канале несколько не



Фиг. 100.

влиять на истечение в водослив; если в канале и имеется скачок\*), то не у самой подошвы водослива. Другой случай подтопленной струи будет, когда скачок появляется в непосредственной близости от струи (фиг. 101), но так, что горизонт воды



Фиг. 101.

в отводящем канале все-таки лежит еще ниже порога (высота  $h_1$  отрицательна) Остановимся сначала на первом случае.

В этом случае Базенъ даетъ ур-ня (значения буквъ  $m$  и  $\mu$  прежня). болѣе точно.

$$m = \mu \left[ 0,845 + 0,176 \frac{p}{h} - 0,016 \frac{p^2}{h^2} \right]; \dots \dots \dots (21)$$

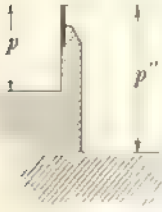
менѣе точно:

$$\mu = \mu \left[ 0,878 + 0,128 \frac{p}{h} \right] \dots \dots \dots (22)$$

Второе ур-е даетъ результатъ, отличающийся отъ перваго меньше, чѣмъ на 1%, пока отношение  $\frac{p}{h}$  лежитъ въ предѣлахъ отъ 0,6 до 2,4. Оба ур-я имѣютъ мѣсто только пока  $h > 0,4 p$ ; при меньшихъ напорахъ, сравнительно съ глубиною, наблюдается или отжатая, или прилипающая струя. Если  $h = 0,4 p$ , то по ур-ю (21) получается  $m = 1,19 \mu$ , и это наибольшее, что даетъ такая форма; всякое увеличеніе напора сверхъ этого уменьшаетъ отношение  $\frac{m}{\mu}$ ; напр., при  $h = 2 p$  (а это уже рѣдкій случай), ур-е даетъ  $m = 0,93 \mu$ .

\*) О томъ, что называется скачкомъ воды и когда онъ образуется, см. въ главѣ IV, — Движеніе воды въ открытыхъ каналахъ.

Нужно замѣтить, что если порог водослива стоит надъ дномъ приводящаго и отводящаго каналовъ на разной высотѣ (см. напр. фиг. 102), то въ ур-яхъ (21) и (22) нужно вмѣсто  $p$  поставить высоту  $p''$  надъ дномъ въ отводящемъ каналѣ, а значение  $\mu$ , определяемое по ур-ю (17) или табл. 20, брать соответственно глубинѣ  $p'$  въ верхней сторонѣ водослива. Форма профили водослива, лишь бы онъ былъ въ тонкой стѣнкѣ, не имѣетъ значенія.



Фиг. 102.

Наконецъ, во многихъ случаяхъ удовлетворительныи результаты (съ точностью не меньше, чѣмъ 3<sup>о</sup> „ и то при малыхъ  $p$ ) даетъ определене коэффициента расхода непосредственно изъ ур-я

$$m = 0,470 + 0,0075 \left( \frac{p}{h} \right)^2 \dots \dots \dots (23)$$

Отмѣтимъ также, что невозможно рѣшить заранее, какая форма струи установится во всякомъ данномъ частномъ случаѣ; поэтому ур-я (20—23) хороши для подсчета какихъ-нибудь извѣстныхъ данныхъ водосливовъ, когда видно, какова именно струя. При проектировании новыхъ водосливовъ нужно идти путемъ пробъ, начиная съ ур-ей (21—23), дающихъ меньшия значения для  $m$ , чѣмъ ур-е (20)\*.

В, 3) *Подтопленная струя съ покрывающимъ ее скачкомъ* (фиг. 101). Коэффициентъ расхода зависитъ отъ отношеній  $h$  и  $h_1$  къ  $p$ . Примѣнительно къ этому случаю Базель даетъ слѣдующія ур-я:

$$m = \mu \left[ 1,06 - 0,16 \frac{h_1}{p} + 0,05 \frac{p}{h} - 0,02 \frac{h_1}{p} + 0,05 \frac{p}{h}^2 \right] \dots \dots \dots (24)$$

или съ достаточной точностью:

$$m = \mu \left[ 1,05 - 0,15 \frac{h_1}{h} \right] \dots \dots \dots (25)$$

Въ оба ур-я количество  $h_1$ , какъ отрицательное нужно вносить со знакомъ минусъ, такъ что вообще  $m = \mu$ . Важно указать предѣлы приятности этихъ ур-ей. Необходимо должно быть соблюдено условіе, чтобы

$$h + h_1 < 0,75 p'';$$

тѣсь буква  $h_1$  даетъ только абсолютную величину разстоянія отъ порога до уровня въ отводящемъ каналѣ\*\*. Если полное разстояніе отъ верхняго до нижняго уровня больше указанного предѣла, то скачокъ отбѣсняется, и мы имѣемъ случай В, 2. Кроме того, если пре-

\* Базель даетъ также выраженія для  $m$  въ зависимости отъ давленія  $P_0$  подъ струей.

близко точно:  $m = \mu \left[ 1,01 - 0,245 \frac{P_0}{h} + \frac{1}{3} \frac{P_0}{h} \right].$

еще точнее:  $m = \mu \left[ 1,01 - 0,22 \frac{P_0}{h} \right].$

Онъ даетъ также:

$$\frac{P_0}{h} = 0,60 - 0,58 \frac{P_0}{h}.$$

\* овмѣненіе этихъ уравненій и даетъ приведенныя выше ур-я (21) и (22)

\*\*) Смыслъ буквы  $p''$  см. на фиг. 102



дыущее неравенство удовлетворено, т. е. если полная высота падения струи недостаточна для того, чтобы отбросить скачок, необходимо все-таки, чтобы часть  $h_1$  этого полного напора была достаточно мала, — именно, чтобы абсолютная величина  $h_1$  была меньше  $0,38 p''$ ; иначе струя все-таки будет падать в отводящий канал, который на струю не окажет влияния: получится струя отката или прилипающая, так как, очевидно, напор  $h$  при этом будет меньше  $0,4 p''$ . Само собою понятно, что эти ур-я предполагают также только незатопленный водослив, т. е. предполагают, что  $h_1 < 0$ .

В таблице 23 (и выше) совмещены результаты применения ур-й (21—25): из них известно, когда нужно прибегать к какой формуле: левый вертикальный столбец вычислен по ур-ю (21); часть, ограниченная жирной линией, вычислена по ур-ю (24).

С) Наконец, перейдем к рассмотрению затопленных водосливов, т. е. таких, в которых  $h_1$  положительно. Здесь также может оказаться два случая. Сначала наблюдается *подтопленная снизу* струя (фиг. 103),



Фиг. 103.

в общем напоминающая видъ фиг. 101. Но по мѣрѣ увеличения высоты  $h_1$ , или, что то же, по мѣрѣ уменьшения свободного напора  $h = h_1$ , эта форма внезапно обращается въ волнистую (фиг. 104). Этотъ переходъ совершается



Фиг. 104.

въ предѣлахъ между  $h = h_1$  отъ  $0,2 p''$  до  $0,3 p''$  \*) Вѣрный видъ совершенно различный: или скачекъ наблюдается мѣстное безпорядочное волнение, тогда какъ при волнистой струѣ (напре *ondulées*) поверхность покрыта широкими правильными волнами.

\*) Значками (\*) отмѣчаемъ, что важна тутъ высота порога надъ дномъ низового канала.

Таблица 24  
значений отношения  $\frac{m}{\rho}$

При $h$ $\rho''$	При $\frac{h}{\rho''}$																						
	0,05	+0,1	+0,2	+0,3	+0,4	+0,5	+0,6	0,7	+0,8	+0,9	+1,0	+1,1	+1,2	+1,3	+1,4	+1,5							
0,10	0,81	0																					
0,15	0,90	0,76																					
0,20	0,94	0,86	0																				
0,25	0,97	0,91	0,65																				
0,30	0,99	0,94	0,77	0																			
0,35	1,00	0,96	0,84	0,59																			
0,40	1,01	0,98	0,89	0,71	0																		
0,45	1,02	0,99	0,91	0,79	0,55																		
0,50	1,02	1,00	0,93	0,84	0,67	0																	
0,55	1,03	1,01	0,95	0,87	0,75	0,53																	
0,60	1,03	1,01	0,96	0,90	0,80	0,64	0																
0,65	1,03	1,02	0,98	0,92	0,84	0,72	0,51																
0,70	1,04	1,02	0,98	0,94	0,87	0,77	0,62	0															
0,75	1,04	1,03	0,99	0,95	0,89	0,81	0,70	0,49															
0,80		1,03	1,00	0,96	0,92	0,84	0,73	0,60	0														
0,85			1,01	0,97	0,93	0,87	0,79	0,68	0,47														
0,90				1,01	0,98	0,94	0,89	0,82	0,73	0,59	0												
0,95					0,99	0,96	0,91	0,85	0,77	0,66	0,46												
1,00						1,00	0,97	0,93	0,88	0,81	0,72	0,58	0										
1,05							0,98	0,94	0,90	0,84	0,76	0,65	0,46										
1,10								0,96	0,93	0,91	0,86	0,79	0,70	0,57	0								
1,15									0,96	0,93	0,88	0,82	0,75	0,64	0,45								
1,20										0,97	0,94	0,90	0,85	0,78	0,69	0,56	0						
1,25											0,95	0,91	0,87	0,81	0,74	0,63	0,44						
1,30												0,96	0,92	0,89	0,84	0,77	0,69	0,55	0				
1,35													0,94	0,90	0,86	0,80	0,73	0,62	0,44				
1,40														0,95	0,91	0,88	0,83	0,77	0,68	0,55	0		
1,45															0,92	0,89	0,85	0,80	0,72	0,62	0,43		
1,50																0,94	0,90	0,86	0,82	0,76	0,67	0,51	0

Оба эти случая передаются следующими двумя уравнениями Базена:

$$m = \mu \left\{ 1.06 + \frac{1}{4} \frac{h_1}{p} - \left[ 0.008 + \frac{1}{3} \frac{h_1}{p} + \frac{1}{3} \frac{h_1^2}{p^2} \right] \frac{p}{h_1} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

$$m = \mu \cdot 1.06 \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{h_1}{p} \right)^{\frac{h-h_1}{h_1}} \dots \dots \dots (27)$$

В обоих уравнениях  $h_1$  положительно. Первым нужно пользоваться, если

$$\frac{p''}{h} < 0.4 \left( 1 + 0.3 \frac{p'}{h_1} \right)^2.$$

Пользоваться вторым уравнением, если, наоборот:

$$\frac{p''}{h} > 0.4 \left( 1 + 0.3 \frac{p'}{h_1} \right)^2.$$

С помощью обоих этих уравнений подсчитана таблица 24, представляющая собой наиболее полную таблицу коэффициентов расходов для несовершенных, затопленных водосливов. (См. табл. на стр. 180).

Однако, вместо этих двух формул Базенъ считает возможным пользоваться одной общей:

$$m = \mu \cdot 1.05 \cdot \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{h_1}{p} \right)^{\frac{z}{h_1 - z}} \dots \dots \dots (28)$$

где под буквой  $z$  онъ обозначаетъ расстояние между обонми горизонтами, т.е.  $z = h - h_1$ . (Для числителя и знаменателя подъ радикаломъ на  $p$ , онъ, затѣ, представляетъ уравнение (28) въ формѣ:

$$\frac{m}{\mu} = 1.05 \cdot \left( 1 + \frac{1}{5} \frac{h_1}{p} \right)^{\frac{z}{h_1 - z}}$$

и затѣмъ приводить таблицу отношеній  $\frac{m}{\mu}$  для разныхъ  $\frac{z}{p}$  и  $\frac{h_1}{p}$ , а также представлять это уравнение графически въ видѣ серии кривыхъ, гдѣ абсциссы дають значения  $\frac{z}{p} = \frac{h-h_1}{p}$ , а ординаты дають значения  $\frac{m}{\mu}$  (фиг. 105). У каждой кривой написано соответствующее значеніе  $\frac{h_1}{p}$ . Наконецъ, нужно имѣть въ виду, что какъ въ случаѣ В, 3, такъ и здѣсь, коль скоро высота  $z = h - h_1$  превосходить 0.7  $p'$  то скачокъ отбѣивается отъ подошвы струи; отношеніе  $\frac{m}{\mu}$  нужно брать тогда по слѣдующей таблицѣ 25.

Таблица 25.

При $\frac{h_1}{p}$	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
$\frac{m}{\mu}$	1.06	1.05	1.04	1.03	1.02	1.00	0.99	0.98	0.97
При $\frac{h_1}{p}$	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
$\frac{m}{\mu}$	0.96	0.95	0.95	0.94	0.94	0.93	0.93	0.92	0.92



Самое определение расхода γίνεται по общему уравнению (1) въ § 16 значение  $\alpha$  выбирается въ зависимости отъ соотношения между  $h$  и  $p'$  по таблицѣ 20 или по уравне-

нию (17) и исправляется коэффициентомъ, взятымъ изъ таблицы 24. Что касается до хода изменения давления вдоль струи то отсылаемъ интересующихся къ упомянутымъ работамъ Вазена.

Для пояснения разберемъ слѣдующій примѣръ. Пусть на каналѣ шириную въ 2 *mtr* поставимъ вертикальный водосливъ въ тонкой стѣнкѣ, перегородивающій каналъ во всю его ширину, такъ что доступа воздуха подъ струю нѣтъ; пусть разстояние порога водослива до дна подводящаго канала  $p' = 0,8$  *mtr*, а напоръ надъ порогомъ  $h = 0,4$  *mtr*. По таблицѣ 20 коэффициентъ расхода при свободномъ истеченіи въ воздухъ былъ бы въ этомъ случаѣ  $\alpha = 0,44$ . Будемъ дѣлать разные предположенія относительно отводящаго канала.

а) Пусть отъ порога до дна этого канала разстояние  $p'' = 0,5$  *mtr*; пусть также уровень воды въ каналѣ стоитъ ниже порога на 0,3 *mtr*, такъ что  $h_1 = -0,3$  *mtr*. Такъ какъ величина  $0,4 p'' = 0,2$  *mtr*, что меньше напора, то беремъ ур-іе (21), которое дастъ:

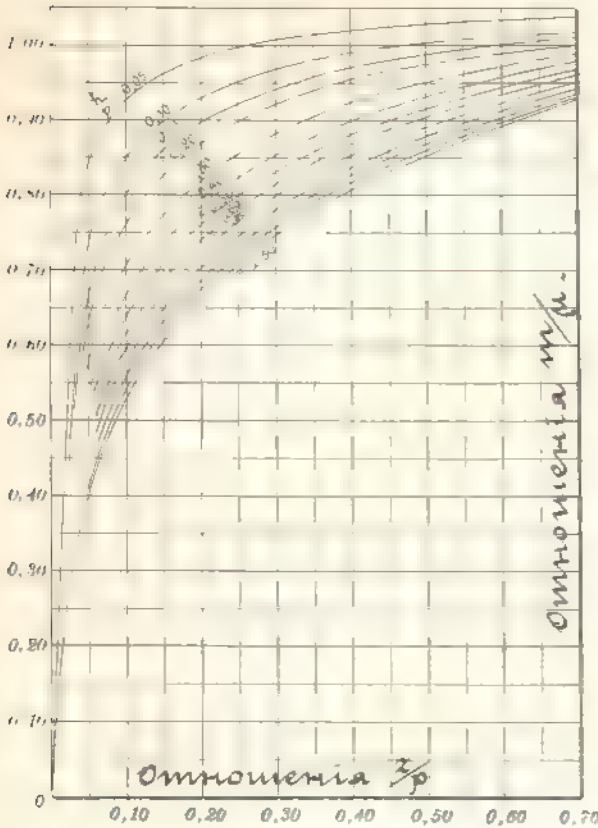
$$\alpha = 0,44 \left[ 0,845 \cdot 0,176 \frac{0,5}{0,4} - 0,016 \frac{0,5^2}{0,4^2} \right] = 0,44 \cdot 1,04 = 0,458.$$

Тотъ же множитель 1,04 мы находимъ въ первомъ вертикальномъ столбцѣ таблицы 23

б) Въ отличіе отъ предыдущаго случая допустимъ, что дно отводящаго канала лежитъ на 1,2 *mtr* ниже порога. Такъ какъ при этомъ находимъ, что  $h < 0,4 p''$  и, кромѣ того,  $h + h_1$  (0,7 *mtr*) меньше, чѣмъ  $0,75 p''$  (0,9 *mtr*), то необходимо пользоваться уравненіемъ (24) или правой частью таблицы 23.

$$\alpha = 0,44 \left[ 1,06 \cdot 0,16 \cdot 0,05 \frac{0,3 \cdot 1,2}{1,2 \cdot 0,4} - 0,02 \cdot 0,05 \frac{0,3^2 \cdot 1,2^2}{0,2 \cdot 0,4^2} \right] = 0,44 \cdot 1,15 = 0,506.$$

в) Допустимъ далѣе, что въ данныхъ перваго случая изменена высота  $h_1$ : уровень воды за порогомъ стоитъ на высотѣ 0,1 *mtr* надъ нимъ. Тогда имѣемъ  $p'' : h = 0,5 : 0,4 = 1,25$ .



Фиг. 103.

Съ другой стороны  $0,4 \sqrt{1 + 0,3 \frac{p''^2}{h_1}} = 2,5$ . Поэтому нужно пользоваться уравнением (26), которое даст:

$$m = 0,44 \left\{ 1,06 + \frac{0,1}{4 \cdot 0,5} \left[ 0,008 + \frac{0,1}{3 \cdot 0,5} \sqrt{1 + \frac{0,1^2}{0,4}} \right] \right\} = 0,44 \{ 1,11 - 1,25 \cdot 0,068 \} = 0,44.$$

То же самое видимъ по таблицѣ 24 соответственно величинамъ  $h_1 : p'' = 0,5$ , а также  $h_1 : p'' = 0,2$ .

д) Наконецъ, пусть при прежнихъ условияхъ  $h_1 = 0,25 \text{ mtr.}$  Тогда  $0,4 \sqrt{1 + 0,3 \frac{0,5^2}{0,25}} = 1,025$ . Эта величина меньше чѣмъ  $p'' : h = 1,25$ . Следовательно, по ур-ю (27) находимъ

$$m = 0,44 \cdot 1,025 \cdot 1 + \frac{0,25}{6 \cdot 0,5} \sqrt[3]{\frac{0,15}{0,4}} = 0,44 \cdot 0,844 = 0,372$$

Таблица 24, при  $h_1 : p'' = 0,5$  и при  $h_1 : p'' = 0,5$ , даетъ то же самое.

Во всѣхъ четырехъ случаяхъ расходъ долженъ быть определенъ по одному и тому же уравненію:

$$Q = m \cdot 2 \cdot 0,4 \sqrt{2g \cdot 0,4}.$$

Внося найденныя значения коэффициента расхода  $m$ , получимъ:

$$Q_a = 1,025 \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$$

$$Q_c = 0,985 \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$$

$$Q_b = 1,132 \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$$

$$Q_d = 0,835 \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$$

По старинной формулѣ DUBUAT можно определять расходъ въ несовершенномъ водосливѣ такъ:

$$Q = \mu_1 b (h - h_1) \sqrt{2g(h - h_1)} + \mu_2 b h_1 \sqrt{2g(h - h_1)}.$$

Изъ этой формулы слѣдуетъ, что расходъ разсматривается состоящимъ изъ двухъ частей, изъ чистаго расхода водослива при напорѣ ( $h = h_1$ ) и изъ расхода при вытекании воды уровень черезъ отверстие  $b \cdot h_1$  подъ напоромъ ( $h = h_1$ ). Редтенбахеръ давалъ для такого водослива  $\mu_1 = 0,57$ , а для отверстия въ тонкой стѣнкѣ  $\mu_2 = 0,62$ . Примѣняя это ур-іе къ нашему случаю *d*, найдемъ:

$$Q = 0,57 \cdot 2 \cdot 0,15 \sqrt{2g \cdot 0,15} + 0,62 \cdot 2 \cdot 0,5 \sqrt{2g \cdot 0,15} = 0,828 \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$$

что бли ко къ найденному выше. Для даннаго случая это уравненіе даетъ  $Q = 1,13 \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$ , что уже существенно отличается отъ определеннаго выше расхода ( $Q_c = 0,985 \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$ ).

В. Остается прослѣдить влияние формы порога, когда *несоволенная струя перекидывается черезъ водосливъ въ тонкой стѣнкѣ*. Остановимся сначала на формѣ порога, подобной фиг. 91 и 92.

1) Отжатая струя при порогахъ по фиг. 91 и 92 Коэффициенты расхода въ общемъ мало отличаются отъ того что даетъ уравненіе (19).

Струя, подтопленная снизу, получается въ томъ случаѣ, если имѣется налицо отстояние стѣны порога, подобное фиг. 92. Въ такомъ случаѣ умѣстно пользоваться уравне-

немъ (21), какъ для тонкой стѣнки, если струя еще не отстала, то, попрежнему, имѣть силу уравнение (19). Предѣльный случай, когда обѣ формулы даютъ одинаковый результатъ близкій къ истинному, есть тотъ, когда напоръ  $h$  достигаетъ величины:

$$h_0 = \frac{c}{2} \left( 1 + \sqrt{3 \frac{p''}{c}} \right) \dots \dots \dots (29)$$

Если  $h < h_0$ , то нужно брать уравнение (19); при этомъ полученное изъ уравнения значеніе коэф-та расхода слѣдуетъ увеличить процента на 2—4. Если  $h > h_0$ , то нужно брать уравнение (21). При этомъ, чѣмъ больше  $h$  по сравнению съ  $h_0$  тѣмъ больше разница между результатами вычисленій по ур-ю (21) и истиннымъ значеніемъ коэф-та расхода, который всегда больше вычисляемаго. Эта разница достигаетъ пѣрыхъ 8%, когда  $h = h_0 + 0.8 c$ . Съ дальнѣйшимъ увеличеніемъ  $h$  уравнение (21) даетъ результаты, все болѣе и болѣе точные.

Если, сверхъ того, скачокъ покрываетъ струю, то и здѣсь имѣютъ мѣсто уравнения или (19) (при малыхъ напорахъ) или (25) (при большихъ напорахъ); предѣльное значеніе напора есть

$$h'_0 = 0,95 c \left( 1 + \sqrt{1 - 0,9 \frac{h_1}{c}} \right).$$

При этомъ уравнение (19) даетъ больше, чѣмъ нужно, а уравненіе (25) наоборотъ, меньше, чѣмъ нужно, въ первомъ случаѣ разница достигаетъ 4%, а во второмъ—до 8%.

Наконецъ, если водосливъ несовершенный (затопленный) то съ такою же степенью приближенія слѣдуетъ пользоваться уравненіями (19) или (28), смотря по тому, отстаетъ струя отъ порога или нѣтъ. Усмотрѣть это какъ и въ предыдущемъ случаѣ, очень трудно. Въ упомянутой книгѣ Вазена на страницахъ 108—109 приведена таблица, въ которой указаны для 7 расходовъ (отъ 0 061  $m^3 sec$  до 0 480  $m^3 sec$ ) тѣ напоры  $h$ , которые оказались необходимыми, чтобы черезъ данный водосливъ пропустить данный расходъ при разныхъ значеніяхъ высоты  $h_1$  стояния воды въ отводящемъ каналѣ надъ порогомъ. Ограничиваемся этой ссылкой, такъ какъ рассматриваемый случай еще рѣже, чѣмъ предыдущее, нуждается въ точномъ подсчетѣ.

2) Наконецъ, Вазень изслѣдовалъ рядъ водосливовъ, въ которыхъ порогъ имѣлъ разнообразныя формы, передняя (обращенная къ приводящему каналу) и задняя (обращенная къ отводящему каналу) стѣнки были различно наклонены; онѣ перегибались или по прямой, образуя острую кромку (фиг. 106 и 107), или эта кромка была замѣнена горизонтальною площадкою большаго или меньшаго протяженія (фиг. 108), или, наконецъ, углы, образуемые этою гранью съ обѣими первыми плоскостями, были скруглены (фиг. 109); наконецъ, были опыты съ водосливами криволинейныхъ профилей. Изъ его наблюденій можно вывести слѣдующее:

Уклонъ передней стѣнки вляетъ на величину сжатія: чѣмъ ближе положеніе этой плоскости къ горизонту, тѣмъ меньше сжатіе и тѣмъ больше коэффициентъ расхода, но, начиная съ известной величины уклона, начинаетъ сильно казаться замедляющее вліяніе тренія о стѣнку и дальнѣйшее уменьшеніе наклона влечетъ уменьшеніе коэффициента расхода.

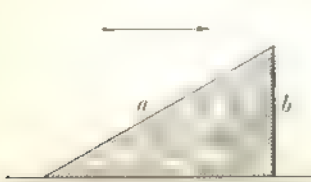
Уклонъ задней стѣнки существенно сказывается въ томъ, что, чѣмъ ближе эта стѣнка къ горизонту, тѣмъ меньше образование снизу подтопленной струи; чаще имѣется струя, отжатая книзу, соответственно чему коэффициентъ расхода уменьшается съ приближеніемъ уклона къ горизонту. Очевидно, тутъ сказывается также замедляющее вліяніе стѣнки.

Чѣмъ шире горизонтальная часть, тѣмъ меньше шансовъ для отстаиванія струи, она остается прилипающей и коэффициентъ расхода уменьшается съ увеличеніемъ толщины  $\delta$ .

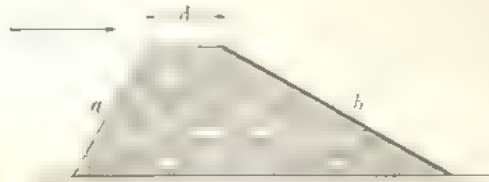
Увеличеніе радиусовъ закругленія также увеличиваетъ коэффициентъ расхода, но до известныхъ предѣловъ; дальнѣйшее его увеличеніе уменьшаетъ расходъ, увеличивая треніе.

Криволинейные профили дают вообще наибольшие расходы.

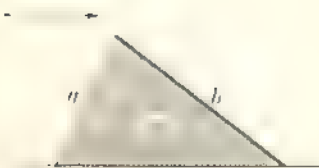
Обобщающих выводов из своих наблюдений Базенъ не сдѣлалъ, такъ какъ при многообразии отдѣльных факторовъ число его наблюдений, абсолютно очень большое,



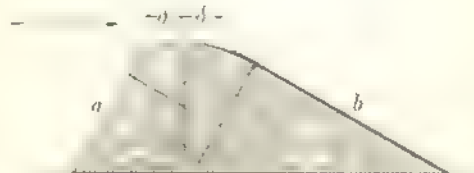
Фиг. 106.



Фиг. 108.



Фиг. 107.



Фиг. 109.

было все-таки недостаточно. Отсылая интересующихся къ оригинальной работѣ Базена *Annales des ponts et chaussées*, 1895, 2 trimestre, pp. 151—264), привожу въ качествѣ иллюстраціи небольшое извлеченіе изъ его наблюдений. Въ таблицѣ 26 (см. ниже) подѣ буквами *a* и *b* разумѣются отношенія вертикальной проекція грани къ горизонтальной. *a* всегда относится къ передней грани, *b*—къ задней; значенія буквъ  $\delta$ ,  $\delta_1$ , и  $\delta_2$  см. на фиг. 108 и 109; въ горизонтальных строкахъ видно влияние уклоновъ граней въ вертикальных столбцахъ—влияние длины порога  $\delta$  и радиусовъ закругленія. Для сравненія тутъ же приведены соответствующіе коэффициенты расходовъ для точкой стѣнки и для свободной струи. Во всѣхъ наблюденіяхъ высота порога надъ дномъ была  $p = 0,5 \text{ m}$  и въ некоторыхъ, отмѣченныхъ въ таблицѣ.

Кромѣ отмѣченныхъ выше обстоятельствъ изъ этой таблицы можно заключить что въ водосливахъ имѣющихъ размѣръ  $\delta > 0$ , а также уклонъ задней стѣнки положе нежели  $b = 1 \cdot 1$ , съ увеличеніемъ напора коэффициентъ расхода замѣтно приближается къ нѣкоторой постоянной, это видно изъ того, что съ увеличеніемъ напора коэффициенты расхода измѣняются все медленнѣе и медленнѣе. Во всѣхъ предыдущихъ случаяхъ этого нельзя было отмѣтить, такъ какъ возрастаніе съ напоромъ скорости подхода все время вліяетъ на увеличеніе коэффициента расхода. Очевидно что это исключеніе нужно объяснить трениемъ о наклонную заднюю стѣнку и о широкий порогъ водослива.

Въ разсматриваемыхъ случаяхъ сложныхъ профилей водосливовъ опять-таки при условіи, что уклонъ задней стѣнки меньше 1 : 1 водосливъ становится несовершеннымъ не тогда когда горизонтъ въ отвѣдномъ каналѣ стоитъ выше порога ( $h_1 > 0$ ) изъ наблюдений Базена слѣдуетъ, что такіе водосливы становятся несовершенными только тогда, когда  $h_1 > \frac{1}{2} b$ ; то этого предѣла, хотя бы подпоръ  $h_1$  и былъ но сколько отбѣсняется прочь, и истеченіе происходитъ, какъ если бы  $h_1$  было равно нулю или даже было отрицательно; подпоръ, не выходящій изъ указанныхъ предѣловъ, на истеченіе не вліяетъ.

Таблица 26  
значений коэффициента расхода  $\mu$ .

Напоръ $h$ въ $mtr.$	Свободная струя: тонкая стѣвка; $p = 0,5$ $mtr$	Толщина порога $\delta = 0$ . Глубина водослива $p' = p'' = 0,5 mtr.$					
		$a = 1:2$ $b = \infty$	$a = \infty$ $b = 3:1$	$a = 3:1$ $b = 1:2$	$a = 1:1$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:5$
0,10	0,439	0,502	0,431	0,460	0,478	0,484	0,456
0,15	0,448	0,520	0,444	0,465	0,476	0,483	0,454
Отжатая струя обращается въ затопленную: при $h = 0,16 mtr.$ при $h = 0,2 mtr.$							
0,20	0,440	0,524	0,500	0,476	0,488	0,492	0,458
0,25	0,445	0,524	0,494	0,475	0,495	0,502	0,462
0,30	0,450	0,520	0,485	0,485	0,506	0,511	0,468
0,35	0,455	0,520	0,472	0,487	0,512	0,515	0,472
0,40	0,459	0,516	0,472	0,490	0,516	0,520	0,475
Толщина порога $\delta = 100 mm.$ Глубина водослива $p' = p'' = 0,5 mtr.$							
		$a = 1:2$ $b = \infty$	$a = \infty$ $b = 3:1$	$a = \infty$ $b = 1:2$	$a = 1:1$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:5$
0,10	0,439	0,410	0,382	0,380	0,401	0,418	0,396
Отжатая струя переходитъ въ прилипающую при $h = 0,125 mtr.$							
0,15	0,438	0,440	0,445	0,410	0,431	0,442	0,416
Отжатая струя переходитъ въ затопленную при $h = 0,18 mtr.$							
0,20	0,440	0,470	0,477	0,439	0,455	0,480	0,423
Струя стано- вится затоп- ленной при $h = 0,25 mtr.$							
0,25	0,445	0,487	0,508	0,459	0,477	0,476	0,440
0,30	0,450	0,497	0,521	0,478	0,494	0,490	0,446
0,40	0,459	0,508	0,481	0,478	0,521	0,508	0,462
При $h = 0,35 mtr$ струя отстаеъ отъ порога, оставаясь за- топленной.							
						при $h =$ $0,35 mtr.$	

Продолженіе таблицы 26.

Значенія коэффициента расхода  $\mu$ .

Напоръ $h$ въ $mtr.$	Свободная струя; тонкая стѣнка; $p = 0,5$ $mtr.$	$\delta = 200$ $mm$ $p = 0,5$ $mtr.$ $a = 1:2$ $b = \infty$	Свободная струя тонкая стѣнка; $p = 0,75$ $mtr.$		$\delta = 200$ $mm$ , $p = 0,5$ $mtr.$		
			$a = 3:1$ $b = 1:2$ $\delta = 200$ $mm$	$a = 1:2$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:2$	$a = 1:2$ $b = 1:5$	
0,10	0,439	0,390	0,445	0,430	0,386	0,392	0,386
0,15	0,438	0,410	0,432	0,360	0,390	0,406	0,395
Отжатая струя обращается въ затопленную при $h = 0,18$ $mtr.$							
0,20	0,440	0,426	0,432	0,385	0,416	0,42	0,409
0,30	0,450	0,461	0,436	0,426	0,458	0,455	0,431
0,40	0,459	0,483	0,443	0,455	0,485	0,481	0,450

Свободная струя; тонкая стѣнка; $p = 0,75$ $mtr.$	$\delta = 400$ $mm$ , $p = 0,75$ $mtr.$		Фиг. 109. $p = 0,5$ $mtr.$		
	$a = 2:1$ $b = 1:2$	$a = 2:1$ $b = 1:4$	$a = 3:1$ $b = 1:5$	$a = 3:1$ $b = 1:5$	$a = 3:1$ $b = 1:5$
			Меньше радиусы $\delta_1 = 100$ $mm$	Больше радиусы $\delta_1 = \delta_2 = 200$ $mm$	Меньше радиусы $\delta_1 = 100$ $mm$
0,10	0,439	0,435	0,399	0,345	0,416
0,20	0,440	0,432	0,355	0,357	0,440
0,30	0,450	0,436	0,390	0,375	0,47
0,40	0,459	0,443	0,403	0,393	0,496
0,45	0,464	0,470	0,414	0,397	0,472

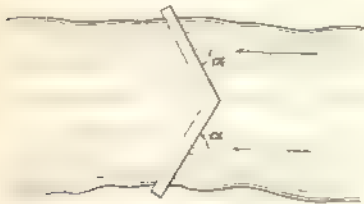
Е) Всѣ наблюденія Базена относятся къ водосливамъ въ 2  $mtr$  шириною безъ бокового сжатія. Для полноты приводимъ таблицу 27 значеній коэффициентовъ расхода  $\mu$  въ формулѣ  $Q = \mu b h \sqrt{2gh}$ , гдѣ  $b$  есть длина порога, а  $h$  — напоръ надъ порогомъ. Эта таблица можетъ замѣнить собою таблицу 20 и годна для тѣхъ же условий, а именно сжатіе совершенное, такъ что скорость передъ водосливомъ ничтожна, водосливъ сдѣланъ въ вертикальной тонкой стѣнкѣ: доступъ воздуха подъ струю обезпеченъ вполнѣ; сжатіе струи снизу полное. Таблица предусматриваетъ также вліяніе на  $\mu$  бокового сжатія и напора (измѣреннаго достаточно далеко отъ порога). Полное боковое сжатіе имѣетъ мѣсто, если боковыя стѣнки канала подходят къ вертикальнымъ кромкамъ водослива не ближе какъ на  $2h$ , и во всякомъ случаѣ не менѣе, чѣмъ на  $300$   $mm$ ; въ противномъ случаѣ является уже не совѣмъ полное сжатіе съ этой стороны, и коэффициентъ расхода слѣдуетъ опѣнивать, какъ среднее между полнымъ и неполнымъ сжатіемъ; ближайшая къ порогу точка дна подводящаго канала должна отстоять отъ кромки порога по крайней мѣрѣ на  $3/4$   $h$  не менѣе, чѣмъ на  $300$   $mm$ .



Эта таблица (пересчитанная нами такъ, чтобы пользоваться выше-приведенной простой, обычной формулой расхода) составлена Н. Smith'омъ на основаніи опытовъ Lesbros, Fteley, Stearns'a, Francis'a, своихъ собствен-ныхъ и другихъ.

Въ своей второй части (сжатіе только снизу) она довольно значи-тельно отклоняется отъ данныхъ Базена, такъ что ее можно рекомендо-вать только въ первой ее половинѣ, притомъ непременно съ соблюденіемъ выше отмѣченныхъ ограниченій. Замѣчательно, что значенія  $\mu$ , которыя Н. Smith даетъ для очень широкаго водослива ( $b = \infty$ ), весьма близко со-впадаютъ съ тѣмъ, что даетъ Базенъ для своего водослива въ 2 *mil* ширины, но освобожденнаго отъ всякаго вліянія скорости подхода.

Въ заключение этого параграфа отмѣтимъ еще слѣдующее обстоятельство. Водосливныя отверстія имѣютъ очень большое примѣненіе въ плотинахъ. Перегораживая рѣку плотиной, въ ней оставляютъ отверстіе, достаточное для пропуска не только обычнаго расхода рѣки, но также и того количества воды, которое идетъ въ рѣкѣ во время паводковъ и половодій. Это послѣд-нее количество можетъ быть опредѣлено только съ большей или меньшей вѣроятностью. Поэтому плотину всегда снабжаютъ запаснымъ водоспу-скомъ, который и устраивается обыкновенно въ видѣ водослива, пороги



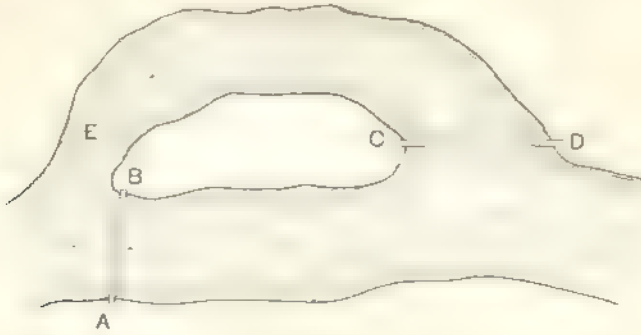
Фиг. 110.

котораго закладывается выше обычнаго уровня, но такъ, чтобы въ случаѣ па-водка черезъ него переливалось все то количество воды, которое не успѣваетъ пройти черезъ главный водоспускъ; та-кимъ образомъ уничтожается опасность чрезчуръ высокаго подъема воды передъ плотиной. Нерѣдко и главный водоспускъ имѣетъ форму водослива. Понятно, что если

остановиться на опредѣленномъ положеніи порога и въ то же время поста-вить требованіе, чтобы вода не поднималась выше опредѣленнаго предѣла,— другими словами, если поставлены предѣлы для напора, подъ которымъ происходитъ истеченіе черезъ водосливъ,—то для того, чтобы увеличить его водопрпускную способность, остается только одно, — увеличить его длину: это приводитъ къ тому, что нерѣдко длина водослива должна быть больше, чѣмъ вся ширина рѣки. Въ такомъ случаѣ водосливъ ставятъ не перпенди-кулярно къ руслу рѣки, а по какой-нибудь, — иногда ломаной, иногда просто наклонной, иногда даже кривой, — линіи. Такъ въ городахъ, гдѣ предѣлы колебанія уровня передъ плотиной стараются держать въ особенно узкихъ рамкахъ, нерѣдко можно встрѣтить плотину, перегораживающую рѣку на-закосъ или по ломаной линіи (фиг. 110). Когда имѣется запасный водо-водный каналъ, то такой запасный водосливъ ставятъ даже параллельно теченію рѣки (фиг. 111): *AB* есть здѣсь главная плотина, *CD* запасной водосливъ, отдающій избытокъ воды въ водоотводный каналъ *DE*. Если бы эта передъ плотиной была въ покое, то такое расположеніе водослива ни-чѣмъ не отличалось бы отъ обычнаго положенія, — перпендикулярно къ



руслу рѣкѣ. Но такъ какъ передъ плотинной скоростью всегда есть и притомъ она имѣетъ общее направление русла, то понятно, что чѣмъ больше уголъ между направлениемъ водослива и направлениемъ русла отличается отъ прямого, тѣмъ больше будетъ стѣвено истечение, такъ какъ, подмывая къ водо-



Фиг. 111.

сливу, вода должна еще измѣнить свое направление. Въ виду этого рекомендуется при подсчетѣ расхода черезъ такой водосливъ вводить еще поправочный коэффициентъ, который можно брать изъ слѣдующей таблицы, въ зависимости отъ угла  $\alpha$  (фиг. 110):

$\alpha$		0°	15°	30°	45°	60°	90°
Поправ. коэф-тъ.		0,80	0,86	0,91	0,94	0,96	1,00

### § 18. Истечение изъ сосудовъ, находящихся въ движеніи.

Здѣсь мы ограничимся исключительно тѣмъ случаемъ, когда, во-первыхъ, свободная поверхность поддерживается въ неизмѣнномъ относительно сосуда положеніи, и, во-вторыхъ, сѣченіе сосуда  $A$  по сравнению въ площадь отверстия  $a$  такъ велико, что можно предположить, что внутри сосуда жидкость относительнаго перемѣщенія не имѣетъ. Тогда, какъ мы видѣли, пренебрегая сопротивленіями, можно писать, что

$$v = \sqrt{2gh},$$

или, если  $p_0$  есть атмосферное давленіе на свободной поверхности, а  $p$ —давленіе въ отверстіи со стороны окружающей среды, то изъ соответственно написаннаго ур-ія Д. Бернулли получаемъ:

$$\rho \left[ \frac{1}{2} v^2 + \left( h - \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} \right) \right] = \dots \dots \dots (F)$$

Легко видѣть, что напоръ, подъ которымъ при этихъ условіяхъ происходитъ истечение  $\left( \frac{\alpha}{A} \text{ очень мало} \right)$ , есть разность высотъ гидростатиче-

силы давлений въ центрѣ тяжести отверстія  $\left( h \cdot \frac{\rho_0}{\gamma} \right)$  и на свободной поверхности  $\left( \frac{\rho_0}{\gamma} \right)^*$ , уменьшенная на разность давлений на свободной поверхности и передъ отверстиемъ. Изъ гидростатики извѣстно, что разность гидростатическихъ давлений, вообще, равна плотности жидкости, умноженной на разность значений силовой функции:

$$dp = \rho dU$$

или, въ конечной формѣ:

$$\Delta p = \rho (U_1 - U_0).$$

Поэтому ур-іе (F) можно переписать такъ:

$$c = \sqrt{2g \left[ \frac{\rho}{\gamma} (U_1 - U_0) - \left( \frac{p}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} \right) \right]} \dots (1)$$

Очевидно, что, если давленія вокругъ всего сосуда одинаковы, что мы и будемъ предполагать, то послѣдній членъ просто исчезаетъ, и ур-іе (1) переписывается такъ:

$$c = \sqrt{2g \frac{\rho}{\gamma} (U_1 - U_0)} \dots (1')$$

Разсмотримъ слѣдующіе два случая:

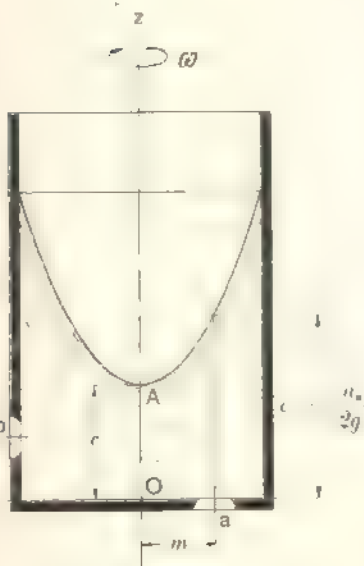
1) Сосудъ вращается съ постоянной угловой скоростью  $\omega$  около вертикальной оси (фиг. 112). Припомнимъ, что поверхности уровня въ этомъ случаѣ суть параболонды вращения, а силовая функция  $U$  выражается такъ:

$$U = \int (X dx - Y dy - Z dz) = \int (\omega^2 x dx - \omega^2 y dy - g dz) = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz + C.$$

\*) Если бы  $\frac{h}{A}$  не было мало, то, прибавляя къ этой разности еще высоту, соответ-

ствующую скорости  $c$  в сѣдѣ отверстія  $\frac{c^2}{2g}$ , мы перешли бы къ гидродинамическому

выс.



Фиг. 112.

Пусть отверстие сдѣлано на двѣ сосуда, въ  $a$ , при чемъ координаты его центра тяжести таковы:

$$x = m, y = n, z = 0.$$

Значеніе силовой функціи для поверхности уровня, проходящей через эту точку, будетъ, слѣдовательно, таково:

$$V_1 = \frac{\omega^2}{2} (m^2 + n^2) + C = \frac{\omega^2}{2} c + C = \frac{u_a^2}{2} + C.$$

гдѣ  $u_a$  есть линейная скорость вращенія точки  $a$ . Для какой-нибудь точки свободной поверхности, на примѣръ, для вершины  $A$  параболоида ( $x = 0, y = 0, z = c$ )\*, — имѣемъ значеніе силовой функціи:

$$V_a = C + qc.$$

Поэтому скорость вытекания  $w_a$  (относительная, а не абсолютная), по ур (1') выразится такъ:

$$w_a = \sqrt{2g \frac{\rho}{\gamma} \left( \frac{u_a^2}{2} + gc \right)} = \sqrt{2g \left( c + \frac{u_a^2}{2g} \right)}.$$

Легко убѣдиться, что  $\left( c + \frac{u_a^2}{2g} \right)$  есть  $z_a$ , — вертикальное разстояніе центра тяжести  $a$  отверстія до свободной поверхности.

Если бы отверстие было сдѣлано въ боковой стѣнкѣ, — гдѣ-нибудь въ  $b$ , на высотѣ  $h_1$  надъ дномъ, то точно такимъ же путемъ мы получили бы, что

$$w = \sqrt{2g \left( c - h_1 + \frac{u_b^2}{2g} \right)} = \sqrt{2gh_2}.$$

при чемъ геометрическое значеніе буквы  $h_2$  указано на фиг. 112.

2) Сосудъ движется прямолинейно и поступательно по какому-нибудь направленію  $tt$ , образуя уголъ  $\alpha$  съ горизонтальною осью  $Ox$  (фиг. 113). Осуществляется это, на примѣръ, при помощи башмака  $M$ , скользящаго по наклонной плоскости  $tt$  (допустимъ, безъ тренія), и нити, перекинутой черезъ блокъ  $N$  (тоже работающій безъ тренія) и несущей грузъ  $G_2$ . Всѣхъ сосуда съ водой назовемъ черезъ  $G_1$ . Пусть приняты мѣры къ тому, чтобы этотъ всѣхъ  $G_1$ , постоянно уменьшающійся вслѣдствіе вытекания воды, не измѣнялся, путемъ пополненія надлежащаго количества воды. При этихъ условіяхъ движущаяся масса выразится черезъ  $G_1 + G_2$ ; движущей же

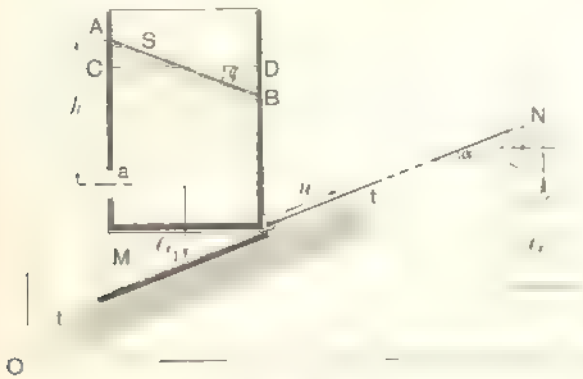
\*) Объ опредѣленіи положенія вершины параболоида свободной поверхности см. въ Гидростатикѣ § 3.

силой является  $G_2 - G_1 \sin \alpha$ ; движение происходит по стрѣлкѣ; при обратномъ направленіи движения движущая сила выразится черезъ  $G_1 \sin \alpha - G_2$ . Поэтому ускореніе силы инерціи въ движеніи влеченія выражается черезъ

$$-\frac{du}{dt} = -g \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2}$$

и направлено по линіи  $tt$  въ сторону, обратную скорости  $u$ , если движеніе ускоренное, т.е. если  $G_2 > G_1 \sin \alpha$ .

Составимъ для этого случая уравненіе поверхностей уровня. Такъ какъ всѣ дѣйствующія силы въ этомъ случаѣ параллельны плоскости  $xz$ , то вмѣсто всего сосуда можно разсматривать только его сѣченіе плоскостью  $xz$ , а потому дифференціальное уравненіе кривой сѣченій поверхностей уровня плоскостью  $xz$  будетъ имѣть видъ:



Фиг. 113.

$$dU = X dx + Z dz = 0.$$

Въ нашемъ случаѣ очевидно:

$$X = -\frac{du}{dt} \cos \alpha = -g \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \cos \alpha,$$

$$Z = -g - g \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \sin \alpha = -g \left( 1 + \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \sin \alpha \right).$$

Внося эти значенія въ ур-іе поверхностей уровня и интегрируя, получаемъ выраженіе силовой функции въ такомъ видѣ:

$$U = -g \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \cos \alpha \cdot x - g \left( 1 + \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \sin \alpha \right) z + C. \quad (2)$$

Привравнивая его любой постоянной величинѣ, благодаря чему изъ выраженія (2) получаемъ ур-іе поверхностей уровня, видимъ, что это есть уравненіе прямой, образующей съ горизонтомъ уголъ  $\varphi$ ,  $tg$  котораго есть:

$$tg \varphi = \frac{(G_2 - G_1 \sin \alpha) \cos \alpha}{(G_1 + G_2) + (G_2 - G_1 \sin \alpha) \sin \alpha} \dots \dots \dots (3)$$

Разъ искомая кривая есть прямая линия, то поверхности уровня будутъ плоскости.

Очевидно, что линия *AB* свободной поверхности пересѣкаетъ линію *CD* (свободную поверхность при покоѣ) на оси симметріи сосуда, если онъ только такую имѣеть.

Значеніе силовой функціи для какой-нибудь точки *S* на свободной поверхности, съ координатами  $x = m$ ,  $z = n$ , по уравненію (2) таково:

$$U_0 = -g \left\{ \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \cos \alpha \cdot m + n + \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \sin \alpha \cdot n \right\} + C$$

Пусть координаты центра тяжести отверстія *a* суть  $x = m'$ ,  $z = n'$ . Тогда значеніе силовой функціи для поверхности уровня, проходящей через эту точку, есть:

$$U_1 = -g \left\{ \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \cos \alpha \cdot m' + n' + \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \sin \alpha \cdot n' \right\} + C.$$

Поэтому по уравненію (1') относительная скорость истечения есть:

$$w = \sqrt{2g \frac{\rho}{\gamma} \left\{ \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} (m - m') \cos \alpha + (n - n') + \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} (n - n') \sin \alpha \right\} g \cdot (G)}$$

Замѣтимъ, что  $\frac{\rho}{\gamma} = \frac{1}{g}$ . Далѣе, если точку *S* возьмемъ на одной вертикали съ центромъ тяжести отверстія, то будемъ имѣть  $m = m'$ ; величина же  $(n - n')$ , которую мы обозначимъ черезъ *h*, представить собою въ такомъ случаѣ вертикальное разстояніе отъ центра тяжести до свободной поверхности. И въ такомъ случаѣ уравненіе (4) переписалось бы такъ:

$$w = \sqrt{2gh \left( 1 + \frac{G_2 - G_1 \sin \alpha}{G_1 + G_2} \cdot \sin \alpha \right)} \dots \dots \dots (4)$$

Въ частности пусть  $\alpha = 90^\circ$ , т.-е. пусть сосудъ движется по вертикали. Легко видѣть, что тогда  $\varphi = 0$  (уравненіе 3), т.-е. поверхности уровня суть горизонтальныя плоскости; слѣдовательно, здѣсь безразлично, по какой вертикали измѣрять высоту *h*. Скорость истечения въ этомъ случаѣ будетъ такова:

$$w = \sqrt{2gh \left( 1 - \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2} \right)} = \sqrt{2gh \frac{2G_2}{G_1 + G_2}} \dots \dots \dots (5)$$

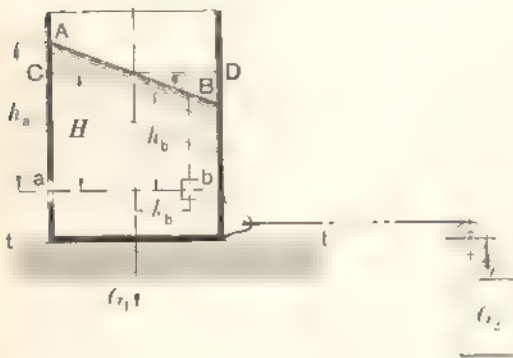
Если бы движение было обратное, т. е. книзу, то ускорение  $\frac{du}{dt}$  имѣло бы другой знакъ, и мы получили бы:

$$w = \sqrt{\frac{2gh}{i_1 - i_2} \frac{G_1}{G_2}} \dots \dots \dots (6)$$

Равнымъ образомъ, если бы движение было не ускореннымъ, какъ мы считали до сихъ поръ, а замедленнымъ, то пришлось бы это отмѣнить новой переменнѣй знака производной  $\frac{du}{dt}$ , и уравненіе (5) давало бы скорость истеченія при замедленномъ паденіи сосуда, а уравненіе (6)—при замедленномъ подъемѣ его.

Если движение происходитъ въ горизонтальной плоскости (фиг. 114), то  $\alpha = 0$ , и для отверстія *a* уравненіе (4) даетъ:

$$w_a = \sqrt{2gh_a}$$



Фиг. 114.

Для отверстія *b*, хотя бы оно лежало на одной горизонтали съ отверстіемъ *a*, скорость будетъ другая:

$$w_b = \sqrt{2gh_b}$$

По уравненію (3) видно, что плоскости уровня образуютъ съ горизонтомъ уголъ  $\varphi$ ,  $tg$  котораго будетъ:

$$tg\varphi = \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Если въ покоящемся сосудѣ вода была налита до высоты *H* надъ обоими отверстіями *a* и *b* и если разстояніе ихъ отъ оси сосуда, считая по направленію перемѣщенія, есть *l*, то очевидно, что

$$h_b = H - l_b tg\varphi = H - l_b \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

точно также

$$h_a = H + l_a \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

или, вообще,

$$h = H - l \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Если бы не было движения сосуда, то изъ обоихъ отверстій жидкость выливалась бы съ одинаковой скоростью  $v$ , соответствующей напору  $H$ ; при движеніи же сосуда скорости истечения будутъ больше или меньше  $v$ , смотря по тому, въ какую сторону отъ ося отнесено отверстие.

Замѣтимъ, что мы опредѣляли только относительную скорость вытекания. Абсолютную скорость получимъ, сложивъ найденную относительную скорость со скоростью влеченія по правилу параллелограмма. Что касается до величины расхода, то, понятно,

$$Q = \mu a v,$$

гдѣ  $a$  есть площадь отверстія.

Наконецъ, отмѣтимъ, что въ случаѣ поступательнаго движенія, разъ оно равномерное, имѣемъ

$$\frac{du}{dt} = 0,$$

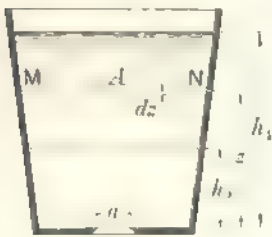
а слѣдовательно, и истечение изъ движущагося такъ сосуда прѣсходитъ совершенно такъ же, какъ если бы движенія сосуда не было.

### § 19. Истечение при перемѣнномъ уровнѣ.

Этотъ случай, довольно обыкновенный въ практикѣ, есть случай движенія неустановившагося; поэтому уравненіе Бернулли здѣсь безъ особыхъ ограниченій непримѣнимо.

Задача изслѣдованія такого случая заключается въ слѣдующемъ.

Въ сосудѣ съ отверстіемъ площадью  $a$  (фиг. 115) имѣется вода, при чемъ, вообще, въ сосудѣ въ единицу времени притекаетъ нѣкоторое постоянное количество  $q \text{ mtr}^3$ . Въ какой-нибудь данный моментъ горизонтъ воды стоитъ на высотѣ  $h_1$  надъ отверстіемъ. Требуется узнать, сколько вытечетъ изъ сосуда воды за время  $t$ , или, наоборотъ, на какой промежутокъ времени горизонтъ займетъ новое положеніе на высотѣ  $h_2$  надъ отверстіемъ. Пусть за данный промежутокъ времени  $dt$  черезъ отверстие вытекаетъ количество воды  $dQ \text{ mtr}^3$ . За то же время притокъ равенъ  $q dt \text{ mtr}^3$ . Можетъ оказаться, что  $dQ = q dt$ ; тогда свободная поверхность своего положенія измѣнять не будетъ. Можетъ, затѣмъ, оказаться, что  $dQ > q dt$ ; тогда свободная поверхность понижается, но вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно уменьшается и расходъ,



Фиг. 115.

до тѣхъ поръ, пока расходъ и притокъ не сравняются: съ этого момента установится истечение подъ постояннымъ напоромъ. Наконецъ, можетъ оказаться, что  $dQ < q dt$ . Тогда свободная поверхность повышается, а вмѣстѣ съ тѣмъ постепенно растетъ и  $dQ$ , при томъ опять до совпаденія притока съ расходомъ, когда движеніе станетъ установившимся. Но можетъ ли дѣйствительно наступить такой моментъ, это мы сейчасъ увидимъ.

Если въ теченіе короткаго промежутка времени горизонтъ въ сосудѣ измѣняетъ свое положеніе на конечную величину, то за бесконечно малый промежутокъ времени  $dt$ , въ началѣ котораго онъ стоялъ на высотѣ  $z$ , онъ измѣняется на бесконечно малую величину, исчезающую передъ конечной величиной  $z$ . Поэтому для всякаго даннаго момента можно считать  $z$  постояннымъ и за бесконечно малое время  $dt$  можно считать движеніе установившимся. Примѣняя къ этому промежутку уравненіе Д. Бернуллі, получимъ, что за время  $dt$  изъ отверстія выльется объемъ жидкости

$$dQ = \mu a \sqrt{2gz} dt.$$

Понятно, что расходъ изъ сосуда за нѣкоторый промежутокъ времени равенъ притоку плюсъ убыль, или равенъ притоку безъ увеличенія объема жидкости въ сосудѣ,—конечно, за тотъ же промежутокъ времени. Соотношеніе это въ обоихъ случаяхъ передается уравненіемъ:

$$dt \cdot \mu a \sqrt{2gz} = q dt - A dz . . . . . (1)$$

Здѣсь  $q dt$  есть притокъ за время  $dt$ , а  $A dz$  есть площадь сосуда, занимаемая въ данный моментъ свободной поверхностью  $mn$ .

Въ случаѣ  $q < \mu a \sqrt{2gz}$  нужно считать  $dz$  отрицательнымъ (на чертежѣ его нужно откладывать внизъ, тогда какъ самое  $z$  считается отъ отверстія вверхъ); въ случаѣ  $q > \mu a \sqrt{2gz}$  все произведеніе  $A dz$  (положительное), по смыслу сказаннаго, должно быть вычтено изъ  $q dt$ . Въ обоихъ случаяхъ изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$dt = \frac{-A dz}{\mu a \sqrt{2gz} - q} . . . . . (2)$$

Разберемъ теперь нѣсколько частныхъ случаевъ.

1) Пусть сосудъ призматическій, т.е.  $A = const$ , и пусть притокъ тоже постояненъ:  $q = const$ . Пусть требуется найти время  $t$  пониженія уровня отъ высоты  $h_1$  до  $h_2$ . Тогда имѣемъ по ур-ню (2):

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{A dz}{\mu a \sqrt{2gz} - q} = \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h_2} \frac{dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} . . . . . (3)$$

гдѣ для краткости письма положено

$$\sqrt{k} = \frac{q}{\mu a \sqrt{2g}}.$$

Легко видѣть, что величина  $k$  представляетъ собою тотъ постоянный напоръ, подъ которымъ черезъ отверстіе площадью  $a$  выльется въ единицу времени расходъ, равный притоку  $q$ . Другими словами,  $k$  есть



высота того наинизшаго горизонта, къ которому асимптотически стремится уровень въ сосудѣ, если  $q dt < dQ$ , и, наоборотъ, наивысшаго, если  $q dt > dQ$ . Что это дѣйствительно такъ, мы сейчасъ убѣдимся изъ разсмотрѣнія ур-нй. Для краткости письма назовемъ въ ур-нй (3) коэффициентъ передъ знакомъ интеграла буквою  $B$ , такъ что:

$$t = B \int_{h_2}^{h_1} \frac{dz}{\sqrt{z} - \sqrt{k}} \dots \dots \dots (3')$$

Производимъ замѣну переменныхъ, полагая

$$z - k = y;$$

тогда

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = dy,$$

откуда

$$dz = 2 dy (y + k).$$

Внося это значение  $dz$  въ уравнение (3'), имѣемъ, соответственно мѣняя предѣлы интеграціи:

$$t = B \int_{y_2}^{y_1} \frac{2 dy (y + \sqrt{k})}{y} = 2B \int_{y_2}^{y_1} \left( 1 + \frac{\sqrt{k}}{y} \right) dy =$$

$$= 2B \left[ (y_1 - y_2) + \sqrt{k} L_n \frac{y_1 + \sqrt{k}}{y_2 + \sqrt{k}} \right] \dots \dots \dots (4)$$

Чтобы пользоваться этимъ уравненіемъ, нужно прежде всего сравнить заданныя величины  $h_1$  и  $h_2$  съ высотой  $k$ . Необходимо, чтобы или объ высоты  $h_1$  и  $h_2$  были больше  $k$  (притокъ меньше расхода, горизонтъ понижается), или же чтобы объ были меньше  $k$  (горизонтъ повышается). Если же величина  $k$  заключается между величинами  $h_1$  и  $h_2$ , то въ уравненіи (4) придется брать натуральный логарифмъ отрицательнаго числа, — величину несуществующую. Невозможность рѣшенія коренится въ этомъ случаѣ не въ неправильности уравненія, а въ несообразности данныхъ задачи, ибо понятно, что если мы вливаемъ все время въ сосудъ постоянное количество  $q$ , меньшее, нежели въ данный моментъ изъ него выливается, то, конечно, никогда не настанетъ момента, когда изъ сосуда будетъ выливаться меньше, чѣмъ вливается; чтобы получить такое соотношеніе, мы должны перейти черезъ моментъ равенства притока съ расходомъ, т.-е. черезъ положеніе горизонта въ сосудѣ, когда  $h_2 = k$  (ибо тогда  $dQ = q dt$ ). Если же въ уравненіи (4) внести это послѣднее значеніе  $h_2$ , то получимъ  $t = \infty$ , что и подтверждаетъ сказанное.

Полагаемъ далѣе, что притока нѣтъ, т.-е. что  $q = 0$ ; тогда  $k = 0$ , и мы получаемъ, что время пониженія уровня съ высоты  $h_1$  на уровень  $h_2$ , безъ притока извнѣ, есть:

$$t = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \dots \dots \dots (5)$$

Очевидно, это имѣетъ смыслъ только для пониженія уровня. За этотъ промежутокъ времени выливается объемъ воды  $A(h_1 - h_2)$ . При постоянномъ напорѣ  $h_1$  онъ вылился бы за время:

$$t' = \frac{A(h_1 - h_2)}{\mu a \sqrt{2gh_1}} = \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \left( \sqrt{h_1} - \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \right) \dots \dots \dots (6)$$

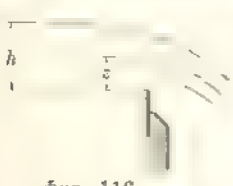
Если бы требовалось найти время опорожненія сосуда, то нужно было бы положить въ обоихъ послѣднихъ уравнѣхъ  $h_2 = 0$ , и тогда при переменномъ напорѣ время опорожненія есть:

$$t_0 = \frac{2A}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h_1} \dots \dots \dots (7)$$

а при постоянномъ напорѣ этотъ же объемъ воды выльется за время:

$$t' = \frac{A}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h_1} = \frac{t_0}{2},$$

т.-е. вдвое скорѣе. Такъ какъ при опорожненіи неминуемо образуется воронка, то при провѣркѣ на опытѣ уравненіе (5) даетъ величины, болѣе близкія къ наблюдаемымъ, нежели уравнѣ (7).



Фиг. 116.

2) Если бы отверстие было водосливное (фиг. 116), то, подобно предыдущему, мы могли бы написать:

$$dQ = \mu b z \sqrt{2gz} \cdot dt,$$

гдѣ  $b$  есть ширина водослива. Съ другой стороны, если притока нѣтъ, то

$$dQ = -A dz,$$

гдѣ  $A$  есть площадь свободной поверхности того водоема, откуда происходитъ истеченіе. Сравнивая эти выраженія, находимъ:

$$dt = \frac{A}{\mu b \sqrt{2g}} z^{-1/2} dz \dots \dots \dots (H)$$

Допустимъ, что  $A = const$ ; равнымъ образомъ, пусть  $\mu$  тоже не мѣняется съ напоромъ (хотя, какъ мы видѣли, это несправедливо); наконецъ, пусть водосливъ прямоугольный, т.-е.  $b = const$  (въ противномъ случаѣ нужно было бы выразить всё переменныя величины  $A$ ,  $\mu$  и  $b$  въ функции  $z$ ). Интегрируемъ выраженіе (II) въ предѣлахъ отъ  $z = h$  до  $z = 0$ , т.-е. опредѣлимъ время прекращенія истечения черезъ водосливъ, когда нѣтъ притока:

$$T = \frac{-A}{\mu b \sqrt{2g}} \int_0^h z^{-3/2} dz = \frac{A}{\mu b \sqrt{2g}} \int_0^h z^{-3/2} dz = \frac{2A}{\mu b \sqrt{2g}} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right) = \dots$$

Въ этомъ рѣшеніи нѣтъ ничего парадоксальнаго, потому что, хотя въ дѣйствительности моментъ прекращенія истечения рано или поздно наступаетъ, но момента, когда горизонтъ спускается до порога, не наступить никогда,—всегда выше уровня порога остается слой воды толщиной въ нѣсколько миллиметровъ, удерживаемый въ равновѣсїи силами капиллярности (несовершенство жидкости). Поэтому при опредѣленіи времени прекращенія истечения слѣдуетъ считать нижнимъ предѣломъ переменнаго  $z$  не нуль, а какую-нибудь небольшую величину, напр., 0,005 *mtr.* Отметимъ, что полученный результатъ не можетъ все-таки дать величины, вполне согласной съ наблюденіемъ, такъ какъ  $\mu$  при очень малыхъ напорахъ постояннымъ считать нельзя.

3) Когда сосудъ не призматическій то чтобы взять интегралъ ур-ня (3), нужно знать зависимость между  $A$  и  $z$ . Если сосудъ имѣетъ правильную форму,—напримѣръ, если это пирамида, какое-нибудь гѣлѣ вращения и т. п.,—то установить эту зависимость нетрудно. 4) становимся подробнѣе на случаѣ сосудовъ неправильной формы, каковы, наприм., въ лѣвотскихъ прудахъ (фиг. 117, которые часто устраиваютъ для того, чтобы въ сухое время года спускать въ рѣку черезъ плотину тѣ избытки воды, которые накапливались въ прудѣ въ болѣе обильные водою періоды года. Такие пруды устраиваютъ какъ для цѣлей судоходства, такъ и для утилизаціи энергїи, въ этомъ послѣднемъ случаѣ особенно важно



Фиг. 117

знать, на сколько времени хватитъ даннаго водоема во время засухи при нормальномъ расходѣ воды. Если окажется, что это время короче длительности засухи, то можетъ оказаться болѣе рациональнымъ въ теченіе всего сухого періода работать одновременно и съ водяными и съ запасными паровыми двигателями, уменьшивъ, слѣдовательно, необходимый расходъ воды, нежели быть принужденнымъ на нѣкоторое время сократить производительность завода за недостаткомъ воды или же ставить запасные паровые двигатели, равносильные съ водяными, работающими полной силой.

Возможны слѣдующіе два случая: 1) детальной инвентировкой пруда опредѣлены его горизонтальныя разрѣзы, и 2)—этого нѣтъ.

1) Допустим сначала, что притока и убыль  $q = 0$ . Пусть в начале этого периода имется над центром тяжести отверстия напор  $H_0$ , а  $H_n$  есть самый низкий горизонт, при котором еще возможна работа водяных двигателей. Разделим высоту  $H_0 - H_n$  на четное число  $n$  равных частей. Допустим далее, что, пока горизонт опускается на высоту  $\frac{H_0 - H_n}{n}$ , истечение происходит под постоянным напором, чѣмъ мельче эти дѣления, тѣмъ это допущение точнѣе. Для выражения перѣла времени понижения горизонта съ высоты  $H_0$  до высоты  $H_n$  возьмемъ полученное выше уравненіе (2), и положивъ въ немъ  $q = 0$ ; имѣемъ:

$$dt = \frac{A dz}{\mu a \sqrt{2gz}}$$

интегрируя въ предѣлахъ ( $H_0, H_n$ ), получаемъ:

$$t = \int_{H_n}^{H_0} \frac{A dz}{\mu a \sqrt{2gz}} = \int_{H_n}^{H_0} \frac{A dz}{\mu a \sqrt{2gz}} \cdot \frac{1}{\sqrt{H_0 - H_n}} \cdot \sqrt{H_0 - H_n} \quad (K)$$

Въ виду невозможности установить функціональную зависимость между  $A$  и  $z$ , замѣнимъ интегрированное суммированиемъ по формулѣ Симпсона. Имѣемъ поэтому вѣдѣмъ интегрального уравненія (K) слѣдующее:

$$t = \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \sum_{H_n}^{H_0} \frac{A}{\sqrt{z}} dz$$

Такъ какъ для разныхъ  $z$  величины  $A$  по существующему плану прудѣ съ горизонталями извѣстны, то можно взять рядъ отдѣльныхъ значений  $\frac{A}{\sqrt{z}}$ , соответственно принятымъ ступенямъ  $\frac{H_0 - H_n}{n}$ , и разсматривать ихъ, какъ ординаты  $y$  въ некоторой кривой съ абсциссами  $z$ . По правилу Симпсона площадь такой кривой, т. е. сумма  $\sum_{z=a}^{z=b} y dz$ , приближенно выражается вообще такъ:

$$\sum_{z=a}^{z=b} y dz = \frac{b-a}{3n} \{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})\},$$

гдѣ  $b$  и  $a$  суть начальныя и конечныя значенія абсциссы  $z$ , а  $n$  — число дѣлений отъѣзка ( $b - a$ ).

Въ нашемъ случаѣ получимъ:

$$t = \frac{H_0 - H_n}{3n \mu a \sqrt{2g}} \left\{ \frac{A_0}{\sqrt{H_0}} + \frac{A_n}{\sqrt{H_n}} + 4 \left( \frac{A_1}{\sqrt{H_1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{\sqrt{H_{n-1}}} \right) + 2 \left( \frac{A_2}{\sqrt{H_2}} + \dots + \frac{A_{n-2}}{\sqrt{H_{n-2}}} \right) \right\} \quad (8)$$

А расходъ воды за все это время, или, стало быть, располагаемый запасъ воды въ прудѣ или, какъ говорятъ, рабочій объемъ пруда, очевидно, равенъ:

$$V = \sum_{H_n}^{H_0} \frac{H_0 - H_n}{3n} A$$

$$= \frac{H_0 - H_n}{3n} \left\{ A_0 + A_n + 4(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}) + 2(A_2 + A_4 + \dots + A_{n-2}) \right\} \quad (9)$$

По формулѣ (8) получаемъ перѣдъ времени, на который хватитъ пруда, если все время отверстие  $a$  будетъ открыто цѣликомъ, а по формулѣ (9) находимъ весь располагаемый запасъ воды въ немъ. Если длительность засухи, по показаніямъ старожилловъ и по наблюденіямъ, есть  $T$ , то расходъ въ единицу времени можетъ быть допущенъ въ количествѣ  $\frac{V}{T}$ . Однако можетъ оказаться желательнымъ расходовать не одинаковые объемы воды, а одинаковые запасы работы. Запасъ же работы въ каждомъ слое площадью  $A$ , имѣющемъ толщину  $z$  и стоящемъ на высотѣ  $z$  надъ центромъ тяжести отверстия, есть, очевидно,

$$L = \gamma A z z.$$

Во всемъ прудѣ, отъ  $z = H$  до  $z = H_n$ , запасъ работы достигаетъ величины

$$L = \Sigma(\gamma A z z) = \frac{\gamma(H^3 - H_n^3)}{3n} \{A_0 H_0 + A_n H_n + 4(A_1 H_1 + A_2 H_2 + \dots) + 2(A_3 H_3 + A_4 H_4 + \dots)\}. \quad (10)$$

Въ каждую единицу времени за весь періодъ засухи можно расходовать только  $\frac{L}{T}$  *кгр метр.* Недостающая работа должна быть дополняема запасными паровыми двигателями. Является теперь вопросъ, какое пониженіе горизонта можно допустить въ каждую единицу времени, чтобы за этотъ промежутокъ времени выпустить изъ пруда запасъ работы  $\frac{L}{T}$ ? Условіе это будетъ соблюдено, если для каждаго  $z$  вышенаписанная величина  $L$  будетъ имѣть постоянное значеніе  $\frac{L}{T}$ ; вопросъ такимъ образомъ сводится къ рѣшенію относительно  $Az$  ряда уравненій вида:

$$A z = \frac{L}{T}.$$

Отсюда видно, что въ каждую единицу времени, въ которой выражено  $T$  (секунда, часъ и т. д.), пока  $z$  находится въ предѣлахъ отъ  $H_0$  до  $H_1$ , т. е. въ среднемъ имѣетъ значеніе  $\frac{H_0 + H_1}{2}$ , а площадь  $A$  имѣетъ среднее значеніе  $\frac{A_0 + A_1}{2}$ , можно допускать пониженіе горизонта:

$$z_1 = \frac{L}{T \gamma (A_0 + A_1) (H_0 + H_1)}.$$

Поступая такимъ образомъ, найдемъ допустимыя пониженія горизонта въ любую заданную единицу времени. Далѣе, зная эти величины, легко найти величины промежутковъ времени, въ продолженіе которыхъ можно оставлять пониженіе постояннымъ; эти промежутки времени будутъ послѣдовательно таковы:

$$t_1 T = \frac{H_0 - H_1}{L_1}, \quad t_2 T = \frac{H_1 - H_2}{L_2}, \quad \text{и т. д.}$$

или, внося вмѣсто  $Az$  ихъ значенія:

$$t_1 T = \frac{\gamma(H_0^2 - H_1^2)(A_0 + A_1)}{4L} T; \quad t_2 T = \frac{\gamma(H_1^2 - H_2^2)(A_1 + A_2)}{4L} T; \quad \text{и т. д.}$$

Наконецъ, зная эти промежутки времени, можно установить для каждаго изъ нихъ опредѣленную величину открытія отверстия  $a$ , такъ какъ, конечно, этимъ-то мы и измѣняемъ количество протекающей воды.

2) Теперь пусть размеры пруда неизвѣстны, а сблатъ его нивелировку возможнымъ не представляется. Пусть  $H_0$  есть первоначальный напоръ,  $H_n$  — конечный, а  $z$  какой-нибудь промежуточный напоръ въ центрѣ тяжести отверстия, отводящаго воду къ машинамъ; площадь отверстия, поперечному назовемъ черезъ  $a$ . Независимо отъ того, есть притокъ или итъ, можемъ писать, что за время  $dt$  расходъ  $dQ$  выражается такъ:

$$dQ = \mu a \sqrt{2gz} \cdot dt$$

за время  $t$  расходъ  $Q$  выразится, слѣд., ур-іемъ:

$$Q = \mu a \sqrt{2g} \int_{H_n}^{H_0} \sqrt{z} dz \dots \dots \dots (11)$$

Въ виду того, что функциональной зависимости между  $z$  и  $t$  у насъ не имѣется, интегрирование придется замѣнить суммированиемъ по правилу Симпсона. Необходимыя для этого данныя получаемъ слѣдующимъ образомъ:

Въ такое время года, когда притокъ воды довольно значителенъ, спускаемъ воду до тѣхъ поръ, пока не достигнемъ напора  $H_n$ ; замѣчаемъ потребовавшийся для этого промежутокъ времени  $T$ ; при этомъ каждая 5—10 минутъ отмѣчаемъ соответствующіе напоры  $H_0, H_1, H_2, \dots$  и т. д., съ такимъ расчетомъ, чтобы получить четное число  $n$  промежутковъ, — для этого, очевидно, нужно произвести и четное число отсчетовъ. Уравненіе (11) дастъ намъ такимъ образомъ:

$$Q = \mu a \sqrt{2g} \frac{T}{3n} \left[ \sqrt{H_0} + \sqrt{H_n} + 4(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2} + \dots + \sqrt{H_{n-1}}) + 2(\sqrt{H_2} + \sqrt{H_4} + \dots + \sqrt{H_{n-2}}) \right]. \quad (12)$$

Какъ только уровень спустился до заранее намѣченной величины  $H_n$  (или близкой къ ней, обыкновенно  $H_n$  есть тотъ напоръ, при которомъ еще могутъ работать заводскіе двигатели), отверстие закрываютъ и наблюдаютъ теперь время  $T_1$ , требующееся для того, чтобы вода поднялась до первоначальнаго горизонта  $H_0$ ; при этомъ опять слѣдуетъ отмѣчать тѣ промежутки времени  $t_1, t_{n-1}, \dots, t_2, t_1$ , за которые горизонтъ поднимается послѣдовательно отъ  $H_n$  до  $H_{n-1}$ , отъ  $H_{n-1}$  до  $H_{n-2}$  и т. д. и, наконецъ, отъ  $H_1$  до  $H_0$ ; эти величины могутъ быть или тѣ самыя, которыя были отмѣчены въ періодъ спускающаго воды, или же могутъ быть взяты такъ, чтобы соблюдалось условие:

$$H_{n-1} - H_n = H_n - H_{n-2} = H_{n-2} - H_{n-1} = \dots = H_1 - H_0 = \frac{H_0 - H_n}{n}.$$

Имѣя эти данныя, можно свести вопросъ къ предыдущему, а именно такимъ образомъ: если рабочій объемъ пруда есть  $V$ , а притокъ (постоянный) есть  $q$ , то очевидно.

$$V = qT_1.$$

Далѣе, очевидно, что за время спуска  $T$  вылился какъ объемъ  $V$ , такъ и все притекшее за это время количество жидкости  $qT$ , такъ что

$$Q = V + qT = q(T + T_1) \dots \dots \dots (L)$$

Вычисляя  $Q$  по уравненію (12), найдемъ изъ (L) величину  $q$ , такъ какъ  $T$  и  $T_1$  даны наблюдениемъ.

Далѣе, если за время  $t_1$  вода поднялась отъ уровня  $H_1$  до уровня  $H_0$ , то, называя среднюю для этихъ высотъ площадь свободной поверхности черезъ  $A_1$ , можемъ написать,

$$V = (H_0 - H_1) A_1 = q t_1$$

Отсюда найдем  $A_1$ , а подобно этому найдем и прочие средние сечения пруда  $A_2, A_3, \dots, A_n$ . Зная же площади  $A$ , мы сводим вопрос таким образом къ предыдущему случаю.

Рабочий объем пруда  $V$  опредѣляется тоже просто. Мы видѣли, что  $V = qT_1$ ; а такъ какъ  $q$  мы уже нашли:

$$q = T \frac{Q}{T_1},$$

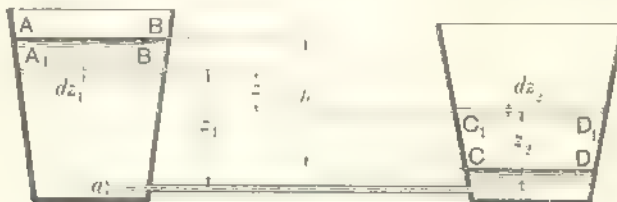
то легко найдемъ и  $V$ :

$$V = Q \frac{T}{T + T_1}.$$

Замѣтимъ, что такія наблюденія можно дѣлать только въ томъ случаѣ, если налицо есть порядочный притокъ воды, ибо иначе периодъ  $T_1$  (периодъ наполнения пруда), при сколько нибудь большихъ его размѣрахъ, можетъ оказаться слишкомъ длиннымъ, такъ что не только успѣть измѣниться  $q$ , но даже можетъ случиться, что заводъ останется безъ пруда. Это обстоятельство дѣлаетъ указанный приемъ не всегда применимымъ, хотя проф. Тиме не разъ имъ пользовался (см., напр., его „Исслѣдованіе рѣки Ижоры“ въ „Горномъ Журналѣ“ за 1883 годъ, октябрь, стр. 75—82)\*.

## § 20. Истеченіе при переменномъ напорѣ подѣ переменный уровень.

Пусть въ двухъ сосудахъ (фиг. 118), соединенныхъ трубою сѣченія  $a$ , въ какой-нибудь моментъ горизонты стоятъ на уровняхъ  $AB$  и  $CD$ ; вертикальное разстояніе между ними пусть равно  $h$ . Требуется найти



Фиг. 118.

промежутокъ времени, по прошествіи котораго горизонты станутъ въ разстояніи  $z$  между собою. Величины поперечныхъ сѣченій, могущія, вообще говоря, быть переменными (какъ это и изображено на чертежѣ), будемъ обозначать черезъ  $A_1$  и  $A_2$ .

Пусть въ этотъ моментъ горизонты стоятъ въ  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ ; вертикальное разстояніе между ними  $z$  выражается разностью  $z_1 - z_2$ . Въ продолженіе

\*. Прудъ Колпинскаго завода, изслѣдованный проф. Тиме указаннымъ путемъ, какъ оказалось, имѣлъ поверхность  $A_0 = 21$  милліон. кв. футъ (около  $13\frac{1}{4}$  кв. версты; слой толщиной въ 1" соответствуетъ объему свыше 2 мил. куб. футъ; рабочий объемъ пруда опредѣленъ  $V = 49$  мил. куб. фут. Понятно, какая затрудненія представляетъ нивелировка два такого пруда. И это еще не самый большой прудъ. Воткинскій заводъ на Уралѣ имѣеть нѣсколько прудовъ, самый большой изъ нихъ имѣеть  $A_0 = 2100$  мил. кв. футъ, т.е. около  $16\frac{1}{2}$  кв. верстъ; слой въ 1" представляетъ объемъ 16,7 мил. куб. футъ; рабочий объемъ пруда  $V = 1625$  мил. куб. футъ или около 45,5 милліоновъ  $mgr^3$ . За послѣдніе годы исполняется много

безконечно малаго промежутка времени  $dt$  этот напоръ можно считать постояннымъ, а потому можно принять, что за это время изъ одного сосуда въ другой перельется количество воды:

$$dQ = \mu a \sqrt{2gz} \cdot dt.$$

При этомъ въ коэффициентъ расхода  $\mu$ , при отсутствіи сжатія равномъ  $\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}$ , нужно, конечно, оцѣнить влияние сопротивленія, вносимаго отверстиемъ, а также того сопротивленія, которое вносится трубою, если она достаточно длинна; о послѣднемъ сопротивленіи см. слѣдующую главу.

Уровень перваго сосуда за это время понизится на  $(-dz_1)$  (минусъ потому, что ось  $z$ -овъ считаемъ положительной вверхъ), а во второмъ повысится на  $(+dz_2)$ ; очевидно, что убыль въ одномъ сосудѣ равняется прибыли въ другомъ, равняясь въ то же время перетекшему объему жидкости, т.-е.

$$dQ = -A_1 dz_1 = A_2 dz_2,$$

откуда

$$dz_2 = -\frac{A_1}{A_2} dz_1.$$

Такъ какъ

$$z = z_1 = z_2,$$

то

$$dz = dz_1 - dz_2 = dz_1 \left(1 + \frac{A_1}{A_2}\right),$$

откуда

$$dz_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} dz,$$

а потому

$$dQ = -A_1 dz_1 = -\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} dz = \mu a \sqrt{2gz} \cdot dt;$$

отсюда

$$dt = -\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} \dots \dots \dots (M)$$

такихъ огромныхъ прудовъ, для цѣлей водоснабженія для регулированія расхода и созданія напора при утилизаціи энергій, для цѣлей орошенія, наконецъ для цѣлей судоходства. Такъ напримѣръ, одинъ изъ самыхъ большихъ прудовъ Франціи на р. Уонне въ Settons имѣетъ объемъ въ 22 мил.  $mtr^3$  и назначенъ для судоходства; прудъ въ Алжирѣ на р. Nabra вмѣщаетъ 30 милліоновъ  $mtr^3$ . Одинъ изъ самыхъ большихъ прудовъ Германіи построенъ проф. Intze въ 1900 г. въ Urtthal'ѣ на р. Эйфель (притокъ р. Рура) для утилизаціи энергій и защиты отъ наводненій и вмѣщаетъ 45.5 мил.  $mtr^3$ , т.-е. равенъ Волкинскому пруду. Изъ американскихъ прудовъ упомянемъ Новую плотину на р. Croton (New Croton) для водоснабженія города Нью-Йорка; вмѣстимость пруда = 121 мил.  $mtr^3$ , при чемъ рабочей объёмъ его = 100 мил.  $mtr^3$ . Для водоснабженія г. Санъ-Франциско построенъ въ 1887—90 годахъ прудъ вмѣстимостью около 110 мил.  $mtr^3$ , съ поверхностью около 10  $km^2$ . Несколько прудовъ въ 140—156 мил.  $mtr^3$  построено въ Индіи, главнымъ образомъ для цѣлей орошенія (на р. Mutha, напр. полный



Если оба сосуда призматические, т.е. если  $A_1$  и  $A_2$  неизмѣнны, то искомый промежутокъ времени  $t$  пониженія разстоянія уровнейъ отъ  $h$  до  $z$  получимъ, интегрируя ( $M$ ) въ предѣлахъ отъ  $h$  до  $z$ :

$$t = \int_b^z \left( \frac{A_1 A_2}{A_1 - A_2} \right) \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \frac{dz}{z} = \frac{A_1 A_2}{A_1 - A_2} \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \int_b^z \frac{dz}{z^2}$$

и окончательно

$$t = \frac{2A_1 A_2}{A_1 - A_2} \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} (\frac{1}{h} - \frac{1}{z}) \dots \dots \dots (13)$$

Промежутокъ времени  $T$ , за который уровни сравниваются, получимъ, интегрируя въ предѣлахъ отъ  $h$  до 0, такъ что изъ (13), полагая  $z = 0$ , находимъ:

$$T = \frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2} \cdot \frac{1}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h} \dots \dots \dots (14)$$

Если одинъ изъ сосудовъ, напримѣръ,  $A_1$ , очень великъ по сравненію съ другимъ, такъ что можно принять, что  $A_1 = \infty$ , то время  $T'$  наполненія второго сосуда (очевидно, до высоты  $h$ ) опредѣлится ур-емъ:

$$T' = \frac{2A_2}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h} \dots \dots \dots (15)$$

Если же  $A_2 = \infty$ , то время  $T''$  опорожненія первой камеры будетъ:

$$T'' = \frac{2A_1}{\mu a \sqrt{2g}} \sqrt{h} \dots \dots \dots (16)$$

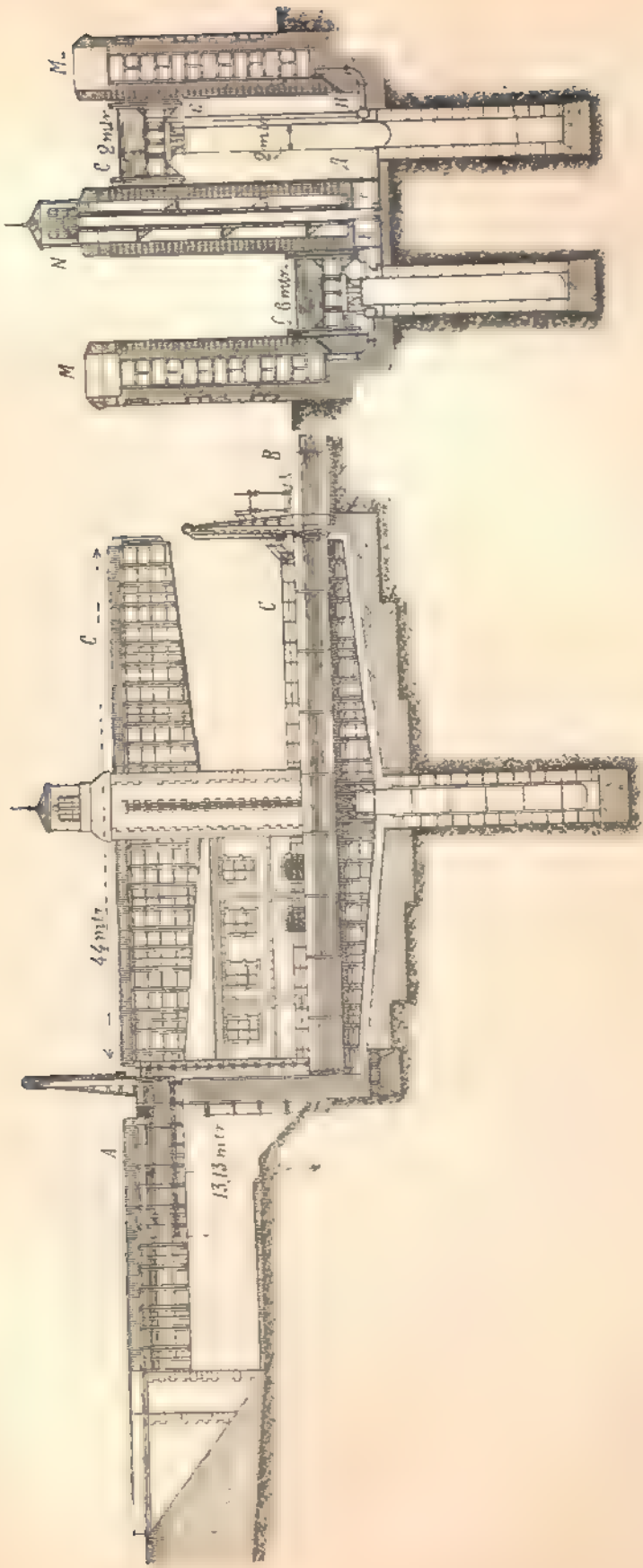
Выраженіе (5) въ § 19, а также послѣднія ур-я (14) — (16) находятъ себѣ примѣненіе при опредѣленіи времени наполненія и опорожненія шлю-

объемъ пруда въ 146 мил.  $mtr^3$ , рабочи же объемъ его равенъ лишь 90 мил  $mtr^3$ , при поверхности пруда въ 14  $km^2$ , на р. Thelund прудъ вмѣщаетъ 156 мил.  $mtr^3$  и т. д.). Наконецъ, самый большой прудъ отстроены въ началѣ нынѣшняго столѣтія (1898—1902 гг.) на р. Низъ, близъ с. Асеуана, для цѣлей орошенія по преимуществу. Здѣсь плотина имѣетъ 1950  $mtr$  длины и подпруживаетъ объемъ воды до 1065 мил.  $mtr^3$ . См. по этому поводу:

P. Ziegler: Der Thalsperrenbau. Berlin 1900. Также Intze: Die geschichtliche Entwicklung der Thalsperren. Berlin 1906. О вильской плотинѣ см. въ Minutes of proceedings of the Institution of civil Engineers, Vol. CLII, Jun: 1903 годъ; также въ „Пажеверномъ Дѣлѣ“ за 1904 годъ, № 1.

Въ настоящее время строится самый большой прудъ Европы на р. Мѣнне (притокъ р. Рура) между городами Сестъ и Арисбергъ; вмѣстность пруда будетъ 180 мил.  $mtr^3$ ; онъ затопитъ поверхность въ 10,16 кв. километровъ (около 930 десятинъ). Его каменная плотина будетъ имѣть длину по гребню въ 632  $mtr$ , высоту въ 40  $mtr$ . Объемъ каменной кладки плотины равенъ 240 тысячъ  $mtr^3$ . Постройка пруда и всѣхъ принадлежностей обойдется до 20 милліоновъ марокъ. См. Z. d. V. d. I. за 1909 г, стр. 117.

Таблица IV.



Гидравлическій подъемникъ для судовъ на каналѣ Neufossé близъ Fontinettes въ Бельгіи.  
Система инженероу Эдвина Клерка и Дьюера изъ Андертона.

зовыхъ камеръ; при ихъ помощи рѣшается также и обратная задача: по заданному времени наполненія и опорожненія камеръ по этимъ формуламъ можно найти необходимыя для этого площади отверстій.

Всѣ соображенія, которыя приводятся при разрѣшеніи задачи о времени наполненія и опорожненія шлюзовыхъ камеръ, настолько просты, что разобрать ихъ не трудно; нужно только различать при этомъ два періода: истечение подъ уровень, тогда нужно брать выраженія (14) и (15) — и истечение въ воздухъ (уравненіе 5 въ § 19), если уровни переменныя. Если же уровни постоянныя, то нужно писать обычныя выраженія расхода по даннымъ предыдущихъ параграфовъ этой главы. Подробный разборъ рѣшенія задачи можно найти въ курсахъ Зернова, Максименко, Kühmann'a, Weisbach'a и др.

Когда рѣка мелководна, то можно ее сдѣлать судоходною, перегорядивъ ее рядомъ плотинъ, рассчитанныхъ такъ, чтобы на каждомъ участкѣ между плотинами глубина была вездѣ достаточна для пропусковъ судовъ. Для того, чтобы можно было пропускать суда и черезъ плотину, около нея устраиваютъ шлюзовую камеру, которую можно по произволу соединять то съ водою передъ плотиною, то съ водою за плотиною, или, какъ говорятъ, съ верхнимъ или нижнимъ бьефомъ. Если требуется пропускать судно, идущее вверху по рѣкѣ, то шлюзовую камеру соединяють сначала съ нижней водой и впускаютъ въ нее судно; уединивъ затѣмъ эту камеру отъ нижней воды, соединяють ее съ верхней водой; когда горизонты воды въ рѣкѣ и камерѣ сравняются, судно выплываетъ. Если разность уровней передъ и за плотиною не велика (не болѣе 4 *m*), то довольствуются одной камерой (простой шлюзъ); если же разность уровней больше 4 *m*, то, во избѣжаніе слишкомъ глубокихъ камеръ, слишкомъ тяжелыхъ воротъ, а главное, слишкомъ большихъ потерь воды при каждомъ проходѣ судна, ставятъ двѣ и болѣе камеръ, одна за другой, — получается такимъ образомъ сложный шлюзъ. Далѣе, шлюзы ставятся для обхода пороговъ, волноядовъ, для того, чтобы сдѣлать судоходными горныя рѣки и т. д.

Впрочемъ, при очень большихъ разностяхъ уровней (13 *m* и болѣе) иногда ставятъ не сложные шлюзы, а рядъ гидравлическихъ, а въ Америкѣ также и пневматическихъ подъемниковъ, съ помощью которыхъ и переносятъ суда до 600 *tn* водоизмѣщенія съ одного горизонта на другой. Въ общихъ чертахъ это дѣлается такъ (табл. IV):

Неподвижная шлюзовая камера закрѣвлена подвижнымъ маленькимъ резервуаромъ *C*, имѣющимъ на концахъ герметически закрывающіяся ворота. Такія же герметическія ворота поставлены въ концѣ приволяющаго канала *A* и отвояющаго *B*. Резервуаръ *C* поддерживается сильной скалкой *D*, входящей въ гидравлическій цилиндръ, и движется между двумя направляющими стѣнками *M* и *N*. Такихъ резервуаровъ два, при чемъ оба гидравлическія цилиндра сообщаются между собою трубой *E*, на которой поставленъ клапанъ *F*. Оба резервуара совершенно одинаковы и наполняются водою на одинаковую высоту, а потому они взаимно уравниваются, и достаточно небольшой разницы въ нагруженіи одного изъ нихъ, чтобы вся система пришла въ движеніе. Понятно, что этой разницы въ вѣсѣхъ отъ тѣлъ, плавающихъ въ резервуарахъ, получить нельзя, ибо когда въ одинъ изъ нихъ входитъ судно, то оно, очевидно, вытѣсняетъ изъ резервуара въ соответствующій каналъ какъ разъ такое количество воды, сколько оно вѣситъ само, не вызывая при этомъ повышения уровня воды въ резервуарѣ. Понятно далѣе, что, разъ указанная разница такъ или иначе получена, вся система будетъ двигаться равномерно-ускоренно, и, чтобы избѣжать удара въ концѣ хода, на трубѣ *E* я ставятъ клапанъ *F*, которымъ можно регулировать скорость перемѣщенія воды изъ одного гидравлическаго цилиндра въ другой, а слѣдовательно, и скорость движенія всей системы.

Очевидно, что по мѣрѣ того, какъ одинъ резервуаръ погружается своею скалкой въ гидравлическій цилиндръ, онъ теряетъ въ вѣсѣ, а въ то же время поднимающийся сосудъ становится настолько же тяжелѣе, а потому движеніе вообще было бы невозможно. Для устранения этого обстоятельства или прибѣгаютъ къ помощи насосовъ, перегоняющихъ воду изъ одного цилиндра въ другой, или же въ стѣнкахъ *M, N* выкладываютъ резервуары, воспроизводящія форму скалки, и соединяють ихъ шарнирными трубами *GH* съ сосудами *C*; устраиваютъ все такъ, что по мѣрѣ опусканія ящика въ него переки-

вается как раз такой объемъ воды, сколько скалка вытѣсняетъ изъ цилиндра, а потому весь этой части системы измѣняться не будетъ. На другой сторонѣ, наоборотъ, изъ ящика будетъ выливаться въ резервуаръ *M* столько воды, что это облегчение какъ разъ будетъ равно увеличению веса отъ выхода скалки изъ цилиндра.

Идея такихъ устройствъ принадлежитъ англичанамъ Edwin Clark и Queer (изъ Андертона), которые исполнили такие шлюзы на Weaverскомъ каналѣ въ 1883 году. Выгода подобныхъ устройствъ двоякая: во первыхъ, перемѣщене судна на большую высоту достигается гораздо быстрее, нежели это возможно съ устройствомъ сложнаго шлюза; а во вторыхъ въ шлюзахъ съ каждымъ проходомъ судна протекаетъ большой объемъ воды, равный площади шлюза, умноженной на разность горизонтовъ передъ и за нимъ безъ объема, вытѣсненнаго судномъ. Здѣсь же, кромѣ утечки въ неплотностяхъ, теряется только объемъ воды, вытѣсняемой скалкою (при устройствахъ компенсирующихъ резервуаровъ въ стѣнахъ *M*) \*).

Чтобы избѣжать такихъ ответственныхъ деталей, какъ громадная скалки и соответствующе цилиндры, въ самое послѣднее время перешли къ употреблению поплавковъ: вся камера, подобная *C*, ставится на нѣсколько поплавковъ, входящихъ каждый въ свой колодезь; такимъ путемъ весь громадный весь судна, камеры и воды въ ней разгрузается и является возможнымъ помощью винтового механизма поднимать или опускать камеру.

Такъ устроены шлюзы въ Dortmund'ѣ. (м. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1896, статья Gerdaу объ этомъ каналѣ, а также тотъ же журналъ за 1903 годъ, стр. 1017.

За послѣднее время при большихъ разностяхъ горизонтовъ вмѣсто шлюзовъ все большее примѣненіе получаютъ наклонныя плоскости, по которымъ на тележкахъ особаго устройства поднимаются и спускаются клепаные резервуары вмѣстѣ съ впускными въ нихъ судами. Такое устройство примѣнено на Дунаѣ для обхода Железныхъ Воротъ. На выставкѣ 1900 года въ Парижѣ былъ цѣлый рядъ проектовъ (въ чертежахъ и моделяхъ), преимущественно французскихъ, посвященныхъ разработкѣ этой идеи.

Относящіеся къ главѣ II числовые примѣры и задачи помѣщены въ концѣ главы III.

\* ) Подробный чертежъ подобной установки см Ernst, „Die Hebezeuge“ издание 1.

## ГЛАВА III.

### Движеніе воды въ трубахъ.

#### § 21. Средняя скорость. Трение въ жидкостяхъ.

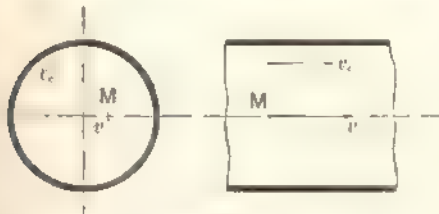
Для несовершенной жидкости, движущейся въ установившемся движеніи съ сохраненіемъ плоскаго вида сѣченій, мы получили уравненіе движенія (Д. Бернулли) въ такомъ видѣ:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \eta,$$

гдѣ  $\eta$  есть напоръ, потерянный на преодоленіе сопротивленій, имѣющихъ мѣсто на разсматриваемомъ участкѣ. По общему смыслу уравненія  $\eta$  есть работа этихъ сопротивленій на разсматриваемомъ пути, отнесенная къ одному килограмму протекающей жидкости. Причины, порождающія сопротивленіе при движеніи жидкостей, коренятся въ ихъ основныхъ свойствахъ—неупругости и такъ назыв. несовершенствѣ, т. е. вязкости, иными словами, способности воспринимать и оказывать нѣкоторыя тангенціальныя напряженія. Это послѣднее обстоятельство, называемое также *трениемъ* жидкостей, и надлежитъ теперь ближайшимъ образомъ разсмотрѣть.

Скорости, входящая въ ур-іе Д. Бернулли, предполагающее движеніе параллельными слоями, по самому смыслу этого предположенія во всѣхъ точкахъ сѣченія должны имѣть одну и ту же величину. Легко видѣть, что

ближайшимъ слѣдствіемъ несовершенства жидкости является то обстоятельство, что въ дѣйствительности этого равенства скоростей быть не можетъ. Жидкость вязка; двигаясь по стѣнкѣ, ея частицы замедляютъ свое движеніе вслѣдствіе тренія о стѣнку. Назовемъ черезъ  $v_0$  ту скорость, съ которой въ какомъ-нибудь



Фиг. 119.

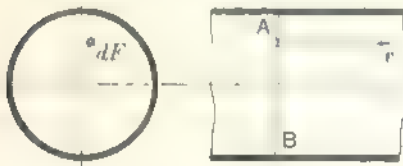
данномъ сѣченіи жидкость скользитъ по стѣнкѣ трубы (фиг. 119). Гдѣ-нибудь въ другой точкѣ того же сѣченія это замедляющее дѣйствіе стѣнки отсутствуетъ, такъ что частица, находящаяся здѣсь подъ влия-

ніемъ тѣхъ же движущихъ силъ, что и первая, кромѣ тренія о стѣнку, можетъ двигаться съ болѣею скоростью  $v$ ; является, такимъ образомъ, скольженіе одной частицы по другой, при чемъ это относительное движеніе сопровождается тоже треніемъ, т.-е. нѣкоторымъ замедленіемъ. Это треніе частицъ жидкости другъ о друга называется *внутреннимъ*, треніе же о стѣнку—*внѣшнимъ* \*). Такимъ образомъ, скорости въ разныхъ точкахъ сѣченія различны,—слѣдовательно, параллельность сѣченій не соблюдается, и чтобы сдѣлать уравненіе Д. Бернулли примѣнимымъ и къ этому случаю, будемъ разсматривать не дѣйствительное движеніе жидкости, а иное—воображаемое, удовлетворяющее условію параллельности слоевъ; именно, допустимъ, что все частицы во всякомъ данномъ сѣченіи движутся съ одной, общей *средней* скоростью  $v$ , при чемъ подъ этимъ терминомъ будемъ разумѣть такую *общую для всехъ точекъ сѣченія скорость, при которой черезъ данное сѣченіе проходитъ то же самое количество воды, что и въ истинномъ движеніи*. Если, слѣдовательно, площадь сѣченія трубы есть  $F$ , средняя скорость  $v$ , а въ каждомъ элементѣ площади  $dF$  имѣется въ дѣйствительности своя скорость  $v'$ , измѣняющаяся въ зависимости отъ положенія элемента въ площади  $F$ , то указанное опредѣленіе средней скорости выразится уравненіемъ:

$$Q = \sum v' dF = Fv \dots \dots \dots (1)$$

Такая замѣна истиннаго движенія воображаемымъ произвольна и ведетъ къ ошибкамъ. Именно, количество движенія, а равно и живая сила

слоя, движущагося какъ въ дѣйствительности, т.-е. съ разными скоростями въ разныхъ точкахъ сѣченія, больше, нежели тѣ же величины для слоя, движущагося со средней скоростью. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дана труба какого-нибудь сѣченія съ площадью  $F$  (фиг. 120). Разсмотримъ безконечно тонкій слой  $AB$  жидкости.



Фиг. 120.

стп. Черезъ все сѣченіе трубы въ единицу времени проходитъ количество жидкости  $Q$  [см. ур. (1)]. За время  $dt$  пройдетъ количество:

$$dQ = Fv dt,$$

которое и можно принять за объемъ слоя  $AB$ . Живая сила массы этого объема при движеніи со среднею скоростью есть:

$$\frac{\gamma F v dt}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma dt}{2g} Fv^3 \dots \dots \dots (2)$$

\*) Съ влияемъ тренія жидкости, преимущественно внутренняго, мы уже имѣли дѣло, когда говорили о сопротивленіяхъ и потеряхъ напора при истеченіи черезъ отверстія.

Въ дѣйствительности же въ каждомъ элементѣ сѣченія  $dF$  имѣется своя скорость  $v'$ , и черезъ него проходитъ за то же время  $dt$  объемъ воды:

$$dq = dF v' dt.$$

Живая сила массы этого объема есть:

$$\frac{\gamma dF v' dt}{g} \quad \frac{v'^2}{2} = \frac{\gamma dt}{2g} dF v'^2.$$

Поэтому живая сила всего слоя въ дѣйствительности такова:

$$\Sigma \frac{\gamma dt}{2g} dF v'^2 = \frac{\gamma dt}{2g} \Sigma dF v'^2 \dots \dots \dots (3)$$

Сравнимъ количества  $Fv^3$  и  $\Sigma dF v'^3$ . Истинная скорость  $v'$ , вообще, отличается отъ средней  $v$ ; она можетъ быть больше и меньше ея, а потому положимъ вообще, что

$$v' = v + w, \dots \dots \dots (4)$$

гдѣ  $v$  есть постоянная средняя скорость, а  $w$ —переменная величина, могущая быть положительной, нулемъ или отрицательной. Внося это выраженіе  $v'$  въ (3), получимъ, что истинная живая сила слоя пропорциональна количеству

$$\Sigma dF v'^3 = \Sigma dF (v + w)^3 = \Sigma v^3 dF + 3 \Sigma v^2 w dF + 3 \Sigma v w^2 dF + \Sigma w^3 dF. \quad (5)$$

Очевидно, что

$$\Sigma v^3 dF = v^3 \Sigma dF = Fv^3.$$

Далѣе, по ур-ню (1) вѣдемъ, внося въ него выраженіе (4):

$$Q = Fv = \Sigma (v + w) dF = \Sigma v dF + \Sigma w dF = Fv = \Sigma w dF.$$

Отсюда очевидно, что

$$\Sigma w dF = 0,$$

а потому въ выраженіи (5) членъ  $3 \Sigma v^2 w dF$  обращается въ нуль.

Наконецъ, два послѣдніе члена выраженія (5) напишемъ такъ:

$$3 \Sigma v w^2 dF + \Sigma w^3 dF = \Sigma (3v - w) w^2 dF = \Sigma (2v + v') w^2 dF.$$

Эта величина существенно положительна, такъ какъ единственная величина, могущая быть отрицательной, — величина  $w$ , входитъ въ нее въ квадратъ. Такимъ образомъ, выраженіе (5) можетъ быть переписано такъ.

$$\Sigma v'^3 dF = Fv^3 + \Sigma (2v + v') w^2 dF.$$

А отсюда слѣдуетъ, что всегда

$$\Sigma v^3 dF > Fv^3,$$

т.-е. что въ дѣйствительности живая сила слоя больше, нежели живая сила того же слоя, движущагося со среднею скоростью. Поэтому можно положить

$$\Sigma v^3 dF = \alpha Fv^3 \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ  $\alpha$  есть коэффициентъ, болѣе единицы, зависящій отъ того, сколь велика разница между средней и истинною скоростями въ разныхъ точкахъ сѣченія. Обыкновенно  $w$  есть весьма малая часть  $v$ , для нѣкоторыхъ точекъ сѣченія обращающаяся даже въ нуль, такъ что коэффициентъ  $\alpha$  мало отличается отъ единицы. Въ одномъ изъ своихъ опытовъ Базенъ опредѣлялъ скорости въ разныхъ точкахъ сѣченія и нашелъ  $\alpha = 1,038$  (стѣнки очень гладкія); въ другомъ случаѣ онъ нашелъ  $\alpha = 1,122$  (стѣнки очень шероховатыя). Согласно съ этимъ иногда считаютъ  $\alpha = \frac{10}{9} = 1,111$ ; но этой цифрѣ нельзя придавать какого-нибудь положительнаго значенія, —  $\alpha$ , по существу, величина не постоянная для всѣхъ возможныхъ случаевъ и измѣняется въ зависимости отъ степени шероховатости стѣнокъ, отъ вида сѣченія трубы, отъ вида оси трубы (прямая или кривая), отъ свойствъ самой жидкости и т. д. Чаще считаютъ  $\alpha$  равнымъ единицѣ, что при очень гладкихъ стѣнкахъ ведетъ къ очень небольшимъ ошибкамъ, какъ это видно по приведеннымъ результатамъ опытовъ Базена.

Что касается количества движенія, то легко убѣдиться, что для слоя, движущагося со среднею скоростью, оно пропорціонально  $Fv^2$ , а при дѣйствительномъ движеніи оно пропорціонально:

$$\Sigma v^3 dF = \Sigma dF (v + w)^2 = Fv^3 + \Sigma w^2 dF,$$

т.-е. во второмъ случаѣ оно тоже больше, чѣмъ въ первомъ.

Часто отношеніе

$$\frac{\Sigma w^2 dF}{Fv^3} = \beta$$

считаютъ равнымъ нулю; но если коэффициентомъ  $\beta$  не пренебрегать, то, соотвѣтственно  $\alpha = \frac{10}{9}$ , его можно считать равнымъ:

$$\beta = \frac{\Sigma w^2 dF}{Fv^3} = 0,037.$$

Итакъ, истинная живая сила слоя по средней скорости можетъ быть выражена такъ:

$$\frac{7}{2g} Fv^3.$$



Относя это количество къ 1 *kgv*, т.-е. дѣля на  $\gamma Fv dt$ , получимъ  $\alpha \frac{v^2}{2g}$ , а потому уравненіе Д. Бернулли приметъ видъ:

$$\alpha \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \alpha \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad 4.$$

Истинное количество движенія по средней скорости можно выразить такъ:

$$\frac{\gamma dt}{g} Fv^2(1 + \beta),$$

или, относя къ 1 *kgv*, т.-е. дѣля на  $\gamma Fv dt$ :

$$\frac{v}{g}(1 + \beta).$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ считать

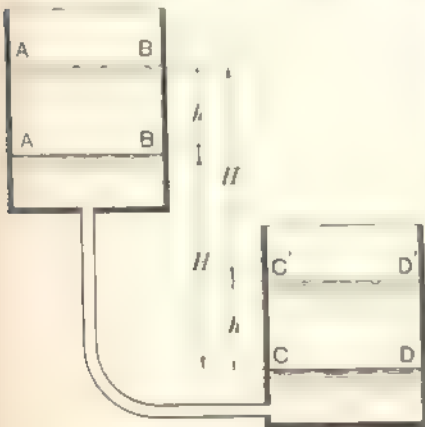
$$\alpha = 1, \beta = 0.$$

Что касается величины силъ вѣшняго и внутренняго тренія, то вотъ основанія, по которымъ имъ даютъ нижеприводимыя выраженія.

1) *Трение въ жидкостяхъ не зависитъ отъ давления.* Соединяють тру-  
 сою два сосуда (фиг. 121), въ которыхъ жидкость налита до уровней *AB* и  
*CD*, и замѣчаютъ количество воды *Q*, которое переливается изъ одного со-  
 суду въ другой въ 1 сек. Затѣмъ по-  
 вышаютъ уровни въ обоихъ сосудахъ на одинаковую высоту, такъ что вер-  
 тикальное равстояніе отъ *A'B'* до *C'D* остается то же самое *H*, что отъ *AB*  
 до *CD*. Оказывается, что въ 1 секунду переливается и тутъ то же самое ко-  
 личество *Q* воды, что и въ первомъ случаѣ, хотя давленіе въ трубѣ и измѣ-  
 нилось. А это показываетъ, что ско-  
 рость въ трубѣ не измѣнилась, а слѣ-  
 довательно, не измѣнилось и треніе.

2) *Трение внѣшнее.* Можно счи-  
 тать установленнымъ эмпирическимъ

фактомъ, что: *a*) эта сила находится въ прямой зависимости отъ величины  $\Delta$  поверхности соприкосновения жидкости со стѣнкой, такъ какъ твердая тѣнка является первоисточникомъ торможенія; *b*) зависитъ (тоже въ пря-  
 момъ отношеніи) отъ количества жидкихъ частицъ, соприкасающихся въ



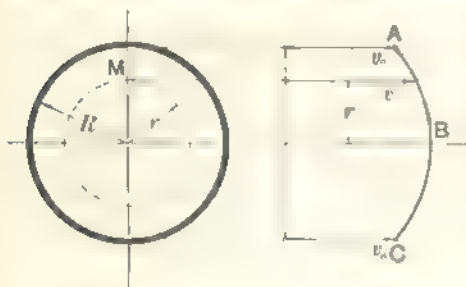
Фиг. 121.

единицу времени со стѣнкой, а потому ближайшимъ образомъ зависить отъ плотности жидкости  $\rho$  и отъ скорости на поверхности  $v_0$ ;  $c$ ) кромѣ того, независимо отъ числа частицъ, чѣмъ скорѣе частица идетъ по стѣнкѣ, тѣмъ больше должно на ней отражаться замедляющее дѣйствіе стѣнки, — слѣдовательно, сила тренія еще разъ зависить отъ скорости  $v_0$ .

Итакъ, если имѣемъ струю, сплошь наполняющую трубу съ площадью сѣченія  $F$ , периметромъ  $O$ , длиною  $ds$  и скоростью на поверхности  $v$ , то, считая зависимость прямой пропорциональностью, получимъ, что сила тренія можетъ быть выражена черезъ  $B \rho O ds v_0^2$ , гдѣ  $B$  есть коэффициентъ пропорциональности. Для удобства величину  $\rho$  замѣняютъ пропорциональной ей  $\gamma$ , тогда сила вѣшняго тренія выражается черезъ  $B \gamma O ds v_0^2$ . Относя ее къ единицѣ массы жидкости, заключенной въ объемъ струи, т.-е. дѣля ее на  $\rho F ds$ , получаемъ ускореніе этой силы тренія:

$$B \frac{\gamma}{\rho} \frac{O}{F} v_0^2 = Bg \frac{O}{F} v_0^2.$$

3) Что касается до *внутренняго тренія*, то естественно считать его прямо пропорциональнымъ относительной скорости отдельныхъ частицъ, — одной относительно другой. Величину этой относительной скорости можно получить такъ.



Фиг. 122.

Пусть имѣемъ круглую трубу радиуса  $R$  (фиг. 122). У стѣнки жидкость идетъ со скоростью  $v_0$ ; кака-нибудь частица  $M$  на разстояніи  $r$  отъ центра (а въ силу полной симметрии сѣченія допустимъ, что и всякая другая частица, лежащая на цилиндрѣ радиуса  $r$ ) имѣетъ скорость  $v'$ . Можно, вообще говоря, построить кривую  $ABC$  измѣненія скорости съ разстояніемъ отъ оси трубы.

Для двухъ частицъ одного и того же сѣченія, взятыхъ на разстояніяхъ  $r$  и  $(r + Jr)$  отъ оси, относительная ихъ скорость есть разность ихъ скоростей

$$(r' + Jr') - r' = Jr'.$$

И въ предѣлѣ, при  $Jr = 0$ , получимъ соотношеніе:

$$dv' = \frac{dv'}{dr} dr.$$

Это и есть относительная скорость въ точкѣ  $M$ ; слѣдовательно, сила внутренняго тренія прямо пропорциональна производной  $\frac{dv'}{dr}$ .

Это было бы справедливо, если бы все движение струи можно было уподобить движению бесконечно тонких цилиндровъ, входящихъ одинъ въ другой и перегоняющихъ другъ друга. Въ дѣйствительности же стѣнки неровны: ударившись о какую-нибудь такую неровность стѣнки, частица жидкости, какъ не безусловно неупругая, отражается отъ нея, ударяется о соседнія, отражается отъ нихъ и т. д. Кромѣ того, тангенціальная сила тренія возникаетъ на поверхности частицъ, а не въ ихъ центрахъ тяжести, отчего онѣ понуждаются къ вращенію. Вслѣдствіе этихъ причинъ жидкость внутри трубы приходитъ въ неправильное на первый взглядъ, вихревое движение: въ каждую точку, взятую внутри трубы, приходятъ разныя частицы, оживленныя скоростями, различными какъ по величинѣ, такъ и по направленію. Но не трудно себѣ представить, что, при установившемся характерѣ общаго поступательнаго движениа, эти измѣненія скорости частицъ, приходящихъ въ одну и ту же точку пространства, должны происходить въ нѣкоторой закономѣрной послѣдовательности, такъ какъ причины, вызывающія эти измѣненія, со временемъ не измѣняются; при этомъ послѣдовательность эта должна быть периодической, такъ что съ теченіемъ времени во всякой точкѣ повторяются всѣ тѣ явленія, которыя происходили въ ней раньше. Поэтому, вмѣсто мгновенной скорости, именуемой мѣсто въ данный моментъ въ данной точкѣ, можно разсматривать среднюю за весь періодъ скорость, или, какъ говоритъ Буссенэ, *ловестию среднюю скорость* (vitesse moyenne locale). Упомянутая выше скорость  $v'$  и есть такая мѣстная скорость для частицъ, взятыхъ на разстояніи  $r$  отъ центра.

Понятно, что вихревое движение получить тѣмъ большее развитіе, чѣмъ больше неровности стѣнки, или, вообще, чѣмъ сильнѣе стѣнка задерживаетъ воду, и, кромѣ того, чѣмъ съ большею скоростью  $v_0$  вода натекаетъ на эти шероховатости. Поэтому силу внутренняго тренія нужно поставить въ зависимость отъ нѣкотораго коэффициента, характеризующаго состояніе стѣнокъ и, кромѣ того, ее слѣдуетъ считать зависящей, скажемъ прямо пропорціонально, отъ скорости  $v_0$  у стѣнки.

Кромѣ того, эта сила должна зависѣть отъ разстоянія ( $R - r$ ) разсматриваемой точки  $M$  отъ поверхности стѣнки, чѣмъ это разстояніе больше, тѣмъ сильнѣе сказывается это вихревое движение, ибо тѣмъ меньшая масса (цилиндры меньшаго радіуса) принимаетъ въ немъ участіе, такъ что если  $R$  есть радіусъ трубы, а  $r$  — разстояніе отъ центра до разсматриваемой частицы  $M$ , для которой высчитывается сила внутренняго тренія, то ее можно считать пропорціональной  $\frac{R}{r}$ .

Наконецъ, чѣмъ больше площадь сѣченія струи по сравненію съ источникомъ потера, — ея периметромъ, тѣмъ дальше распространяется вихревое движение, тѣмъ больше живой силы уйдетъ на это движение, тѣмъ больше эта потеря, — или же можно сказать, — тѣмъ больше сила внутренняго тренія; т.-е. ее можно считать пропорціональною отношенію  $\frac{F}{O}$ .

Все это дастъ Буссенэ основаніе писать, что сила внутренняго

трения въ круглой цилиндрической трубѣ радиуса  $R$ , подсчитанная для цилиндрической поверхности радиуса  $r$ , можетъ быть выражена такъ:

$$egA \frac{\pi R^2}{2\pi R} \frac{R}{r} v_0 \frac{dv'}{dr},$$

гдѣ  $A$  есть коэффициентъ пропорциональности, зависящій отъ состоянія стѣнокъ и свойствъ жидкости.

Въ виду сложности выкладокъ съ двойнымъ трениемъ и въ виду удобства имѣть дѣло съ средней скоростью, а не съ неизвѣстной вообще скоростью  $v_0$  у стѣнки, въ гидравликѣ не различаютъ внѣшняго и внутренняго трения, а принимаютъ только *общее сопротивление трения*, при чемъ для него ставятъ такія положенія:

- 1) оно не зависитъ отъ давленія;
- 2) прямо пропорціонально поверхности соприкосновенія;
- 3) зависитъ отъ средней скорости, и
- 4) прямо пропорціонально вѣсу единицы объема жидкости (вѣрнѣе было бы, —плотности).

На основаніи этихъ законовъ трения жидкостей пишутъ, что сила трения  $R$  для струи, идущей по трубѣ длиною  $L$ , съ площадью сѣченія  $F$ , съ периметромъ сѣченія  $O$ , со средней скоростью  $v$ , есть:

$$R = \gamma O L f(v).$$

гдѣ въ функцію  $f(v)$  включенъ и коэффициентъ пропорциональности.

Работа этой силы въ единицу времени есть  $Rv$ ; а относя ее къ одному  $kgv$ , т.-е. дѣля на  $Fv\gamma$ , получаемъ то, что въ уравненіи Бернулли было отмѣчено членомъ  $\lambda$ , поскольку онъ зависитъ отъ трения; чтобы отмѣтить, что это есть работа трения, будемъ отмѣчать это подстрочнымъ указателемъ  $r$  (Reibung). Итакъ:

$$\eta_r = \frac{\gamma O L f(v) \cdot v}{\gamma F v} = \frac{O}{F} L f(v) \dots \dots \dots (7)$$

Отношение  $\frac{F}{O}$  называется *среднимъ гидравлическимъ радиусомъ сѣченія*.

Для круглой трубы онъ выражается черезъ:

$$\frac{F}{O} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}.$$

Для прямоугольной трубы со сторонами  $a$  и  $b$ :

$$\frac{F}{O} = \frac{ab}{2(a+b)}.$$

Величина  $\frac{O}{F} L$  есть абсолютное число, а  $v$ , по смыслу уравнения Д. Бернулли, должно быть выражено в линейных единицах, а потому множитель  $f(v)$  долженъ быть тоже линейнымъ. Удобно его представить такъ:

$$f(v) = \zeta \frac{v^2}{2g},$$

гдѣ  $\zeta$ , называется *коэффициентомъ общаго сопротивленія трѣнн*.

Итакъ, для круглой трубы потерянный напоръ отъ трѣнн есть:

$$\eta_r = \frac{O}{F} L f(v) = \frac{4L}{D} \zeta_r \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (8)$$

Задача опытныхъ изслѣдованій состоятъ въ опредѣленнн вида функціи  $f(v)$  или,—что все равно,—коэффициента  $\zeta_r$ .

На основаннн соображеній, подобныхъ тому, что было сказано выше о вѣшнемъ и внутреннемъ трѣнн, Prony пишетъ\*):

$$f(v) = a + bv^2,$$

такъ что, по Prony:

$$\zeta_r = 2g \frac{a}{v^2} + b$$

Первымъ членомъ снѣ характеризуетъ трѣнн внутреннее, а вторымъ—трѣнн вѣшнее. Коэффициенты  $a$  и  $b$  онъ даетъ постоянными для всякихъ круглыхъ трубъ, а именно:  $a = 0,000173$ ;  $b = 0,000348$ ; такъ что  $2ga = 0,000339$ ,  $2gb = 0,0068$ . Этой формулой пользуются иногда и до сихъ поръ.

Нѣкоторые авторы, желая облегчить вычисления, считаютъ  $a = 0$  и пишутъ

$$f(v) = b'v^2,$$

такъ что

$$\zeta_r = 2gb'.$$

Для этого обыкновенно даютъ для  $b'$  величину постоянную для всякихъ круглыхъ трубъ. Если считать, стало быть, съ состояниемъ стѣнокъ. Такъ поступалъ еще Шези (Chezy) въ 1775 году.

Saint-Venant (его формула мало употребительна) пишетъ уравненіе  $\eta$  такъ\*\*):

$$\eta = 0,0002956 \frac{4L}{D} v^2,$$

Большимъ распространеніемъ (у насъ въ Германіи и Англии) пользуется формула Вейсбаха, полученная имъ на основаннн большого числа

\*) См. De Prony Recherches physico-mathématiques sur la théorie du mouvement des eaux courantes. Paris, 1804.

\*\*\*) См. его работу въ Annales des mines, 4 e série, tome XX, p. 185. Также отдѣльною книгой—Formules et tables nouvelles etc. Paris, 1851.

опытовъ, чѣмъ сколькими пользовались авторы вышеприведенныхъ формулъ \*) По Вейсбаху, пересчитавшему результаты 52 наблюдений Couplet, Bossut, Dubuat, Gueymard и 11 своихъ собственныхъ, нужно считать

$$f(v) = \left( \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}} \right) \frac{v^3}{2g},$$

гдѣ  $\alpha = 0,0036$ ,  $\beta = 0,0023678$ ; такъ что въ ур-іе (8) нужно вносить выражение:

$$\zeta_r = 0,0036 + \frac{0,0023678}{\sqrt{v}} \dots \dots \dots (9)$$

Какъ видно, самый коэффициентъ сопротивленія измѣняется для разныхъ среднихъ скоростей (съ увеличеніемъ скорости уменьшается). Для удобства Вейсбахомъ составлена нижеслѣдующая таблица значений  $\zeta_r$  для разныхъ  $v$ :

Таблица 28\*\*).

Значенія коэффициента  $\zeta_r$  въ формулѣ  $\eta_r = \zeta_r \frac{L}{D} \frac{v^3}{2g}$  (по Вейсбаху).

v въ mtr./sec	Десятая доля метра.									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	--	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
1	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213
2	0,0211	0,0209	0,0208	0,0206	0,0205	0,0204	0,0203	0,0202	0,0201	0,0200
3	0,0199	0,0198	0,0197	0,0196	0,0195	0,0195	0,0194	0,0193	0,0193	0,0192
4	0,0191	0,0191	0,0190	0,0190	0,0189	0,0189	0,0188	0,0188	0,0187	0,0187

\*) См. J. Weisbach: Die Experimental-Hydraulik. Freiberg, 1855; стр. 96. Еще раньше эти результаты были опубликованы въ I томъ его извѣстнаго, многократно переизданнаго, сочиненія—Die Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. I-е изданіе появилось въ 1845 году въ Braunschweig'ѣ. Очень удобно для пользования обработана формула Вейсбаха въ книгѣ F. Schottlander: Ueber Wasserkraft und Wasserversorgungsanlagen. München, 1906. См. таблицы на стр. 178—181.

\*\*) При пользованіи этой таблицей необходимо имѣть въ виду, что потерянный на треніе напоръ Вейсбахъ выражалъ такъ:

$$\eta_r = \zeta_r \frac{L}{D} \frac{v^3}{2g},$$

т.-е. множитель 4, явно выступающій въ уравненіи (8), у него заключенъ въ самомъ коэффициентѣ  $\zeta_r$ . Таблица Вейсбаха даетъ именно значенія  $\zeta_r$ , такъ что, если пользоваться нашимъ уравненіемъ (8), то необходимо табличные значенія дѣлать на 4.

Наиболѣе употребительна у насъ и во Франціи формула Дарси, полученная имъ на основаніи обширныхъ, очень тщательныхъ наблюденій на водопроводѣ въ Chaillot, близъ Парижа. Трубы были отъ 0,0122 *mtr* до 0,5 *mtr* въ діаметрѣ, притомъ изъ разныхъ матеріаловъ; скорость измѣнялась отъ 0,16 до 5 *mtr* въ секунду.

На основаніи своихъ опытовъ Дарси пришелъ къ заключенію, что матеріалъ трубъ (у него были чугуныя, свинцовыя, стеклянныя и асфальтированныя трубы) почти не оказываетъ вліянія на величину тренія. Зато очень важна степень чистоты трубы: новыя или только что вычищенныя трубы даютъ вдвое меньшее треніе, нежели трубы загрязненныя, покрытыя осадками. Кромѣ того, треніе, по Дарси, измѣняется съ радиусомъ трубы. Называя діаметръ трубы черезъ *D*, ея радиусъ (геометрическій, а не средний гидравлическій) *R*, длину *L*, среднюю скорость *v* и потерю напора на треніе черезъ  $\eta_r$ , Дарси пишетъ \*)

$$Ri = b_1 v^2,$$

гдѣ *i* есть потеря на треніе на каждую единицу длины трубы, т.-е.

$$i = \frac{\eta_r}{L},$$

Поэтому выраженіе Дарси можно переписать такъ:

$$R \frac{\eta_r}{L} = 2gb_1 \frac{v^2}{2g}$$

или

$$\eta_r = 2gb_1 \frac{L}{R} \frac{v^2}{2g}.$$

Наконецъ, приведя эти выраженія къ виду уравненія (8) и имѣя въ виду, что  $R = \frac{D}{2}$ , получимъ по Дарси:

$$\eta_r = 2g \frac{b_1}{2} \frac{4L}{D} \frac{v^2}{2g}.$$

Слѣдовательно, нашъ коэффициентъ сопротивленія  $\zeta_r$  по Дарси выразится такъ:

$$\zeta_r = 2g \frac{b_1}{2}.$$

Для новыхъ (или только что вычищенныхъ) чугунныхъ трубъ Дарси даетъ:

$$b_1 = 0,000507 - \frac{0,00000647}{R} = 0,000507 - \frac{0,00001294}{D}.$$

\*) См. Henri Darcy: Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux. Paris, 1855; p. 90 et 228. Первое изданіе вышло въ 1856 году.

Слѣдовательно, для *новыхъ* трубъ:

$$\zeta_r = 0,00497 + \frac{0,0001268}{D} \dots \dots \dots (10)$$

Для старыхъ чугунныхъ трубъ Дарси совѣтуетъ удвоить коэффициентъ  $b_1$ , а слѣдовательно, и  $\zeta_r$ . Итакъ, для *старыхъ* трубъ:

$$\zeta_r = 0,00994 + \frac{0,000254}{D} \dots \dots \dots (11)$$

Такъ какъ очистка трубъ рѣдко производится регулярно, то лучше пользоваться послѣднимъ выраженіемъ. Для старыхъ трубъ средняго размѣра съ  $D$  около 0,11 *mtr* (4—5 дюймовъ) можно пользоваться болѣе простымъ выраженіемъ Бресса:

$$\zeta_r = 0,01 \frac{4L}{D} \frac{v^3}{2g}$$

Если трубы чугунныя асфальтированныя и поддерживаются всегда чистыми, то числовое значеніе коэффициента  $\zeta_r$ , опредѣленное, какъ для новыхъ трубъ, слѣдуетъ уменьшить еще на 30%.

Формулы Дарси хороши только при скоростяхъ не меньше 0,2 *mtr/sec*; при меньшихъ скоростяхъ онѣ даютъ слишкомъ малыя потери напора. Равнымъ образомъ онѣ справедливы для діаметровъ не болѣе 0,5 *mtr*, хотя наиримѣръ, Брессъ распространяетъ ихъ на диаметры и до 1,2 *mtr*. Наконецъ, опыты *Ибена* \*) на гамбургскомъ водопроводѣ позволяютъ послѣднему утверждать, что при малыхъ діаметрахъ, меньше 0,15 *mtr*, дѣйствительная потеря напора нѣсколько больше, нежели вычисляемая по формулѣ Дарси, хотя въ общемъ эти опыты только подтвердили пригодность этой формулы.

До послѣдняго времени не оставлены попытки изысканія болѣе общей или болѣе точно согласующейся съ опытами формулы. Изъ работъ, полагающихъ зависимость коэффициента сопротивленія только отъ размѣровъ трубы, упомянемъ двѣ слѣдующія.

*Кристианъ* \*\*) опредѣляетъ среднюю скорость изъ уравненія

$$v = m \sqrt{\frac{D}{2L}} \sqrt{\frac{8}{2} D}$$

Отсюда потерянный напоръ опредѣляется такъ:

$$\zeta_r = \frac{y \sqrt{2}}{m^2 \sqrt{D}} \frac{4L}{D} \frac{v^3}{2g}$$

\*) См. *Iben*: Druckhöhenverlust in geschlossenen eisernen Rohrleitungen. Hamburg, 1880.

\*\*) См. *T. Christen*: Das Gesetz der Translation des Wassers etc. Leipzig, 1903, стр. 140 и 149. Полезно сравнить уравненіе Кристиана съ ниже приведеннымъ уравненіемъ (13).



Сравнивая это выражение съ уравненіемъ (5) находимъ, что Кристенъ даетъ для коэффициента сопротивленія зависимость:

$$\zeta = \frac{1}{m} \sqrt[4]{D}.$$

Вносимъ сюда, какъ предлагаетъ Кристенъ, для трубъ изъ строганныхъ досокъ, для свѣже асфальтированныхъ трубъ и т. п. степени шероховатости, значение  $m = 50$ , тогда получимъ:

$$\zeta_r = \frac{0,00467}{\sqrt[4]{D}}.$$

Для большихъ диаметровъ, — свыше 1 *mtv*, — эта формула даетъ, повидимому, сильно пониженные потери напора.

Наконецъ, совсѣмъ недавно проф. Зонне \*) предложилъ опредѣлять коэффициентъ сопротивленія изъ формулы:

$$\zeta_r = 0,00427 + \frac{0,00059 \sqrt{D} + 0,00015}{D}$$

Если въ уравненіи (5) вычислять потерю на 100 *mtv* длины трубы и соединить всѣ постоянные множители и коэффициенты сопротивленія въ одну букву, то можно писать:

$$\eta_{100} = \mu \frac{v^2}{D},$$

при чемъ по Зонне

$$\mu = \frac{200 \zeta_r}{g} = 0,087 + \frac{0,012 \sqrt{D} + 0,003}{D}.$$

Однако, совершенно неправильно считать, что  $\zeta_r$  не измѣняется со скоростью; всѣ наблюденія, произведенныя до Дарси, затѣмъ его собственныя и всѣ позднѣйшія показали, что въ одной и той же трубѣ при разныхъ скоростяхъ коэффициентъ  $\zeta_r$  измѣняется, — увеличивается съ уменьшеніемъ скорости. Правда, на практикѣ скорости въ трубахъ въ широкихъ размѣрахъ не измѣняются. Тѣмъ не менѣе формула Дарси не вполне справедлива, равно какъ несправедлива и формула Вейсбаха. Это указываетъ, что въ уравненіи (7) неправильно считать величину  $f(v)$  пропорциональной второй степени отъ  $v$ : за  $\zeta_r$  сохраняется еще нѣкоторая зависимость отъ  $v$ . Кроме того, зависимость  $\zeta_r$  отъ  $D$  указываетъ также на то, что въ уравненіи (8) потеря напора  $\eta_r$  не просто обратно пропорциональна первой степени  $D$ .

На основаніи этихъ соображеній еще *дѣтальвейль* въ началѣ прошлаго столѣтія предлагалъ считать  $\eta_r$  пропорциональнымъ кубическимъ степенямъ  $D$  и  $v$ ; того же взгляда держался *Saint-Venant*, что видно изъ его вышеприведенной формулы; познѣе профессоръ *Lampe* \*\*), проф. *Уинн* и другіе предлагали подобную же зависимость. Такъ по *Lampe*:

$$\eta_r = 0,0007555 L \frac{v^{1,802}}{D^{1,25}}$$

\*) См. Ed. Sonne: Grundlagen für die Berechnung der Wasserleitungen. Zeit. des Ver. deutscher Ingenieure, 1907, стр. 1615.

\*\*\*) См. Civilingenieur, 1873, Untersuchungen über die Bewegung des Wassers in Röhren, S. 82.

Числовой коэффициент 0,0007555 данъ для гладкихъ (чистыхъ) трубъ и измѣняется только со степенью шероховатости. По Unwin'у:

$$\eta = aL \frac{v'}{D^3 n}$$

Числовой коэффициентъ  $a$  измѣняется въ зависимости отъ степени шероховатости и отъ температуры \*), а показатель  $n$  зависитъ только отъ степени шероховатости и для чугунныхъ трубъ измѣняется отъ 1,79 до 2.

Наковецъ, *Flamant* \*\*) даетъ формулу:

$$\eta_v = aL \frac{v^{1.75}}{D^{1.25}}$$

Эта формула получается изъ формулы Unwin'a, если считать въ этой послѣдней  $n = 1,75$ ; она очень мало отличается также отъ формулы Lampre, гдѣ показатель степени при  $v$  есть 1,802 вмѣсто 1,75. Коэффициентъ  $a$  зависитъ только отъ степени шероховатости. *Flamant* отбѣиваетъ  $a = 0,00092$  для не особенно сильно загрязненныхъ трубъ (загрязнение только измѣнило состояніе стѣнокъ, а не дошло еще до замѣтнаго уменьшения сѣченія трубы).

Къ этой категоріи экспериментальныхъ данныхъ относятся очень интересныя и своеобразныя изслѣдованія профессора *Osborne Reynolds*'а \*\*\*)). Однако, прежде чѣмъ останавливаться на этихъ данныхъ, необходимо упомянуть о работахъ врача *Poiseuille*'я \*\*\*\*), имѣющихъ большое научное значеніе. Изслѣдуя явленія кровообращенія, Пуазейль занялся вопросомъ о движеніи жидкости по капиллярнымъ трубкамъ, — въ частности, дистиллированной воды, — при чемъ изучилъ экспериментально, какъ измѣняется расходъ вмѣстѣ съ напоромъ, длиною трубки, ея диаметромъ и температурой. Въ его опытахъ напоры доходили до 8 атмосферъ, диаметры измѣнялись отъ 0,03 до 0,14 *mm*, температуры колебались отъ 0 до 45° С.; длины трубокъ были абсолютно не велики, — обыкновенно 100 *mm* и меньше. Его наблюденія хорошо передаются слѣдующей формулой, данной имъ самимъ:

$$Q = 1836,724 \left[ 1 - 0,0337 t + 0,000221 t^2 \right] \frac{h d^4}{l}$$

\*) Вліяніе температуры предусматривается также формулами Hagen'a и Poiseuille. См. *Gashof Theoretische Maschinenlehre*, 1875, Bd. 1, S. 484.

\*\* См. его книгу: *Hydraulique*, Paris, 1891 г., стр. 150 и слѣдующія. Числовыя таблицы V, VI и VII, приложенныя въ концѣ этой книги, очень облегчаютъ пользованіе формулой Фламана.

\*\*\*, Оригинальная работа Рейнольдса помѣщена въ *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* за 1883 годъ подъ заглавіемъ: *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous*. См. также вышеупомянутую работу Крестена, стр. 23 и слѣд. Здѣсь цитируемъ по *Blaine: Hydraulic Machinery*, London, 1897, стр. 43—46; также по *H. Robinson: Hydraulic Power and Hydraulic Machinery*, London, 1904, стр. 15—27.

\*\*\*\*) См. *Comptes rendus*, томъ XI июль—декабрь 1840 г., стр. 961 и 1041, и томъ XII (январь—июль 1841 г.), стр. 112, мемуаръ Пуазейля подъ заглавіемъ: *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres*. Въ указываемыхъ здѣсь мемуарахъ даны отчеты наблюденій съ дистиллированной водой. Въ позднѣйшихъ работахъ, помѣщенныхъ тоже въ *Comptes rendus*, Пуазейль изучилъ и въ некоторыя другія жидкости.

Здѣсь  $Q$  даетъ расходъ въ 1 секунду въ миллиграммахъ, т.-е. въ кубич. миллиметрахъ,  $t$ —температура въ градусахъ Цельсія,  $d$  и  $l$ —діаметръ и длина трубки въ миллиметрахъ,  $h$ —напоръ, выраженный въ миллиметрахъ ртутнаго столба. Переходя къ измѣренію потеряннаго напора высотой водяного столба и выражая расходъ по скорости  $v$  (*mm sec*) и площади сѣченія, получимъ:

$$h = \frac{k}{P} \frac{l}{d^2} v.$$

гдѣ

$$k = 0,005813,$$

$$P = 1 + 0,0337 t + 0,000221 t^2.$$

Отсюда видно, что въ волосныхъ трубкахъ потеря напора пропорціональна первой степени скорости и обратно пропорціональна второй степени діаметра, въ противоположность тому, что дается уравненіемъ (8). Въ инженерной практикѣ этимъ закономъ Пуазейля приходится пользоваться при разсмотрѣніи явленія движенія подпочвенныхъ водъ, явленія фильтраціи и т. п.

Возвращаемся къ опытамъ Рейнольдса. Онъ приставлялъ къ сосуду стеклянную трубу съ хорошо скругленными кромками, чтобы избѣжать сжатія при входѣ; вмѣстѣ съ вытекающею водою онъ впускалъ въ трубу помощью пипетки тонкую струйку, подкрашенную авилиновою краскою. Оказалось, что при малыхъ скоростяхъ эта подкрашенная струйка была отчетливо видна по всей длинѣ трубки: она не смѣшивалась съ остальными струями, отчего можно думать, что при этихъ скоростяхъ жидкость движется по трубѣ параллельными струйками (*direct motion*), болѣе или менѣе напоминая движеніе цилиндровъ одного въ другомъ. Но, начиная съ нѣкоторой скорости, которую Рейнольдсъ называетъ критической, уже вблизи входа подкрашенная струйка размывается на все сѣченіе трубы. Освѣщая трубу электрической искрой, Рейнольдсъ ясно видѣлъ вихри этой окрашенной струйки; это послѣднее обстоятельство, подтверждая точку зрѣнія, отмѣченную выше, когда мы говорили о внутреннемъ треніи, заставляетъ утверждать, что въ обычныхъ случаяхъ движеніе воды въ прямой трубѣ можетъ быть названо прямолинейнымъ только въ смыслѣ общаго поступательнаго переноса всей массы жидкости; движенія же отдѣльных частицъ очень далеки отъ прямолинейности съ постоянной скоростью: послѣдняя должна мѣняться по крайней мѣрѣ по направленію. Величина критической скорости зависитъ отъ температуры жидкости (съ повышеніемъ температуры уменьшается) и отъ діаметра трубы: она тѣмъ ниже, чѣмъ больше діаметръ. Это послѣднее обстоятельство косвенно подтверждаетъ наши соображенія о величинѣ внутренняго тренія, мы приняли его пропорціональнымъ діаметру; по Рейнольдсу внутреннее треніе появляется тѣмъ раньше, чѣмъ больше діаметръ. Свои наблюденія Рейнольдсъ передаетъ уравненіемъ.

$$h_r = \frac{B^* P^{2-n}}{A} \cdot \frac{L}{D^{3-n}} v^n \dots \dots \dots (12)$$

Здѣсь  $L$ ,  $D$  и  $v$  суть соответственно длина и диаметр трубы и скорость (средняя) теченія. Показатель степени  $n$  мѣняется для скоростей меньшихъ и большихъ, нежели критическая, а также зависитъ отъ степени шероховатости. Коэффициенты  $A$  и  $B$ —постоянные числа;  $P$ —функция температуры, установленная опытами Пуазейля. Если всѣ величины выражены въ  $mtr$ , то

$$A = 67,7 \cdot 10^6 = 67700000; \quad B = 396; \quad P = \frac{1}{1 + 0,0336t + 0,000221t^2}$$

гдѣ  $t$  есть температура въ градусахъ Цельсия.

Если скорость  $v$  меньше критической ( $v_c$ ), то показатель  $n = 1$ , и тогда: потеря напора пропорциональна первой степени скорости, зависитъ отъ температуры (уменьшается съ ея возрастаніемъ), и сильно зависитъ отъ диаметра трубы. Такимъ образомъ, для скоростей меньшихъ, нежели критическая, Рейнольдсъ нашелъ въ трубахъ обыкновенныхъ размѣровъ тотъ же законъ Пуазейля, который установленъ для трубокъ волосныхъ.

Если же средняя скорость въ трубѣ больше критической, то, по Рейнольдсу, въ ур-ніи (12) нужно считать показатель  $n$  зависящимъ отъ степени шероховатости:

- въ наиболѣе гладкихъ трубахъ . . . . .  $n = 1,7$ ,
- въ чистыхъ свинцовыхъ трубахъ . . . . .  $n = 1,722$ ,
- въ загрязненныхъ трубахъ . . . . .  $n = 2$ .

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ уравнение Рейнольдса получаетъ видъ:

$$\eta_r = \frac{B^2 L}{A D} v^2,$$

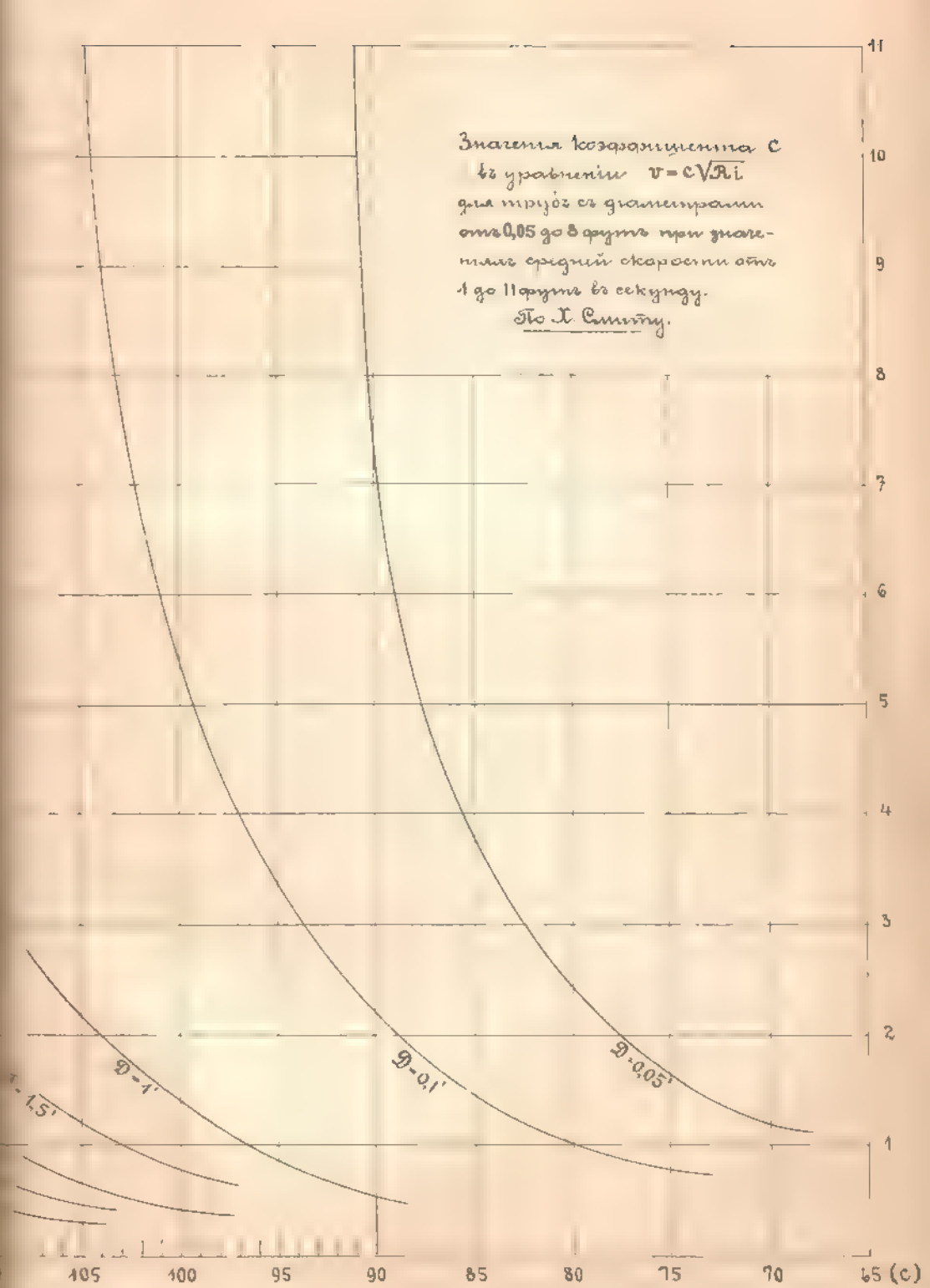
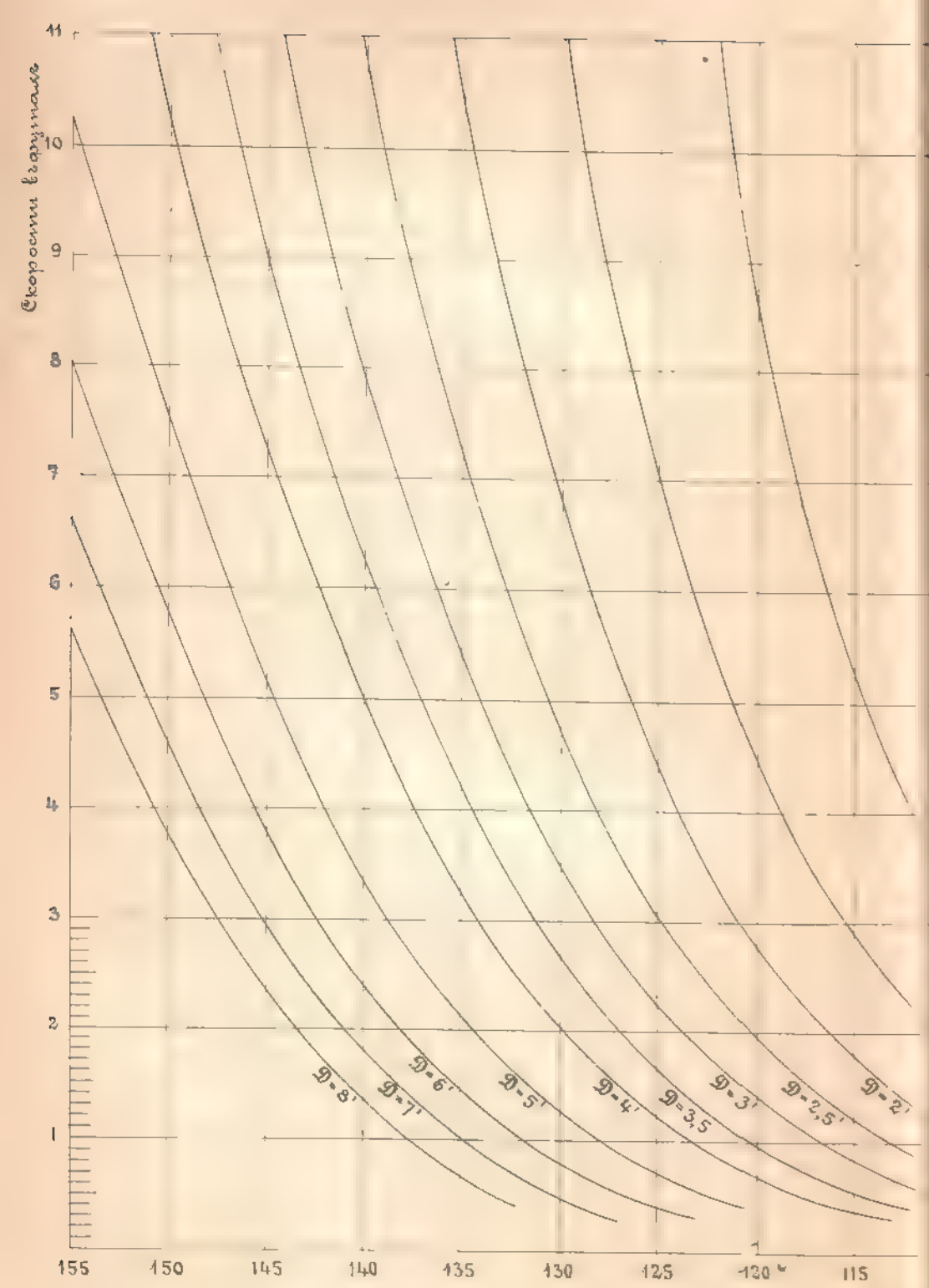
т.е. совершенно аналогично нашему ур-нію (8); такимъ образомъ, Рейнольдсъ не признаетъ въ грязныхъ трубахъ зависимости коэф-та сопротивленія ни отъ скорости (Вейсбахъ), ни отъ диаметра (Дарси); зависимость отъ температуры также исчезаетъ.

Что касается до величины критической скорости  $v_c$ , то Рейнольдсъ опредѣляетъ ее такъ:

$$v_c = \frac{1}{278} \frac{P}{D}.$$

Это вообще очень маленькая величина; такъ, если  $t = 20^\circ$ , а  $D = 0,1 mtr$ , то  $P = \frac{1}{1,7604}$  и  $v_c = 0,0204 mtr/sec$ . Такимъ образомъ, вообще приходится имѣть дѣло съ показателемъ  $n$  отъ 1,7 до 2. Если предположить очень загрязненную трубу ( $n = 2$ ) и скорость  $v > v_c$ , то при вышеприведенныхъ значеніяхъ  $A$  и  $B$  получимъ:

$$\eta_r = 0,0023 \frac{L}{D} v^2 = 0,01375 \frac{4L}{D} \frac{v^2}{2g}.$$



Значения критического тока  $I_c$  в уравнении  $v = c\sqrt{Ri}$  для проводов из сплава алюминия с 0,05% олова при температуре окружающей среды от 1 до 11 градусов Цельсия.  
 По Т. Сундбю.

Такая величина  $\zeta$ , соответствовала бы по Дарси [ур-е (11)] старой трубе в 67 мм диаметром и значительно превосходить коэф-ть Бресса.

Некоторые новейшие авторы предпочитают все-таки сохранять форму ур-я (8), как более простую, сопровождая ее таблицами значений коэф-та  $\zeta$  для разных диаметров, скоростей и степеней шероховатости вполнѣ основательно замѣчая, что пользова-ние формулами, подобными формулѣ Lamre или Flamant, практически возможно только при помощи таблиц. Къ такимъ авторамъ относятся Hamilton Smith, Fanning \*) и другіе.

Первый пишетъ:

$$c = c \sqrt{\frac{D}{L} \frac{v}{L}} \dots \dots \dots (18) **$$

что непосредственно даетъ ур-е (8), если положить

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\zeta}}$$

Значения коэф-та  $c$  выбраны имъ послѣ того, какъ онъ представилъ графически результаты всѣхъ наиболее достоверныхъ и точныхъ данныхъ, начиная съ Couplet и кончая многочисленными своими. Откладывая по оси абсциссы скорости (въ футахъ), а по оси ординатъ значения  $c$ , онъ получилъ рядъ точекъ. Соединяя тѣ изъ нихъ, которыя соответствуютъ одному и тому же диаметру трубы, онъ получилъ рядъ кривыхъ дающихъ для разныхъ  $D$  измѣненія  $c$  вмѣстѣ съ  $v$ . На таб. V представлено это графикъ съ указаниемъ масштаба, при чемъ  $D$  измѣняется отъ 0,05 фута до 8 футовъ. Этотъ графикъ относится къ круглымъ, слабо загрязненнымъ трубамъ не имѣющимъ кру-тыхъ перегибовъ (почти прямымъ). Нижеслѣдующая таблица 29 даетъ значения  $c$  въ формулѣ (13) при тѣхъ же ограничивающихъ условіяхъ. Всѣ величины выражены въ футахъ.

Fanning сохраняетъ вполнѣ видъ ур-я (8) и даетъ значения коэф-та  $\zeta$ , (онъ обозна-чаетъ его буквой  $m$ ) для диаметровъ, измѣняющихся отъ  $\frac{1}{2}$ " до 96" (отъ 12 mm до 2,42 mtr) и для скоростей отъ 0,1' въ секунду (305 mm/sec) до 29'16,1 mtr/sec. Эту обширную таблицу мы въ названномъ выше сочиненіи Фаннинга на стр. 242—246. Тамъ же на стр. 259—263 приведена таблица значений  $c$  для разныхъ  $D$  и разныхъ отношеній  $v/L$ . Наконецъ, на стр. 268—269 дана таблица значений коэф-товъ  $c$  въ ур-и (13). Отмѣтимъ, что числа этихъ таблицъ даютъ значения  $\zeta$  и  $c$  для чистыхъ трубъ; для слабо загрязненныхъ и совсемъ стирныхъ трубъ онъ совѣтуетъ брать большія значения  $\zeta$ , смотря по диаметру: чѣмъ больше диаметръ, тѣмъ меньше разница въ коэф-тахъ (см. тамъ же стр. 248 и 269). Ниже мы приведемъ таблицу въ болѣе удобной для пользованія формѣ, вычисленную нами на основаніи данныхъ Фаннинга.

Наконецъ укажемъ формулу, предложенную проф. Ф. Максименко:

$$c = \sqrt{ak \left[ \frac{1}{4} \frac{v}{R} + \frac{1}{b} (k-3)^2 \right]} \sqrt{\frac{R^2}{L}}$$

гдѣ  $R$  есть средній гидравлическій радиусъ трубы; величины выражены въ футахъ и тогда коэффициенты:  $a = 0,0004$ ,  $b = 0,35$ . Коэффициентъ шероховатости  $k = 1$  для новыхъ и фальсированныхъ трубъ. Для большихъ трубъ (3' и больше) и малыхъ скоростей (меньше 11') это ур-е даетъ нѣсколько пониженные значения скорости.

\*) См. „Hydraulics“ by Hamilton Smith, London (New-York, 1886), p. 271. Также „A practical treatise of hydraulic and water supply engineering“ by S. T. Fanning, New-York, 1902, pages 242—246, 268—268 d, 495—497, 528 и 529.

\*\*) Въ слѣдующей главѣ мы встрѣтимся съ совершенно аналогичной формулой, известной подъ названіемъ формулы Шези.

Таблица 29

значеній  $c$  въ формулѣ (13) (по Hamilton Smith'y).

Скорости $v$ фут/сек	При диаметрахъ въ футахъ.												
	0,05	0,10	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7	8
1	—	80,0	96,1	102,8	108,8	112,7	116,7	120,2	123,0	127,8	131,8	134,8	137,5
2	77,8	88,0	104,0	110,9	116,2	120,3	123,8	127,0	129,9	134,3	138,0	141,0	143,3
3	82,4	93,7	108,7	115,6	120,8	124,8	128,3	131,4	134,2	138,6	142,3	145,1	147,6
4	85,6	97,0	112,0	118,9	124,0	128,1	131,5	134,6	137,4	141,9	145,5	148,6	151,0
5	87,6	99,3	114,4	121,3	126,5	130,6	134,1	137,1	140,0	144,7	148,1	151,2	153,6
6	89,1	101,0	116,3	123,2	128,6	132,6	136,3	139,4	142,3	146,0	150,5	153,5	—
7	90,0	102,4	118,0	125,0	130,4	134,6	138,2	141,5	144,5	149,0	152,7	—	—
8	90,6	103,3	119,3	126,4	132,0	136,3	140,0	143,3	146,3	151,0	154,9	—	—
9	90,7	104,0	120,4	127,7	133,3	137,7	141,6	145,0	148,1	152,8	156,7	—	—
10	90,8	104,5	121,4	128,8	134,5	139,0	142,9	146,4	149,7	154,6	—	—	—
11	90,9	104,7	122,0	129,7	135,6	140,2	144,2	147,7	151,0	—	—	—	—
12	91,0	104,8	122,5	130,4	136,4	141,1	145,2	148,8	152,2	—	—	—	—
13	91,0	105,0	122,9	131,0	137,1	141,9	146,1	149,8	153,2	—	—	—	—
14	91,0	105,0	123,2	131,5	137,6	142,5	146,7	150,5	154,0	—	—	—	—
15	91,0	105,0	123,6	131,8	138,0	142,9	147,2	151,1	154,6	—	—	—	—

Необходимо уяснить себѣ, что слѣдуетъ понимать подь терминомъ «загрязненіе трубы». Какъ данныя Дарси, такъ и данныя Фаннинга имѣютъ въ виду осадки, покрывающіе стѣнки трубы, но отнюдь не въ такой степени, чтобы вызвать уменьшеніе свободнаго сѣченія трубы; если осадковъ такъ много, что они загромождаютъ трубу, и если въ то же время черезъ такую суженную трубу прогоняется одно и то же количество воды, то потеря напора въ этомъ случаѣ отличается отъ потери въ чистой трубѣ не только и даже не столько изъ-за измѣненія  $\xi$ , сколько изъ-за увеличенія скорости. Такъ, напримѣръ, въ чистой трубѣ при  $D = 0,1$  *mtr* и  $Q = 0,007854$  *mtr*<sup>3</sup>/*sec*, т.-е. при  $v = 1$  *mtr sec*, по Дарси, на каждыя 1000 *mtr* длины теряется на треніе напоръ:

$$h' = \left( 0,00497 + \frac{0,0001268}{0,1} \right) \frac{4 \cdot 1000}{0,1} \cdot \frac{1}{2g} = 12,78 \text{ mtr.}$$

Въ грязныхъ трубахъ, но безъ уменьшенія діаметра, она, по Дарси, вдвое больше, т. е.

$$\eta_r'' = 25,46 \text{ mtr.}$$

Наконецъ, если предположить, что осадки достигли толщины въ 5 *mm*, то окажется:  $D = 0,09 \text{ mtr}$ ,  $v = 1,235 \text{ mtr, sec}$  и, соответственно этому:

$$\eta_r''' = \left( 0,00994 + \frac{0,000254}{0,09} \right) \frac{4 \cdot 1000}{0,09} \cdot \frac{1,235^2}{2g} = 43,5 \text{ mtr} = 1,71 \eta_r'' = 3,42 \eta_r'.$$

Подобнымъ же образомъ, если предположить, что осадки достигли толщины въ 10 *mm*, то получимъ

$$\eta_r^{IV} \sim 81 \text{ mtr} \sim 3,2 \eta_r'' = 6,4 \eta_r'.$$

Отсюда видно, насколько опасно допускать большое загрязненіе трубъ; не говори о томъ, что при этомъ сильно возрастаетъ стоимость перекачки, самыя трубы могутъ оказаться непрочными и будутъ лопаться: въ нашемъ примѣрѣ въ первомъ случаѣ давленіе въ ихъ началѣ только нѣсколько превосходитъ 1 атмосферу, тогда какъ въ послѣднемъ оно достигаетъ почти 8 атмосферъ на каждый километръ длины трубы.

Всѣ приведенныя экспериментальныя данныя относятся къ водѣ и получены почти исключительно изъ наблюдений надъ городскими водопроводами. Для другихъ жидкостей, которыя въ практикѣ раздаютъ по трубамъ, напр., нефть, керосинъ и т. п., приведемъ слѣдующія данныя \*).

Обозначаемъ черезъ  $Q'$  минутный расходъ жидкости въ куб. фут., черезъ  $d_1$  діаметръ трубы въ дюймахъ, черезъ  $h$  напоръ, затраченный на трение (наше  $\eta_r$ ) въ футахъ и черезъ  $l$  длину трубы въ футахъ. Умноживъ обѣ части ур-ня (13) на выраженіе площади сѣченія трубы, получимъ конечно, выраженіе секунднаго расхода. Переходя отъ метрической системы къ футамъ и отъ секунднаго расхода къ минутному и собирая въ одну букву  $m$  всѣ числовыя коэф-ты, получимъ:

$$Q' = m \sqrt{d_1^5 \over l} \dots \dots \dots (14)$$

гдѣ по Шухову для керосина уд. вѣса 0.820 нужно считать . . . . .  $m = 5$   
 „ „ „ „ нефти уд. вѣса отъ 0.867 до 0.871 . . . . .  $m = 4$ .

Для нефтяныхъ остатковъ  $m$  рѣзко измѣняется съ ихъ температурой. Въ предѣлахъ отъ  $3^\circ$  до  $+50^\circ$  С. Шуховъ предлагаетъ зависимость:

$$m = 0,6 + 0,06 t.$$

Тутъ  $t$  выражено въ градусахъ Цельсія и считается отрицательнымъ, если температура ниже нуля.

\*) Заимствуемъ ихъ изъ работы инж-механика В. Г. Шухова — „Трубопроводы и ихъ примѣненіе къ нефтяной промышленности“ Москва, 1895 г., изданіе Политехническаго О-ва



Перепишем уравнение (14) для секундного расхода  $Q = \frac{Q'}{60}$  и для диаметра  $d$ , выраженного в футах ( $d_1 = 12 d$ ); получаем:

$$Q = \frac{\pi}{60} \cdot 12^3 \sqrt{\frac{d^3 h}{l}} = \frac{\pi}{60} \cdot 12^3 \cdot 12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{dh}{l}}$$

Отсюда:

$$\frac{Q}{\pi d^{2.5}} = v \cdot \frac{\pi \cdot 12^3 \cdot 12 \cdot 1}{\pi \cdot 60} \sqrt{\frac{dh}{l}}$$

Возводя в квадрат и деля обе части уравнения на  $2g$ , получим:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{12^5 \cdot 16 \text{ m}^2}{\pi^2 \cdot 3600 \cdot 2g} \cdot \frac{dh}{4l} \cdot 4 = \frac{12^4 \cdot 64 \text{ m}^2}{\pi^2 \cdot 300 \cdot 2g} \cdot \frac{dh}{4l}$$

Отсюда, наконец,

$$h = \zeta_r \cdot \frac{4l}{d} = \frac{\pi^2 \cdot 300 \cdot 2g}{12^4 \cdot 64 \text{ m}^2} \cdot r^2$$

Сравнивая это выражение с уравн. (8), видим, что коэф. сопротивления трения  $\zeta_r$  по Шувовскому  $m$  выражается так:

$$\zeta_r = \frac{\pi^2 \cdot 300 \cdot 2g}{12^4 \cdot 64 \text{ m}^2}$$

Внося значение  $g$  в футах ( $g = 32.2'$ ), получим:

$$\zeta_r = \frac{0.1437}{\text{m}^2}$$

Для керосина  $m = 5$ ; следовательно,  $\zeta_r = 0.00575$ .

Для нефти  $m = 4$ ; слѣд.,  $\zeta_r = 0.009$ .

Для нефтяных остатков гдѣ  $m = 0.6 - 0.06 l - 610,1 + 0.01 l$  имѣем:

$$\zeta_r = \frac{0.1437}{36 \cdot 0,1 + 0,01 l^2} = \frac{0.004}{0,1 + 0.002 l + 0.0001 l^2}$$

Отсюда видно, что, съ увеличеніем  $l$ ,  $\zeta_r$  довольно быстро уменьшается: напр. при  $l = 0$ ,  $\zeta_r = 0,04$ , а при  $l = 10^6$   $\zeta_r$  уже равно 0,03.

По вопросу о сопротивлении движению рассматриваемыхъ здѣсь жидкостей имѣется только немного данныхъ. Надѣ керосиномъ (уд. в. 0,822 при  $t = 14^\circ \text{C.}$ ) проф. Мерчингъ произвелъ рядъ наблюдений въ трубахъ съ диаметрами 21, 26 и 45 *mm.* \*) Средняя скорость течения измѣнялась въ предѣлахъ отъ 0,5 до 1,7 *m/sec.* Потерю напора на трение онъ выражаетъ, согласно съ Пруни, слѣдующимъ образомъ:

$$\zeta = \frac{L}{d} \left( a + \frac{b}{v} \right) v^2$$

\*) См. Проф. Г. Мерчингъ—„О движеніи жидкостей: воды, нефти и керосина въ трубахъ“. Журналъ М. ва путей сообщенія, 1889 г., кн. 47, Отдѣлъ мостовыхъ и др. искусственныхъ сооружений, стр. 297.

Для испытаннаго керосина коэффициенты  $a$  и  $b$  имѣли слѣдующія значенія, расположенныя соответственно вышеуказаннымъ диаметрамъ трубъ:

$$a = 0,001294 \dots 0,000791 \dots 0,000405.$$

$$b = 0,000502 \dots 0,000513 \dots 0,000768.$$

Сравнивая предыдущее выраженіе потери напора съ обычнымъ ур-немъ (8), находимъ для коэффициента сопротивленія тренія  $\zeta_r$  выраженіе:

$$\zeta_r = 0,5g \left( a + \frac{b}{v} \right).$$

Изъ опытовъ Мерчинга слѣдуетъ, что:

$$\begin{aligned} \text{для } d = 21 \text{ мм} \dots \dots \dots \zeta_r &= 0,00639 + \frac{0,000246}{v}, \\ \text{для } d = 21 \text{ мм} \dots \dots \dots \zeta_r &= 0,00388 + \frac{0,000252}{v}, \\ \text{для } d = 45 \text{ мм} \dots \dots \dots \zeta_r &= 0,00199 + \frac{0,000377}{v}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для керосина коэффициентъ сопротивленія  $\zeta_r$ , а вмѣстѣ съ нимъ и Шулоски  $m$ , слѣдуетъ считать измѣняющимися какъ со скоростью, такъ и съ диаметромъ, какъ это имѣетъ мѣсто для воды.

Наконецъ, въ послѣдніе годы появилась работа инженера Л. Эрбизано \*), по которой слѣдуетъ, что при обыкновенной температурѣ коэффициенты сопротивленія  $\zeta$  для ур-я (8) можно считать равными:

$$\begin{aligned} \text{для бензина и керосина} \dots \dots \zeta_r &= 0,0039, \\ \text{для сырой нефти} \dots \dots \dots \zeta_r &= 0,0157, \\ \text{для нефтяныхъ остатковъ} \dots \dots \zeta_r &= 0,0314. \end{aligned}$$

Эти данныя заслуживаютъ вниманія потому, что они получены на трубахъ отъ 30 до 20 мм диаметромъ при значительной длинѣ. Сравнивая ихъ съ данными Шулова, находимъ близкое сходство ихъ по отношенію къ нефтянымъ остаткамъ при обычной температурѣ; по отношенію къ нефти они много выше данныхъ Шулова, а по отношенію къ керосину наоборотъ. Данныя Эрбизано относятся къ румынской нефти.

## § 22. Особые сопротивленія.

Кромѣ тренія, всегда имѣющагося налицо, въ трубахъ можетъ встрѣтиться еще рядъ другихъ сопротивленій, на преодоленіе которыхъ также необходима затрата нѣкотораго запаса работы. Эту потерю напора вообще учитываютъ въ ур-и Д. Бернулли членомъ  $\zeta \frac{v^2}{2g}$ , гдѣ  $v$  есть скорость за тѣмъ мѣстомъ, которое вызываетъ потерю, а  $\zeta$  есть коэф-тъ этихъ, такъ называемыхъ, особыхъ сопротивленій, которыя появляются въ цѣломъ рядѣ случаевъ, ниже перечисляемыхъ:

\* См. Труды Бакинскаго отдѣленія И. Р. Т. О. за 1908 г., № 5 Цитируемъ по Журналу М за путей сообщенія, 1908 г., кн. 9, стр. 155.

1) Всегда имѣется *сопротивленіе при входѣ въ трубу*, совершенно аналогичное сопротивленію, вносимому насадкомъ, приставленнымъ къ отверстию. Чаще всего труба бываетъ цилиндрической и примыкаетъ къ сосуду подъ какимъ-нибудь угломъ, такъ что сопротивленіе при входѣ въ трубу есть сопротивленіе наклоннаго цилиндрическаго насадка, для котораго въ § 15 (форм. 19, стр. 137) мы имѣли по Вейсбаху:

$$\zeta = 0,505 + 0,303 \sin \delta + 0,226 \sin^2 \delta, \dots \dots \dots (19)$$

гдѣ  $\delta$  есть уголъ между осью трубы и нормалью къ стѣнкѣ.

Если труба подводится къ сосуду какъ-нибудь иначе, то коэффициентъ  $\zeta$  удобно опредѣлять по коэф-ту скорости  $\varphi$ , величину котораго слѣдуетъ брать изъ опытовъ надъ истеченіемъ изъ отверстій, устроенныхъ такъ, какъ примыкаетъ къ сосуду труба. Связь между  $\zeta$  и  $\varphi$  мы уже указали раньше:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Такъ, напримѣръ, если труба, примыкая къ сосуду, хорошо скруглена, воспроизводя форму сжатой струи, то, какъ извѣстно,  $\varphi = 0,975$ , а слѣдовательно,  $\zeta = 0,05$ . Если такого скругленія кромки нѣтъ и если, сверхъ



Фиг. 123.

того, труба нормальна къ стѣнкѣ сосуда, то изъ уравненія (19) находимъ  $\zeta = 0,5$ , какъ въ обыкновенномъ насадкѣ Вентури.

2) Всякое *внезапное измѣненіе сѣченія трубы* вызываетъ потерю напора. Въ общемъ случаѣ представимъ себѣ, что круглая труба сѣченія  $F_1$  переходитъ въ круглую же трубу сѣченія  $F_2$  черезъ діафрагму,

въ которой сдѣлано круглое отверстіе площадью  $F$  (фиг. 123). Потеря напора состоитъ въ этомъ случаѣ изъ сопротивленія при проходѣ черезъ отверстіе, которое обозначимъ черезъ  $\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}$ . Если въ діафрагмѣ кромки острые, то  $\varphi = 0,97$  и  $\zeta_1 = 0,063$ .

Кромѣ того, есть потеря на ударъ, равная  $\frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$ .

Ур-іе расхода пишется такъ:

$$Q = F_1 v_1 = F_x v_x = aF v_x = F_2 v_2.$$

Принимая это во вниманіе, можемъ, такимъ образомъ, учесть полную потерю напора вслѣдствіе такого сопротивленія формулой:

$$h = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \zeta \frac{v_2^2}{2g} = \left\{ \zeta_1 \left( \frac{F_2}{aF} \right)^2 + \left( \frac{F_2}{aF} - 1 \right)^2 \right\} \frac{v_2^2}{2g}.$$

Слѣдовательно, коэф-тъ сопротивленія выражается здѣсь такъ:

$$\zeta = \zeta_1 \left( \frac{F_2}{\alpha F} \right)^2 + \left( \frac{F_2}{\alpha F} - 1 \right)^2 \dots \dots \dots (15)$$

(Нужно помнить, что величина  $\alpha$  зависитъ отъ степени совершенства сжатія, т.-е. отъ отношенія  $F: F_1$ ).

Такая потеря напора отразится тѣмъ, что если пьезометръ въ первой трубѣ имѣлъ высоту  $a_1 = \frac{P_1}{\gamma} = b$ , гдѣ  $b$  есть высота барометрическаго давленія, то пьезометръ во второй трубѣ, при условіи горизонтальности трубы, на нѣкоторомъ разстояніи отъ діафрагмы будетъ имѣть меньшую высоту  $a_2 = \frac{P_2}{\gamma} = h$ , опредѣляемую изъ соотношенія:

$$a_1 - a_2 = \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = \zeta \frac{c_2^2}{2g} = (1 - \zeta) \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g}$$

Пьезометръ, вставленный непосредственно за діафрагмой, будетъ имѣть высоту  $a_2$ , опредѣляемую формулой:

$$a_2 - a_1 = 2 \left( \frac{F_2}{\alpha F} - 1 \right) \frac{c_2^2}{2g}$$

Въ справедливости написаннаго выраженія легко убѣдиться путемъ соответственнаго примѣненія ур-ія Д. Бернулли.

Понятно, что во всякомъ случаѣ  $a_1 < a_2$ , т.-е. что вблизи діафрагмы давленіе меньше, чѣмъ за нею, подобно тому, что всегда имѣеть мѣсто при ударѣ.

Въ случаѣ совершеннаго сжатія ( $F_1 > 20 F$ ) Вейсбахъ даетъ слѣдующія значенія коэф-та  $\zeta$  въ ур-іи (15) (см. табл. 30).

Таблица 30 (къ ур-ію 15).

$\frac{F}{F_2}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta$	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Въ случаѣ несовершеннаго сжатія ( $F_1 < 20 F$ ) Вейсбахъ не даетъ непосредственнаго коэф-та  $\zeta$ , а даетъ значенія коэф-товъ  $\mu$  въ зависимости отъ отношенія  $\frac{F}{F_1}$ . Чтобы перейти отъ нашего ур-ія (15), содержащаго коэф-тъ сжатія  $\alpha$ , къ ур-ію Вейсбаха, содержащему коэф-тъ расхода  $\mu$ , замѣтимъ, что:

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1$$

затѣмъ

$$\mu = \alpha q,$$

т.-е.

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{q}{\mu}.$$

Поэтому ур-іе (15) переписывается иначе такъ

$$\zeta = \frac{1}{q^2} - 1 \frac{q^2}{\mu^2} \frac{F_2^2}{F_1^2} + \frac{q}{\mu} \frac{F_2}{F_1} - 1 \zeta = \frac{F_2^2}{\mu F_1^2} - 2 \frac{q}{\mu} \frac{F_2}{F_1} + 1.$$

Такъ какъ  $q$ , вообще, мало отличается отъ единицы то, полагивъ  $q = 1$ , получимъ окончательную формулу Вейсбаха для коэф-та сопротивленія при диафрагмѣ въ случаѣ несовершеннаго сжатія:

$$\zeta = \frac{F_2}{\mu F_1} - 1^2 \dots \dots \dots (16)$$

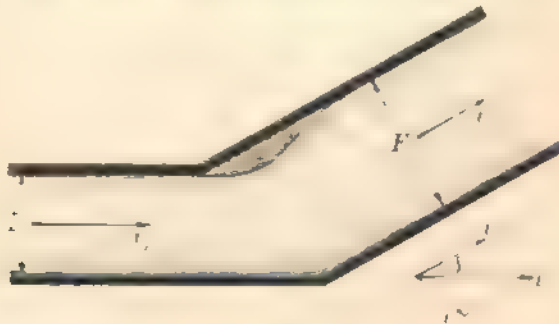
Непосредственныя наблюденія привели Вейсбаха къ слѣдующимъ значеніямъ  $\mu$  при разныхъ отношеніяхъ  $F:F_1$  (табл. 31).

Таблица 31.

При $\frac{F}{F_1}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\mu$	0,624	0,632	0,643	0,653	0,681	0,712	0,735	0,813	0,892	1,000
Если $F_2 = F_1$ , то $\zeta$	225,9	47,77	17,51	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

Третья строка этой таблицы даетъ значенія  $\zeta$ , если  $F_2 = F_1$ , т. е. если диафрагма поставлена на трубѣ постоянно диаметра. Последний вертикальный столбецъ даетъ коэф-ты расхода и сопротивленія, когда  $F = F_1$ , т.-е. когда нѣтъ диафрагмы, а есть только внезапное сжатіе трубы; при этомъ, если  $F_2 = F_1$  то нѣтъ и суженія, а потому  $\zeta = 0$ .

3) Всякое *внезапное измѣненіе направленія скорости* сопряжено съ потерей напора. Оно можетъ сопровождаться измѣненіемъ величины сѣче-



Фиг. 124.

ни Такъ пусть горизонтальная труба (фиг. 124), образуя колѣно, сразу мѣняетъ свое направленіе, при чемъ до колѣна сѣченіе ея есть  $F_1$ , а за ко-

лѣномъ оно переходитъ въ  $F_1$ , и, кроме того,  $F_2 > F_1$ . Пусть уголъ между осями обѣихъ вѣтвей есть  $\delta$ . По ур-ю расхода

$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2;$$

если известна скорость  $v_1$ , то известна и скорость  $v_2$ . Отложимъ по направленію оси первой вѣтви скорость  $v_1$ , а по направленію второй — скорость  $v_2$ . Замыкая параллелограммъ скоростей, видимъ, что вследствие дѣйствія колѣна утрачена слагающая скорость  $v$ . Слѣдовательно, потеря напора  $\eta$  есть высота, соответствующая слагающей, т.-е.

$$\eta = \frac{v^2}{2g}.$$

Изъ параллелограмма скоростей видно, что

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \delta.$$

Такъ какъ

$$\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2},$$

то можемъ написать:

$$\eta = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} + \frac{4v_1 v_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{2g} \dots \dots \dots (17)$$

Замѣтимъ, что первый членъ представляетъ собою потерю напора въ случаѣ, если бы при прямой оси трубы было внезапное уменьшеніе скорости  $(v_1 - v_2)$ . Выражая скорость  $v_1$  по  $v_2$ , получаемъ:

$$v_1 = \frac{v_2^2}{2g} = \left( \frac{F_2^2}{F_1^2} - 1 \right) + 4 \frac{F_2^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{F_1^2} \frac{v_2^2}{2g}.$$

Чаще всего встрѣчается случай  $F_1 = F_2$ , т.-е. случай измѣненія только направленія скорости. Тогда по послѣднему ур-ю

$$\zeta = 4 \sin^2 \frac{\delta}{2}.$$

Такъ разсматриваетъ этотъ случай Zeuner. Однако, наблюдая влияние угла колѣна на круглой трубѣ въ 30 mm диаметромъ, Вейсбахъ пришелъ къ заключенію, что нужно считать

$$\zeta = 0,9457 \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2,047 \sin^4 \frac{\delta}{2}.$$

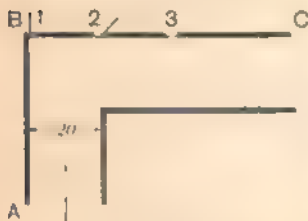
При разных углах  $\delta$  эта формула дает следующие величины  $\zeta$  (табл. 32):

Таблица 32.

$\delta$	20°	40°	60°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°
$\zeta$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,983	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

Уравн. Zeppera дает для  $\delta = 90^\circ$  величину  $\zeta = 2$ , тогда как по Вейсбаху  $\zeta$  достигает здесь значения только 0,983. Таким образом рассуждения Zeppera на дель не оправдываются, однако и формула Вейсбаха не вводит удовлетворительно. Последний указывает на это самъ, упоминая, что на круглой трубѣ въ 10 мм диаметромъ при  $\delta = 90^\circ$  онъ получил  $\zeta = 1,536$ , т. е. гораздо больше, чѣмъ на трубѣ въ 30 мм. Такимъ образомъ, увеличение диаметра сильно уменьшаетъ коэффициентъ сопротивления. Въ соответствии съ этимъ при большихъ трубкахъ при  $\delta = 90^\circ$  Бламант предлагаетъ считать  $\zeta = 0,25$ .

(Отметимъ, что въ колѣнкахъ несомнѣнно существуетъ сжатіе струи (фиг. 124), которая по инерции отстаетъ отъ рѣзко отогнутой стѣнки колѣна. Это сжатіе и сопутствующее ему разрѣженіе наглядно доказываются наблюдениемъ (Саллину \*)



Фиг. 125.

(фиг. 125); на вертикальной трубкѣ *AB* въ 20 мм диаметромъ поставлено горизонтальное колѣно *BC*, въ стѣнкѣ котораго верхней образующей сдѣланы отверстия 1, 2, 3: первое—у самой вершины колѣна, два друга въ разстоянн соответственно одного и двухъ диаметровъ трубки отъ первого. Вода протекала снизу вверхъ по стѣнкѣ. Уголъ  $\alpha$  былъ равенъ  $90^\circ$ . Изъ отверстия 1 струйка

вылетала по вертикали, изъ отверстия 2 вытекала наклонная (около  $45^\circ$ ) струйка, а изъ отверстия 3 не вытекало ничего. Изъ этого слѣдуетъ, что давленіе въ отверстіи 3 меньше, чѣмъ въ двухъ первыхъ, а это, при горизонтальности трубки, можетъ произойти только тогда, если скорость здѣсь больше, чѣмъ въ сѣченіяхъ трубы близъ отверстій 1 и 2; но такъ какъ діаметръ трубки постояненъ, то увеличение скорости въ этомъ мѣстѣ можетъ быть объяснено только сжатіемъ струи.



Фиг. 126.

4) Когда колѣно скруглено (фиг. 126), то потеря напора, по-прежнему, выражается членомъ  $\eta = \zeta \frac{v^2}{2g}$ , но коэф-тъ здѣсь меньше, чѣмъ

\*) См. „Recherches thѣoriques et expѣrimentales sur les oscillations de l'eau“, par A. de Salignу, page 246 du 1-er tome. При повтореніи этихъ наблюдени въ гидравлической лабораторіи Н. М. Т. У. выяснилось, что область наименьшаго давленія, т. е. наибольшаго сжатія струи, лежитъ приблизительно въ разстоянн двухъ діаметровъ трубы отъ вершины колѣна. Съ увеличеніемъ расхода мѣсто наибольшаго сжатія перемѣстится далѣе отъ вершины по теченію. Отклоненіе направленія струйки отъ нормали къ стѣнкѣ объясняется инерціей движущейся воды, сохраняющей направленіе той скорости, которую она имѣла еще въ трубѣ;

въ предыдущемъ случаѣ. Источникомъ потери и здѣсь можетъ являться сжатіе струи, образующееся подъ вліяніемъ инерціи; не безъ вліянія и то, что, при несомнѣнно криволинейномъ движеніи частицъ, давления въ струйкахъ, идущихъ по внѣшней части закругленія, благодаря центробѣжной слагающей полного ускоренія, должны быть больше, чѣмъ соответственныя давления частицъ, идущихъ по внутренней части закругленія. Въ силу этого скорости внутреннихъ частицъ должны быть больше скоростей внѣшнихъ частицъ; другими словами, распредѣленіе скоростей для отдѣльныхъ точекъ не то, которое имѣетъ мѣсто до закругленія и за нимъ. Такое измѣненіе распредѣленія скоростей и давленій, конечно, не можетъ не вызвать въ усиленномъ видѣ того нарушенія движенія параллельными струями, которое констатировано Рейнольдсомъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ должно сопровождаться потерей энергіи.

Материаломъ для оцѣнки величины  $\zeta$  служатъ здѣсь, главнымъ образомъ, опыты Дивиад и отчасти, опыты Велсбаха. Послѣдній, на основаніи подсчета тѣхъ и другихъ, даетъ, при круглой трубѣ диаметромъ  $2r$  и при закругленіи оси трубы радиусомъ  $R$ , формулу (18) и таблицу 33:

$$\zeta = 0,131 + 1,847 \left( \frac{r}{R} \right)^2 \dots \dots \dots (18)$$

Таблица 33.

$\frac{r}{R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta$	0,131	0,158	0,188	0,206	0,234	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Для трубы прямоугольнаго сѣченія, съ размѣромъ  $b$  въ плоскости закругленія, онъ даетъ формулу (19) и таблицу 34:

$$\zeta = 0,124 + 3,104 \left( \frac{b}{2R} \right)^2 \dots \dots \dots (19)$$

Таблица 34

$\frac{b}{2R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta$	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Оба эти выраженія пригодны для угла закругленія  $\beta = 90^\circ$ ; при иномъ углѣ  $\beta$ , измѣряемомъ между старымъ и новымъ направленьями, слѣдуетъ эти значенія  $\zeta$  умножить на отношеніе  $\frac{\beta^\circ}{90^\circ}$ .

Это отклоненіе видно тѣмъ отчетливѣе чѣмъ тоньше стѣнка отверстия; оно очень велико при тѣмъ же разнѣкованымъ отверстияхъ и почти отсутствуетъ если отверстие въ 2 мм просто просверлено въ трехмиллиметровой стѣнкѣ латѣна.



Saint-Venant, пересчитывавший опыты Dubuat, пришел к заключению, что потерянный напор для круглой трубы выражается в этом случае так:

$$\zeta = 0,096 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{2r}{R}} \frac{v^2}{2g}$$

или

$$\zeta = 0,096 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{2r}{R}}$$

где, поперечно,  $2r$  есть диаметр круглой трубы,  $R$  — радиус закругления оси трубы, а  $L$  есть длина закругления  $ab$ , считая по оси закругления. Понятно, что:

$$L : R = \frac{\pi r^3}{1800}$$

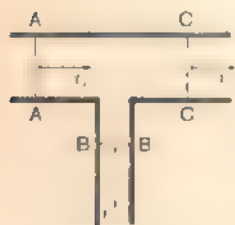


Фиг. 127.

Отметим, что в обоих случаях оценивается только влияние искривления, кроме этого имеет место потеря напора на трение. Поэтому, при оценке потери напора на трение, к длине ее прямых частей присчитываются длины осей закруглений.

В случае, если два колена составлены так, что труба образует перегиб, то некоторое сжатие струи, удержанное показанное на фиг. 127, является два раза, а потому коэффициент сопротивления следует брать как сумму коэффициентов сопротивлений обоих колен.

5) При *ответвлениях* также имеют место потери напора. На основании данных, приводимых D'Aubuisson'ом \*, их приходится оценивать так. Для тех струй, которые входят в ответвление (фиг. 128), потеря напора равна *двойному скоростному напору внутри ответвления*. Таким образом у-ре Д. Бернулли для этих струй между сечением *AA* (значки 1) и сечением *BB* (значки 2) должно быть написано так:



Фиг. 128.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - 2 \frac{v_2^2}{2g}$$

если, конечно, считать, что центры обоих сечений лежат в одной горизонтальной плоскости. При этом предполагается, что ответвление образует прямой угол с главной трубой и имеет меньший диаметр, чем сама труба.

На протяжении самой трубы, между сечением *AA* и сечением *CC* (значки 3) потеря напора такова, что давление  $p_3$  не отличается от давле-

\*) См. „Trat  d'Hydraulique“ par J. F. D'Aubuisson de Voisins. Paris, 1840, стр. 256—258. Также „Corso di Idraulica“ профессора U. Masoni. Napoli, 1900, стр. 305.

нія  $p_1$ , хотя для этих струй на этом пути освобождается значительный скоростной напор  $\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$ ; это и есть потеря напора.

б) Наконец, всякая *задвижка, кранъ, клапанъ* и т. п. вносятъ извѣстныя сопротивленія, а слѣдовательно, и потери напора.

Вейсбахъ даетъ слѣдующія таблицы значеній коэффициентовъ сопротивленія въ этихъ случаяхъ, относящихся къ *крутымъ трубамъ*:

а) При *задвижкѣ* (фиг. 129) коэф-тъ сопротивленія зависитъ отъ отношенія  $S : D$  (табл. 35).



Фиг. 129

Таблица 35.

$S : D$	0	1	2	3	4	5	6	7
Отнош. сѣченій.	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
$\zeta$	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8



Фиг. 130.

б) При *поворотномъ (горловомъ) клапанѣ* (фиг. 130) коэф-тъ сопротивленія зависитъ отъ угла  $\alpha$  (табл. 36).

Таблица 36.

При $\alpha =$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	
Отнош. сѣченій.	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426	
$\zeta$	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22	
При $\alpha =$	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Отнош. сѣченій.	0,357	0,233	0,214	0,181	0,154	0,94	0,060	0
$\zeta$	1,5	18,7	22,6	58,8	118	256	751	$\infty$



Фиг. 131.

с) При *кранѣхъ* (фиг. 131) коэф-тъ сопротивленія быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ угла  $\alpha$ , какъ это видно изъ таблицы 37.

Таблица 37.

$\alpha$	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Отнош. сѣченій.	0,926	0,850	0,772	0,692	0,619	0,535	0,458
$\zeta$	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68
$\alpha$	40°	45°	50°	55°	60°	65°	82 1/2°
Отнош. сѣченій.	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
$\zeta$	17,3	31,2	52,6	106	206	486	$\infty$

Напримѣръ, при  $v = 1 \text{ mtr/sec}$ , т. е. при  $v^2 = 0,05 \text{ mtr}$ , для проталкиванія воды черезъ *кранъ* при  $\alpha = 65^\circ$  нуженъ напоръ:

$$h = \zeta \frac{v^2}{2g} = 486 \cdot 0,05 = 24,3 \text{ mtr.}$$



Фиг. 132.

д) Для *шарнирнаго клапана* (фиг. 132) коэф-тъ сопротивленія возрастаетъ съ уменьшеніемъ угла  $\alpha$  (табл. 38).

Таблица 38.

$\alpha$	70°	65°	60°	55°	50°	45°	40°	35°	30°	25°	20°	15°
$\zeta$	1,7	2,3	3,2	4,6	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90

Замѣтимъ, что числовыя данныя пунктовъ а, в, с и д получены изъ опытовъ надъ трубою съ диаметромъ въ 4 см. Кроме того всѣ приведенныя коэф-ты относятся къ водѣ.

Кромѣ этихъ данныхъ Веисбаха, имѣются еще наблюденія Баха (1884 г.) надъ сопротивленіемъ тарельчатыхъ насосныхъ клапановъ\*. Приводимъ результаты этихъ наблюденій, условившись въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

\*) C. Bach. Versuche ueber Vent.lbelastung und Vent.lw derstand.

$P$  — нагрузка (въ  $kgf$ ) на клапанъ, необходимая для того, чтобы удержать свободный клапанъ въ равновѣсїи въ протекающей вокругъ него струѣ воды;

$d$  — внутренний диаметръ сѣкла;

$f = \frac{\pi d^2}{4}$  — площадь сѣченія сѣкла;

$v$  — скорость (средняя) воды въ сѣклѣ;

$h$  — высота подъема клапана;

$i$  — число направляющихъ реберъ;

$c$  — ширина этихъ реберъ, считая по окружности сѣкла диаметра  $d$ ;

$b$  — радиальный разбѣръ замыкающей поверхности;

$\zeta$  — коэф. тѣ сопротивленія клапана, такъ что потеря напора, вносимая клапаномъ, на каждыи  $kgf$  протекающей жидкости есть  $\zeta \frac{v^2}{2g}$ .

Всѣ разбѣры выражены въ  $mtr$ .

е) *Плоский тарельчатый клапанъ съ вертлнми направляющими* (фиг. 133) Пока высота подъема  $h$  и ширина опорной поверхности  $b$  находится въ предѣлахъ отъ  $0,1 d$  до  $0,25 d$ , можно положить, что

$$P = 1000 f \frac{v^2}{2g} \left[ k + \left( \frac{d}{4\mu h} \right)^2 \right],$$

гдѣ

$$k = 2,5 + 19 \frac{b - 0,1d}{d},$$

$\mu = 0,60$ , если  $b$  велико (ближе къ  $0,25 d$ ),

$\mu = 0,82$ , „  $b$  мало ( „ „  $0,1 d$ ).



Фиг. 133.



Фиг. 134.

На фиг. 133 и 134 даны оба клапана, послужившіе къ установленію этихъ формулы. Далѣе:

$$\zeta = c + \beta \frac{d^2}{h},$$

при чемъ

$$c = 0,55 + 4 \frac{b - 0,1d}{d},$$

$\beta = 0,15$  при малыхъ  $b$ ,

$\beta = 0,16$  „ большихъ  $b$ .

Если высота подъема  $h$  меньше  $0,1 d$  или больше  $0,25 d$ , то можно считать,

$$P = 1000 f \frac{v^2}{2g} \left[ k + \frac{d}{4a_1 a_2 b} \right],$$

$$\zeta = c + \beta \frac{d^2}{a_2 h}.$$

где для клапана фиг. 133 получено:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,0008 \text{ mtr}; & k &= 1,85; & \mu &= 0,52; \\ a_2 &= 0,0005 \text{ mtr}; & \alpha &= 0,30; & \beta &= 0,18. \end{aligned}$$

Для клапана фиг. 134 получено:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0,0016 \text{ mtr}; & k &= 3,1; & \mu &= 0,435; \\ a_2 &= 0,0005 \text{ mtr}; & \alpha &= 0,7; & \beta &= 0,19. \end{aligned}$$

При этомъ слѣдуетъ отмѣтить, что видоизмѣненіе конструкции клапана по фиг. 135 и по фиг. 136 вноситъ мало измѣненія въ величинѣ сопротивленія; однако замѣтно, что изъ этихъ трехъ конструкций наибольшее сопротивление представляетъ клапанъ фи. 136



Фиг. 135.



Фиг. 136.

съ направляющимъ струю носкомъ; конструкции фиг. 133 является средней по величинѣ сопротивленія, тогда какъ меньшее сопротивление вноситъ конструкция фиг. 135. Это можно объяснить тѣмъ, что при устройствѣ по фиг. 133—135 вода сама образуетъ мертвый жидкий направляющій носокъ, прилегающій къ клапану, трение о такую жидкую стѣнку меньше, чѣмъ о твердую (на фиг. 136).

г) *Плоские тарельчатые клапаны съ направляющимъ снизу* (фиг. 137), При высотѣ подъема отъ 0,125  $d$  до 0,25  $d$  можно считать:

$$P = 1000 \cdot l \frac{v^2}{2g} \left[ k \cdot l \left( \frac{d}{u} + \frac{d}{u} h^2 \right) \right],$$

где

$$l = 0,9 \left[ 2,5 - 1,9 \frac{h}{d} + 0,1 \frac{d}{d} \right],$$

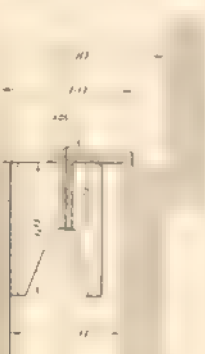
$$\mu = 0,54.$$

Далѣе

$$z = c + \beta \sqrt{\left( \frac{d^2}{u} + \frac{d^2}{u} h^2 \right)^2}.$$

Тутъ слѣдуетъ брать  $\alpha = 1,8$  отъ значеній  $\alpha$  въ предыдущемъ случаѣ и  $\beta = 1,7$ , если направляющія ребра сужаютъ цилиндрическую поверхность не болѣе, какъ на 13% т.-е. если  $(\pi d - \epsilon)h = 0,87f$ . Если это суженіе достигаетъ 20%, т.-е. если  $(\pi d - \epsilon)h = 0,8f$ , то слѣдуетъ брать  $\alpha = 2,6$  отъ значенія  $\alpha$  предыдущаго случая, а  $\beta = 1,75$ .

Такие клапаны даютъ гораздо большее сопротивление, чѣмъ клапаны съ однимъ верхнимъ направляющимъ.



Фиг. 137

г) *Турельными плоский клапанъ съ конической замыкающей поверхностью* (фиг. 138).  
Если  $h = 0,1 d$  до  $0,15 d$  и, кроме того,  $b = 0,1 d$ , то:



Фиг. 138.

$$P = 1000 f \frac{v^2}{2g} \left[ k + \frac{v}{4\mu h} \right],$$

гдѣ

$$k = 1,05; \mu = 0,84.$$

Здѣсь

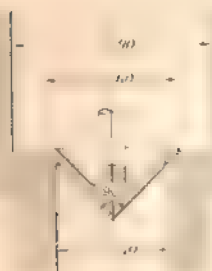
$$z = \alpha + \beta \left( \frac{d}{h} \right)^2; \quad \frac{d}{h} = 2$$

при чемъ

$$\alpha = 2,6; \beta = 0,8; \gamma = 0,14$$

Здѣсь сопротивление значительно меньше, чѣмъ въ случаѣ (f)

h) *Если пень клапана имѣетъ форму конуса* (фиг. 139), то



Фиг. 139.

$$P = 1000 f \frac{v^2}{2g} \left[ k + \left( \frac{d}{4\mu h} \right)^2 \right],$$

гдѣ

$$k = 0,38; \mu = 0,68.$$

Затѣмъ

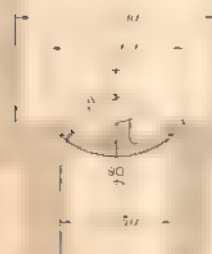
$$z = \alpha + \beta \left( \frac{d}{h} \right)^2,$$

гдѣ

$$\alpha = 0,6; \beta = 0,15.$$

Такая форма клапана сильно увеличиваетъ его сопротивление.

к) *Наковень, если клапанъ ограниченъ снизу шаровой поверхностью* (фиг. 140), то при высотѣ подъема  $h = 0,1 d$  до  $0,25 d$  имѣетъ мѣсто соотношение:



Фиг. 140.

$$P = 1000 f \frac{v^2}{2g} \left[ k + \left( \frac{d}{4\mu h} \right)^2 \right],$$

гдѣ

$$k = 0,96; \mu = 1,15.$$

Здѣсь

$$z = \alpha + \beta \left( \frac{d}{h} \right)^2 + \gamma \frac{d}{h}$$

при чемъ

$$\alpha = 2,7; \beta = -0,8; \gamma = 0,14.$$

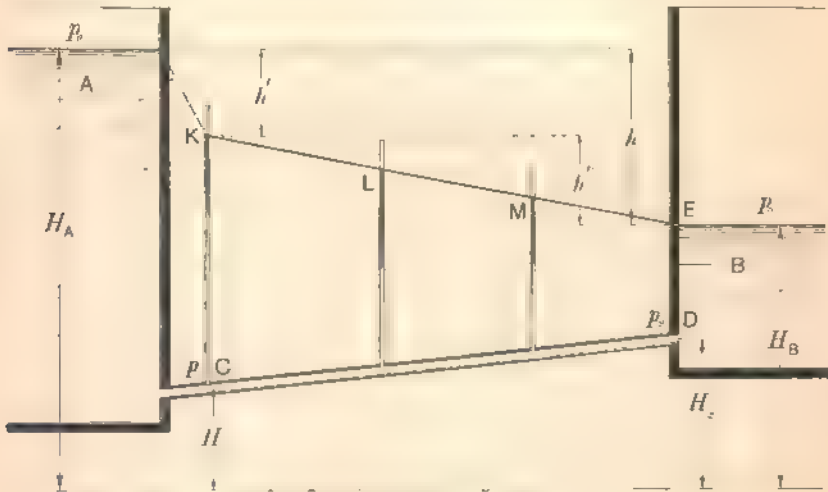
Во всѣхъ этихъ случаяхъ клапанная коробка была устроена такъ, что вода, пройдя клапанъ, не отклонялась въ сторону, а продолжала идти по вертикальному направлению.

По формуламъ Баха можно опредѣлить  $z$ , только зная  $h$ ; а эта величина можетъ быть найдена изъ выражения нагрузки  $P$ , которая осуществляется или пружинной, или вѣсомъ самаго клапана (конечно, въ водѣ, а не въ воздухѣ).

Какъ общее заключеніе изъ этого и предыдущаго параграфовъ выводимъ, что *вся безъ исключенія потеря напора въ трубахъ признаются въ гидравликѣ пропорціональными квадрату скорости*; всѣ коэффициенты относятся къ скоростямъ, имѣющимъ мѣсто непосредственно вѣдѣ за сопротивленіемъ.

### § 23. Задача о простомъ водопроводѣ.

Пусть даны два резервуара *A* и *B*, соединенные трубою, длина которой есть *L* (фиг. 141). Возьмемъ сѣченіе *C* трубы такъ близко отъ резер-



Фиг. 141.

вуара *A*, чтобы часть трубы до *C* можно было считать просто насадкомъ (т.-е. сѣченіе *C* должно отстоять отъ стѣнки на разстояніи около 2,5 діаметровъ трубы). Тогда, считая скорость въ резервуарѣ равной нулю, мы напишемъ ур-е Д. Бернулли для движения отъ свободной поверхности въ резервуарѣ до сѣченія *C* такъ:

$$H_A + \frac{v_0^2}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + H_1 + \zeta_0 \frac{v^2}{2g}$$

Здѣсь *v* есть скорость въ трубѣ, а  $\zeta_0$  есть коэф-тъ сопротивленія при входѣ въ трубу (см. § 22, 1). Отсюда понятно, что если въ *C* поставить пьезометръ, открытый въ воздухъ, то вода поднимется въ немъ только до точки *K*, лежащей ниже горизонта воды въ сосудѣ на нѣкоторую высоту *h'*, гдѣ

$$h' = H_A - \left( H_1 - \frac{p_1 - p_0}{\gamma} \right) = (1 + \zeta_0) \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (20)$$

т.-е. на высоту напора, которая затрачена на сообщеніе водѣ скорости  $v$  и на преодоленіе сопротивленія при входѣ.

Далѣе вода течетъ по трубѣ до резервуара  $B$ , преодолевая на этомъ пути общее сопротивленіе тренія

$$\eta_r = \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

и всеѣ могущія встрѣтиться особыя сопротивленія, которыя мы суммарно обозначимъ черезъ

$$\eta = \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g}$$

Слѣдовательно, ур-іе Д. Бернулли для движенія отъ  $C$  до  $D$  (мѣсто входа въ резервуаръ  $B$ ) будетъ писаться такъ:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \dots (21)$$

Въ обѣихъ частяхъ уравненія мы пишемъ одно и то же  $v$ , предполагая трубу цилиндрической и постояннаго, притомъ, діаметра. Изъ ур. (21) имѣемъ:

$$H_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left( H_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \dots (21')$$

Легко видѣть, что члены, стоящіе въ лѣвой части этого ур-ія, представляютъ разность высотъ стоянія воды въ пьезометрахъ точекъ  $C$  и  $D$ . Далѣе, изъ уравненія Д. Бернулли, написаннаго для движенія отъ конца трубы въ  $D$  до уровня въ сосудѣ  $B$  легко убѣдиться, что если скорость движенія воды въ резервуарѣ  $B$  мала настолько, что ее можно считать нулемъ по сравненію со скоростью въ трубѣ  $CD$ , то самый резервуаръ  $B$  можно считать за пьезометръ для точки  $D$ . Принимая все это во вниманіе, заключаемъ, что члены, стоящіе въ лѣвой части уравненія (21'), представляютъ собою вертикальное разстояніе  $h''$  между уровнемъ воды въ пьезометрѣ  $C$  и уровнемъ въ резервуарѣ  $B$ . Имѣемъ такимъ образомъ:

$$h'' = \zeta_r \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{v^2}{2g} \dots (22)$$

Итакъ, въ цилиндрической трубѣ сумма потеряннаго на сопротивленіе напоровъ представляетъ паденіе уровня въ пьезометрѣ.

Если въ трубѣ нѣтъ внезапныхъ измѣненій сѣченія, если на ней нѣтъ ни клапановъ, ни крановъ, если всеѣ изгибы сдѣланы помощью пологихъ закругленій и т. д., — словомъ, если членъ  $\Sigma \frac{v^2}{2g}$ , оцѣнивающий эти особыя

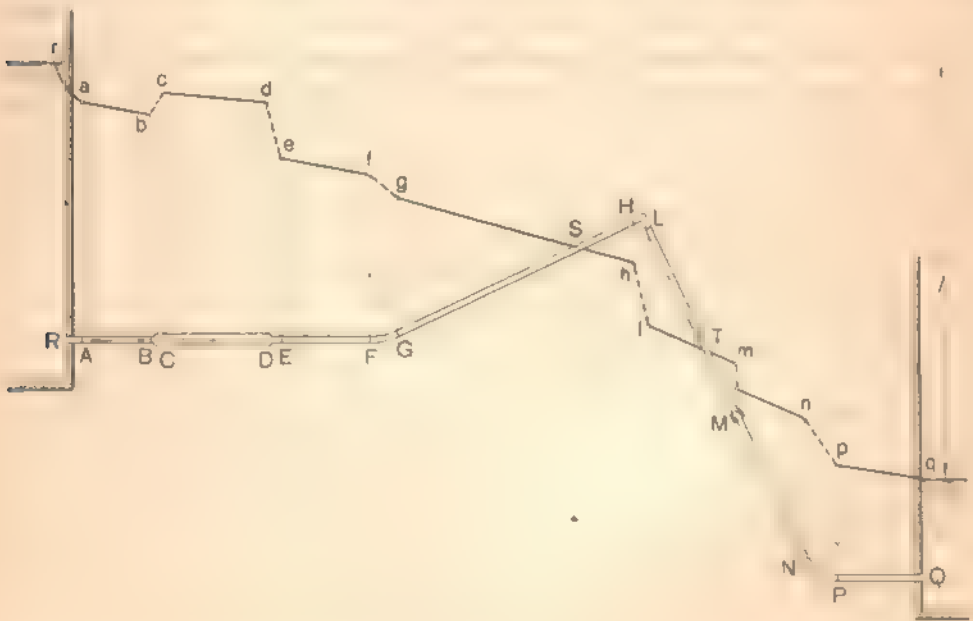


сопротивления, настолько малъ, что имъ можно, вообще, пренебречь, то ур-е (22) дастъ:

$$h'' = \zeta \frac{4L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (23)$$

Отсюда видно, что въ прямой цилиндрической трубѣ паденіе высоты пьезометра  $h''$  прямо пропорціонально длинѣ трубы, а потому, если труба прямая, то достаточно знать высоту пьезометра въ какихъ-нибудь двухъ точкахъ  $L$  и  $M$ , чтобы имѣть возможность опредѣлить ее во всякой другой точкѣ трубы; вода въ пьезометрахъ будетъ подыматься вездѣ до прямой  $KE$ . Эта прямая, какъ уже было сказано, называется *напорной* или *пьезометрической линіей*.

Въ случаѣ, если особыя сопротивленія вносятъ потери напора, не исчезающія по величинѣ передъ потерю на треніе, то каждое такое сопротивление вноситъ мѣстное, болѣе или менѣе внезапное пониженіе напорной линіи. Такъ, наиримѣрь, пусть фиг. 142 представляеть схему



Фиг. 142.

водопровода, составленнаго изъ трубъ трехъ разныхъ діаметровъ:  $d_1$  отъ  $A$  до  $B$ ,  $d_2$  отъ  $C$  до  $D$ ,  $d_3$  отъ  $E$  до  $Q$ ; пусть на этой трубѣ имѣются, кромѣ того, закругленія разныхъ радиусовъ ( $FG$  и  $NP$ ), колено  $HL$  и не вполне открытый край  $M$ . Ясно, что скорости въ соответствующихъ вѣтвяхъ, по ур-ю расхода, должны удовлетворять соотношенію

$$v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2 = v_3 d_3^2$$

Примѣняя соответствующимъ образомъ ур-ня Д. Бернулли, легко находимъ, что если въ точкахъ *A, B, .. N, P* поставимъ открытые пьезометры, то окажется, что:

точка *a* лежитъ ниже уровня *r* на  $(1 - \zeta_r) \frac{v_1^2}{2g}$ ,

точка *b* лежитъ ниже точки *a* на  $\zeta_r \frac{4L_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}$ .

точка *c* лежитъ выше точки *b* на  $\frac{v_2(v_1 - v_2)}{g}$ .

и, при этомъ, во всякомъ случаѣ точка *c* лежитъ ниже горизонта *r* воды въ резервуарѣ;

точка *d* лежитъ ниже точки *c* на  $\zeta_r \frac{4L_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}$ .

точка *e* » » » » *d* на  $(1 + \zeta_r) \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$ .

При этомъ коэффициентъ сопротивленія входа  $\zeta_r'$  долженъ быть оцененъ, принимая во вниманіе несовершенство сжатія. Сама точка *e* можетъ оказаться и выше, и ниже точки *b*. Если допустимъ, что  $d_1 = d_2$ , какъ это принято на чертежѣ, и, значитъ,  $v_1 = v_2$ , то точка *e* во всякомъ случаѣ будетъ лежать ниже точки *b*.

Точка *f* лежитъ ниже точки *e* на  $\zeta_r \frac{4L_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g}$ ,

гдѣ  $L_3'$  есть разстояніе, считая по трубѣ отъ *E* до начала закругленія *F*, а точка *E* лежитъ не далѣе 3 диаметровъ отъ начала этой вѣтви трубы.

Подобнымъ же образомъ легко прослѣдить дальнѣйшія превышенія тѣлѣвыхъ точекъ пьезометрическихъ линій надъ другими. Отметимъ только, что по чертежу трубы сразу, напр., видно, что закругленіе *FG* вноситъ меньшее паденіе пьезометрическаго уровня, нежели закругленіе *NP*, такъ какъ это послѣднее образуетъ больший уголъ и имѣетъ меньшій радиусъ закругленія; кольцо *HL* (прямой уголъ) вноситъ еще большее паденіе уровня отъ *b* до *l*, нежели закругленіе *NP*.

Далѣе, если допустимъ, что ось трубы отъ *A* до *F* есть горизонтальная прямая, то пьезометрическая линія *ab* будетъ падать круче, нежели пьезометрическая линія *cd*, ибо въ этомъ случаѣ уклонъ первой линіи къ горизонту есть  $\zeta_r \frac{4}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}$ , а для второй линіи уклонъ есть  $\zeta_r \frac{4}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}$ , а такъ какъ  $d_2 > d_1$ , то  $v_2 < v_1$ , а также, по Дарси,  $\zeta_r'' < \zeta_r'$ , т.-е. второй уклонъ значительно меньше перваго. Если опять допустимъ, что  $d_2 = d_1$ , то очевидно, что пьезометрическая линія *cd* параллельна линіи *ab*.

Что же касается линіи *gh*, то она падаетъ круче, образуя съ горизонтомъ больший уголъ, нежели прямая *ef* (ибо понятнo, что уголъ съ гори-

зонтомъ есть паденіе напора на единицу не длины самой трубы, а *длины ея горизонтальной проекціи*. По той же причинѣ заключаемъ, что вѣтви *lm* и *mn*, между собою параллельныя, падаютъ круче вѣтви *gh*, потому что сама труба *LM* стоитъ круче трубы *GH*.

Такимъ образомъ, пьезометрическая линия легко строится по точкамъ, при чемъ неопредѣленнымъ остается ея характеръ въ области каждаго мѣстнаго сопротивленія: эта неопредѣленность обыкновенно не имѣетъ практическаго значенія, почему на фиг. 142 части *ga, bc, ..., pr* пьезометрической линии и замѣнены произвольными пунктирными линиями, а для крана *M* какъ бы предположено, что вся потеря напора вносится одной только его точкой. При большихъ длинахъ трубъ этотъ послѣдній приемъ наиболѣе удобенъ въ примѣненіи ко всѣмъ мѣстнымъ сопротивленіямъ.

Важное значеніе построенія пьезометрической линии заключается въ томъ, что, построивъ ее, мы сразу видимъ, каково давленіе въ любой точкѣ трубы; кромѣ того, тѣмъ самымъ отмѣчаемъ, гдѣ оно меньше атмосфернаго (часть трубы между точками *S* и *T*) и гдѣ поэтому возникаетъ вопросъ объ абсолютной величинѣ давленія, такъ какъ, по основному свойству жидкостей, абсолютное давленіе всегда должно быть больше нуля.—иначе колонна жидкости разрывается. Этотъ послѣдній вопросъ разрѣшается съ помощью пьезометрической линии весьма просто: для невозможности разрыва необходимо, чтобы вертикальный отрѣзокъ, заключенный между пьезометрической линіей и верхней точкой любого сѣченія трубы, взятого въ тѣхъ ея участкахъ, гдѣ пьезометрическая линия опускается ниже трубы, былъ въ масштабѣ чертежа меньше высоты, соответствующей барометрическому давленію, т.-е. въ среднемъ меньше 10,33 *mtr.*

Наконецъ, назовемъ вертикальное разстояніе между уровнями въ обоихъ сосудахъ черезъ *h*, допустимъ, что скорости въ нихъ ничтожно малы, — практически равны нулю, — и напишемъ ур-е Д. Бернулли для движенія отъ уровня *r* до уровня *q*, предполагая, конечно, что барометрическое давленіе въ обоихъ сосудахъ одно и то же. Принимая во вниманіе, что при входѣ изъ трубы *PQ* въ резервуаръ потеря напора на ударъ равна  $\frac{v_3^2}{2g}$ , получимъ:

$$h = \sum_s \frac{r_1^2}{2g} + \sum_r \frac{4L_1}{d_1} \frac{r_1^2}{2g} + \frac{(r_1 - r_2)^2}{2g} + \sum_r \frac{4L_2}{d_2} \frac{r_2^2}{2g} + \dots + \left[ \sum_s + \sum_s + \sum_r \frac{4L_3}{d_3} + 1 \right] \frac{r_3^2}{2g} \dots \dots \dots (24)$$

гдѣ  $\sum_s$  обозначаетъ сумму коэффициентовъ всѣхъ особыхъ сопротивленій на трубѣ *EQ*. Легко видѣть, что всѣ скорости могутъ быть замѣнены какой-нибудь одной по ур-ю расхода.

Съ помощью ур-я (24) легко отвѣтить на вопросъ, что и какъ измѣнится въ трубѣ, если, напр., нѣсколько прищелеть кранъ *M*. Ясно, что отъ этого увеличится коэф-тъ сопротивленія въ выраженіи  $\sum_s$  (см. табл. 37 предыдущаго §), а потому, по ур-ю (24), скорость уменьшится. Слѣдов.,

расходъ уменьшится, что, конечно, ясно помимо всякихъ ур-н. Пьезометрическая же линия измѣнится слѣдующимъ образомъ: въ точкѣ *m* ея ступень увеличится; часть ея выше крана вся приподыметъ, а часть ниже крана спустится,—конечно, кромѣ самой конечной точки *q*; соотношенія между уклонами отдѣльныхъ частей останутся тѣ же, но все уклоны уменьшатся; въ итогѣ пьезометрическая линия вся нѣсколько выравнивается и выпрямится, съ болѣе рѣзкой ступенью у крана.

Для простоты дальнѣйшаго изложенія вернемся къ случаю трубы одного и того же діаметра по схемѣ фиг. 141. Ур-е (24) придется переписать для этого случая, очевидно, такъ:

$$h = H_A - H_B \left[ 1 + \zeta_1 + \sum \zeta_2 + \zeta_3 + \frac{4L}{D} \right] \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (25)$$

что легко также получить изъ (20) и (22), складывая ихъ и замѣчая по чертежу, что

$$h' + h'' = h.$$

Ур-е (25) даетъ такимъ образомъ связь между вертикальнымъ разстояніемъ между уровнями двухъ сосудовъ, сообщенныхъ трубою, скоростью и всеми потерями напора; оно является основнымъ для расчета водопроводовъ.

Очень часто, при достаточно длинной трубѣ, величина  $(1 + \zeta_1 + \sum \zeta_2)$  оказывается настолько малой по сравненію съ членомъ  $\zeta_3 + \frac{4L}{D}$ , что ее можно прямо отбрасывать, и тогда ур-е (25) обращается въ ур-е (23), гдѣ вмѣсто *h'* нужно будетъ поставить *h*.

Полезно взглянуть въ ур-я (21) и (25). Изъ послѣдняго слѣдуетъ, что если данъ располагаемый напоръ *h* и дана труба, т.е. детально извѣстна конетрукція ея, то для *v* получается вполне опредѣленная величина. По такой трубѣ можетъ пройти только одинъ опредѣленный расходъ; большіи расходъ, т.е. большая скорость, могутъ быть созданы только помощью большаго напора, т.е. путемъ или повышения уровня *A*, или пониженія уровня *B*. Въ обоихъ случаяхъ напорная линия падаетъ въ трубѣ быстрее, нежели то было до увеличенія расхода, ибо, какъ видно изъ (21), при заданномъ расположеніи трубы (при заданныхъ *H*<sub>1</sub> и *H*<sub>2</sub>) все сопротивленія преодолеваются за счетъ той части напора, которая остается въ трубѣ подъ видомъ избытка давления  $\left( \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} \right)$ ; чѣмъ больше потери, тѣмъ быстрее падаетъ давленіе въ трубѣ. Такимъ образомъ, если помощью работы насосовъ или какъ-нибудь иначе горизонтъ въ первомъ резервуарѣ поддерживается на постоянной высотѣ *H*<sub>А</sub>, то при разныхъ расходахъ въ другомъ резервуарѣ устанавливается всякий разъ тоже опредѣленный уровень *H*<sub>В</sub>, тѣмъ ниже, чѣмъ больше расходъ. Ясно, что вмѣстѣ съ этимъ пьезометрическая линия на всемъ протяженіи тоже видоизмѣняется.

Ур-е (25) имѣетъ силу, очевидно, и въ томъ случаѣ, если резервуаръ *B* фактически отсутствуетъ. Если при этомъ труба открыта полнымъ съ-

чениемъ, то  $p_2 = p_0$ , и изъ ур-я (25) слѣдуетъ, что все вертикальное расстояние отъ горизонта до устья трубы идетъ на сообщеніе водѣ живой силы и на работу сопротивленій: въ концѣ трубы не окажется никакого избытка давления. Если труба оканчивается мундштукомъ или вообще отверстиемъ, меньшимъ самой трубы, то этимъ вносится особое сопротивленіе, которое нужно не забыть ввести въ сумму  $\Sigma \zeta$ , — ур-е же сохраняетъ старый видъ: въ немъ попрежнему  $p_2 = p_0$ , но это значитъ только, что атмосферное давленіе имѣетъ мѣсто въ самомъ отверстіи; въ трубѣ же, непосредственно передъ отверстиемъ, во всякомъ случаѣ остается нѣкоторый свободный избытокъ давления, затрачиваемый на повышеніе скорости до того ея значенія, которое она имѣетъ въ мундштукѣ, и на связанную съ этимъ потерю напора.

Ур-я (25) или (23) служатъ для расчета простыхъ водопроводовъ. При этомъ можетъ представиться два рода вопросовъ:

1) *Труба существуетъ*, — слѣдовательно, даны  $L$  и  $D$ , а также всѣ обстоятельства движенія по трубѣ (особыя сопротивленія). Требуется пропустить черезъ нее  $Q$  *мтр<sup>3</sup>/сек* воды; каковъ долженъ быть для этого напоръ  $H_A - H_n$ ?

Прежде всего имѣемъ для скорости  $v$ :

$$v = \frac{Q}{\pi D^2}$$

Далѣе, отбрасываемъ особыя сопротивленія, т.-е. находимъ  $\zeta_r$  и  $\Sigma \zeta$ . Затѣмъ беремъ по Дарси:

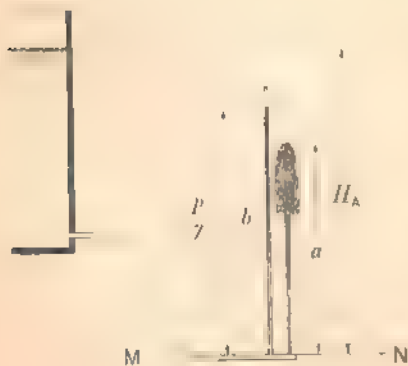
$$\zeta_r = a \cdot \frac{b}{D},$$

или по Вейсбаху

$$\zeta_r = a' \frac{b^3}{v^5};$$

и теперь получаемъ возможность при помощи ур. (25) найти требуемый напоръ. При большомъ  $L$  и маломъ  $v$  можно, съ достаточной степенью точности, пользоваться просто ур-емъ (23).

Вопросъ можетъ быть нѣсколько видоизмѣненъ тѣмъ, что конецъ трубы  $D$  (фиг. 141) не примыкаетъ къ другому резервуару, а имѣетъ отверстие, черезъ которое должна вытекать струя съ условіемъ возможности подняться на нѣкоторую данную высоту  $a$  (фиг. 143). Если отвлечься отъ сопротивленія воздуха и если ско-



Фиг. 143.

рость вытекания из отверстия есть  $v_1$ , то высота подъема струи, равная скоростному напору, будетъ:

$$a = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Отсюда узнаемъ  $v_1$ . Далѣе, чтобы эта скорость была развита, передъ отверстиемъ должно быть такое давление  $\frac{p_2}{\gamma}$  (въ пьезометрѣ вода поднимается на высоту  $\frac{p_2}{\gamma} - b$ , гдѣ  $b$  есть высота барометрическаго давленія), чтобы, по законамъ истечения, удовлетворялось уравненіе:

$$v_1 = a \sqrt{2g \left( \frac{p_2}{\gamma} - b \right)}.$$

Отсюда найдемъ необходимое  $\frac{p_2}{\gamma}$ . Наконецъ, необходимый напоръ  $H_1$  въ началѣ трубы, считая его надъ горизонтомъ  $MM$ , будетъ:

$$H_1 = \left( \frac{p_2}{\gamma} - b \right) + \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \zeta + \sum \zeta + \frac{4L}{D} \right),$$

гдѣ  $v$  есть скорость въ трубѣ. Очевидно, что если  $f$  есть заданная площадь отверстия, а  $F$  есть сѣченіе трубы, то соотношеніе между  $v_1$  и  $v$ , а также ихъ связь съ расходомъ даются уравненіемъ:

$$Q = Fv = \mu_{\text{масс. эк.}} \cdot f v_1.$$

Расходъ получаетъ такимъ образомъ вполне определенное значеніе.

Никакого затрудненія не представляетъ вопросъ, если онъ поставленъ такъ: даны  $L$  и  $D$ , а также располагаемый напоръ  $h$ ; требуется определить расходъ  $Q$ , который при этихъ условіяхъ можетъ быть пропущенъ трубою. Такъ какъ  $v$  неизвѣстно, то формулой Вейбаха (стр. 248) пользоваться здѣсь неудобно, — лучше брать  $\zeta$ , по Дарси. Затѣмъ по ур-ю (25) или (23) непосредственно находимъ  $v$ , а по нему и  $Q$ .

Большое облегченіе при рѣшеніи этихъ вопросовъ приносятъ ниже помѣщаемая таблица 39.

Въ этой таблицѣ для трубъ разныхъ диаметровъ отъ 13 *mm* ( $\frac{1}{2}$ " ) до 2,5 *mtr* (1-й столбецъ) и для разныхъ скоростей отъ 0,05 до 4 *mtr sec* (2-й столбецъ) подсчитаны секундные расходы въ литрахъ (3-й столбецъ) и потерянные на трение напоры на длинѣ трубы въ 100 *mtr* (5-й столбецъ). При этомъ значенія коэффициентовъ сопротивленій  $\zeta$  (4-й столбецъ) мы взяли по даннымъ Фаннинга (см. уже упомянутое сочиненіе его «Hydraulic and Water-Supply Engineering», изданіе 15-е отъ 1902 года). Значеніе 6-го столбца таблицы выяснится ниже. Пользованіе таблицей настолько просто, что не требуетъ поясненій. Она особенно полезна, если длина трубы такъ велика, что суммой  $(1 + \zeta + \sum \zeta)$  можно, по сравненію съ  $\zeta \frac{4L}{D}$ , пренебречь.

Таблица 39 (по Фаннингу)

для расчета водопроводных труб.

$D$ <i>intr.</i>	$v$ <i>intr./sec.</i>	$Q$ <i>intr./sec.</i>	$S$	Потеря напора въ <i>mgr</i> на 100 <i>mgr</i> длины трубы.	$l^2$
0,013	0,05	0,00657	0,01164	0,04564	0,000000097
1 "	0,10	0,01314	0,01926	0,1717	
2	0,15	0,01991	0,01045	0,387	
	0,20	0,02655	0,01020	0,698	
	0,25	0,03318	0,00978	0,986	
	0,30	0,03982	0,00953	1,345	
	0,35	0,04646	0,00948	1,778	
	0,40	0,05310	0,00956	2,278	
	0,45	0,05974	0,00976	2,841	
	0,50	0,06637	0,00999	3,469	
	0,55	0,07301	0,01024	4,161	
	0,60	0,07964	0,01051	4,919	
	0,65	0,08628	0,01078	5,744	
	0,70	0,09291	0,01106	6,637	
	0,75	0,09955	0,01134	7,599	
	0,80	0,10618	0,01162	8,631	
	0,85	0,11282	0,01190	9,734	
	0,90	0,11945	0,01218	10,908	
	0,95	0,12609	0,01246	12,154	
	1,00	0,13272	0,01274	13,472	
	1,05	0,13936	0,01302	14,863	
	1,10	0,14600	0,01330	16,327	
	1,15	0,15263	0,01358	17,865	
	1,20	0,15927	0,01386	19,478	
	1,25	0,16590	0,01414	21,167	
	1,30	0,17254	0,01442	22,932	
	1,35	0,17917	0,01470	24,774	
	1,40	0,18581	0,01498	26,694	
	1,45	0,19244	0,01526	28,693	
	1,50	0,19908	0,01554	30,772	
	1,55	0,20571	0,01582	32,931	
	1,60	0,21235	0,01610	35,171	
	1,65	0,21898	0,01638	37,492	
	1,70	0,22562	0,01666	39,895	
	1,75	0,23225	0,01694	42,380	
	1,80	0,23889	0,01722	44,947	
	1,85	0,24552	0,01750	47,597	
	1,90	0,25216	0,01778	50,330	
	1,95	0,25879	0,01806	53,147	
	2,00	0,26543	0,01834	56,048	
	2,05	0,27206	0,01862	59,034	
	2,10	0,27870	0,01890	62,105	
	2,15	0,28533	0,01918	65,262	
	2,20	0,29197	0,01946	68,505	
	2,25	0,29860	0,01974	71,835	
	2,30	0,30524	0,02002	75,252	
	2,35	0,31187	0,02030	78,757	
	2,40	0,31851	0,02058	82,350	
	2,45	0,32514	0,02086	86,032	
	2,50	0,33178	0,02114	89,803	
	2,55	0,33841	0,02142	93,664	
	2,60	0,34505	0,02170	97,615	
	2,65	0,35168	0,02198	101,657	
	2,70	0,35832	0,02226	105,790	
	2,75	0,36495	0,02254	110,014	
	2,80	0,37159	0,02282	114,329	
	2,85	0,37822	0,02310	118,735	
	2,90	0,38486	0,02338	123,232	
	2,95	0,39149	0,02366	127,820	
	3,00	0,39813	0,02394	132,499	
	3,05	0,40476	0,02422	137,269	
	3,10	0,41140	0,02450	142,130	
	3,15	0,41803	0,02478	147,082	
	3,20	0,42467	0,02506	152,125	
	3,25	0,43130	0,02534	157,260	
	3,30	0,43794	0,02562	162,486	
	3,35	0,44457	0,02590	167,803	
	3,40	0,45121	0,02618	173,212	
	3,45	0,45784	0,02646	178,713	
	3,50	0,46448	0,02674	184,306	
	3,55	0,47111	0,02702	190,000	
	3,60	0,47775	0,02730	195,795	
	3,65	0,48438	0,02758	201,691	
	3,70	0,49102	0,02786	207,688	
	3,75	0,49765	0,02814	213,785	
	3,80	0,50429	0,02842	219,982	
	3,85	0,51092	0,02870	226,280	
	3,90	0,51756	0,02898	232,678	
	3,95	0,52419	0,02926	239,176	
	4,00	0,53083	0,02954	245,774	0,00000187
0,025	0,5	0,02454	0,01116	0,00227	0,00000265
	0,10	0,04909	0,01038	0,6863	
	0,15	0,07363	0,00928	0,1835	
	0,20	0,09818	0,00848	0,2394	
	0,25	0,12272	0,00807	0,4623	
	0,30	0,14727	0,00885	0,6499	
	0,35	0,17181	0,00848	1,117	
	0,40	0,19636	0,00820	1,672	
	0,45	0,22090	0,00796	2,337	
	0,50	0,24545	0,00780	3,117	
	0,55	0,27000	0,00763	3,982	
	0,60	0,29454	0,00751	4,960	
	0,65	0,31909	0,00739	6,060	
	0,70	0,34363	0,00710	7,347	
	0,75	0,36818	0,00688	8,863	
	0,80	0,39272	0,00671	10,676	
	0,85	0,41727	0,00657	12,744	
	0,90	0,44181	0,00641	15,117	
	0,95	0,46636	0,00627	17,803	
	1,00	0,49090	0,00614	20,809	
	1,05	0,51545	0,00602	24,144	
	1,10	0,54000	0,00593	27,809	
	1,15	0,56454	0,00586	31,804	
	1,20	0,58909	0,00580	36,139	
	1,25	0,61363	0,00574	40,814	
	1,30	0,63818	0,00569	45,829	
	1,35	0,66272	0,00564	51,184	
	1,40	0,68727	0,00560	56,879	
	1,45	0,71181	0,00556	62,914	
	1,50	0,73636	0,00552	69,299	
	1,55	0,76090	0,00548	76,034	
	1,60	0,78545	0,00544	83,119	
	1,65	0,81000	0,00540	90,554	
	1,70	0,83454	0,00536	98,339	
	1,75	0,85909	0,00532	106,474	
	1,80	0,88363	0,00528	114,959	
	1,85	0,90818	0,00524	123,794	
	1,90	0,93272	0,00520	132,979	
	1,95	0,95727	0,00516	142,514	
	2,00	0,98181	0,00512	152,400	
	2,05	1,00636	0,00508	162,635	
	2,10	1,03090	0,00504	173,220	
	2,15	1,05545	0,00500	184,155	
	2,20	1,08000	0,00496	195,440	
	2,25	1,10454	0,00492	207,075	
	2,30	1,12909	0,00488	219,060	
	2,35	1,15363	0,00484	231,395	
	2,40	1,17818	0,00480	244,080	
	2,45	1,20272	0,00476	257,115	
	2,50	1,22727	0,00472	270,500	
	2,55	1,25181	0,00468	284,235	
	2,60	1,27636	0,00464	298,320	
	2,65	1,30090	0,00460	312,755	
	2,70	1,32545	0,00456	327,540	
	2,75	1,35000	0,00452	342,675	
	2,80	1,37454	0,00448	358,160	
	2,85	1,39909	0,00444	373,995	
	2,90	1,42363	0,00440	390,180	
	2,95	1,44818	0,00436	406,715	
	3,00	1,47272	0,00432	423,600	
	3,05	1,49727	0,00428	440,835	
	3,10	1,52181	0,00424	458,420	
	3,15	1,54636	0,00420	476,355	
	3,20	1,57090	0,00416	494,640	
	3,25	1,59545	0,00412	513,275	
	3,30	1,62000	0,00408	532,260	
	3,35	1,64454	0,00404	551,595	
	3,40	1,66909	0,00400	571,280	
	3,45	1,69363	0,00396	591,315	
	3,50	1,71818	0,00392	611,700	
	3,55	1,74272	0,00388	632,435	
	3,60	1,76727	0,00384	653,520	
	3,65	1,79181	0,00380	674,955	
	3,70	1,81636	0,00376	696,740	
	3,75	1,84090	0,00372	718,875	
	3,80	1,86545	0,00368	741,360	
	3,85	1,89000	0,00364	764,195	
	3,90	1,91454	0,00360	787,380	
	3,95	1,93909	0,00356	810,915	
	4,00	1,96363	0,00352	834,800	0,00000498

Таблица 39 (продолжение).

$D$ <i>mt.</i>	$v$ <i>mt. sec.</i>	$Q$ <i>lit. sec.</i>	$\zeta_r$	Потеря напора въ <i>mt.</i> на 100 <i>mt.</i> длины трубы.	$\frac{Q^2}{l}$
0,038 (1 1/2")	0,05	0,05671	0,01091	0,01453	0,000022
	0,10	0,1134	0,01020	0,05472	
	0,15	0,1701	0,00960	0,1159	
	0,20	0,2268	0,00915	0,1964	
	0,25	0,2835	0,00881	0,2954	
	0,30	0,3402	0,00857	0,4138	
	0,40	0,4737	0,00821	0,7048	
	0,50	0,5971	0,00798	1,070	
	0,60	0,6905	0,00776	1,499	
	0,70	0,7939	0,00759	1,995	
	0,80	0,9073	0,00742	2,548	
	0,90	1,021	0,00729	3,168	
	1,00	1,134	0,00717	3,847	
	1,25	1,418	0,00692	5,801	
	1,50	1,701	0,00671	8,200	
	1,75	1,985	0,00655	10,76	
	2,00	2,263	0,00641	13,76	
	2,50	2,835	0,00619	20,76	
	3,00	3,402	0,00602	29,07	
	3,50	3,969	0,00591	38,84	
4,00	4,537	0,00583	50,05	0,00004046	
0,05	0,05	0,09818	0,01153	0,0107	0,0000901
	0,10	0,1964	0,00970	0,0336	
	0,15	0,2945	0,00913	0,0838	
	0,20	0,3927	0,00880	0,1506	
	0,25	0,4909	0,00849	0,2164	
	0,30	0,5891	0,00828	0,3038	
	0,40	0,7854	0,00794	0,5180	
	0,50	0,9818	0,00773	0,7878	
	0,60	1,178	0,00754	1,107	
	0,70	1,375	0,00738	1,475	
	0,80	1,571	0,00722	1,884	
	0,90	1,767	0,00712	2,351	
	1,00	1,964	0,00702	2,862	
	1,25	2,454	0,00677	4,313	
	1,50	2,945	0,00660	6,056	
	1,75	3,436	0,00643	8,030	
	2,00	3,927	0,00630	10,78	
	2,50	4,909	0,00609	15,52	
	3,00	5,891	0,00595	21,83	
	3,50	6,872	0,00584	29,17	
4,00	7,854	0,00577	37,64	0,000164	



Таблица 39 (продолжение).

<i>D</i> mtr.	<i>v</i> mtr./sec.	<i>Q</i> litr./sec.	$\xi_r$	Потеря напора въ <i>mtr</i> на 100 <i>mtr</i> длины трубы.	$\frac{Q^3}{i}$
0,075	0,05	0,2209	0,01025	0,006986	0,000700
	0,10	0,4418	0,00941	0,02558	
	0,15	0,6627	0,00888	0,05431	
	0,20	0,8836	0,00847	0,09210	
	0,25	1,105	0,00817	0,1499	
	0,30	1,325	0,00794	0,1943	
	0,40	1,767	0,00760	0,3305	
	0,50	2,209	0,00738	0,5015	
	0,60	2,651	0,00722	0,7065	
	0,70	3,093	0,00708	0,9430	
	0,80	3,534	0,00695	1,209	
	0,90	3,976	0,00686	1,511	
	1,00	4,418	0,00676	1,838	
	1,25	5,522	0,00655	2,782	
	1,50	6,627	0,00638	2,902	
	1,75	7,731	0,00624	5,195	
	2,00	8,836	0,00613	6,665	
	2,50	11,05	0,00593	10,08	
	3,00	13,25	0,00582	14,24	
	3,50	15,46	0,00571	19,01	
4,00	17,67	0,00566	24,62	0,00127	
0,100	0,05	0,3927	0,00974	0,004964	0,00311
	0,10	0,7854	0,00900	0,01835	
	0,15	1,178	0,00853	0,03913	
	0,20	1,571	0,00818	0,06671	
	0,25	1,964	0,00787	0,1003	
	0,30	2,356	0,00767	0,1407	
	0,40	3,142	0,00736	0,2401	
	0,50	3,927	0,00715	0,3644	
	0,60	4,712	0,00699	0,5130	
	0,70	5,498	0,00685	0,6843	
	0,80	6,283	0,00673	0,8781	
	0,90	7,069	0,00664	1,096	
	1,00	7,854	0,00655	1,335	
	1,25	9,818	0,00636	2,026	
	1,50	11,78	0,00620	2,844	
	1,75	13,74	0,00607	3,790	
	2,00	15,71	0,00596	4,860	
	2,50	19,64	0,00578	7,365	
	3,00	23,56	0,00567	10,40	
	3,50	27,49	0,00560	13,99	
4,00	31,42	0,00555	18,10	0,00545	

Таблица 39 (продолженіе).

<i>D</i> mtr.	<i>v</i> mtr/sec.	<i>Q</i> litr/sec	$\zeta$ ,	Потеря напора въ мтр на 100 мтр длины трубы.	$Q^3$ $\zeta$
0,150	0,05	0,8836	0,00892	0,003031	0,0258
	0,10	1,767	0,00835	0,01133	
	0,15	2,651	0,00799	0,02443	
	0,20	3,534	0,00766	0,04164	
	0,25	4,418	0,00746	0,06337	
	0,30	5,301	0,00725	0,08868	
	0,40	7,069	0,00697	0,1516	
	0,50	8,836	0,00678	0,2297	
	0,60	10,60	0,00662	0,3239	
	0,70	12,37	0,00650	0,4329	
	0,80	14,14	0,00639	0,5558	
	0,90	15,90	0,00631	0,6947	
	1,00	17,67	0,00624	0,8481	
	1,25	22,09	0,00606	1,287	
	1,50	26,51	0,00593	1,813	
	1,75	30,93	0,00581	2,418	
	2,00	35,34	0,00572	3,110	
	2,50	44,18	0,00558	4,740	
	3,00	53,01	0,00548	6,703	
	3,50	61,85	0,00542	9,024	
4,00	70,69	0,00537	11,68	0,0428	
0,200	0,05	1,571	0,00916	0,002080	0,1187
	0,10	3,142	0,00768	0,007824	
	0,15	4,712	0,00742	0,01702	
	0,20	6,283	0,00719	0,02932	
	0,25	7,854	0,00700	0,04480	
	0,30	9,425	0,00689	0,06312	
	0,40	12,57	0,00664	0,1081	
	0,50	15,71	0,00646	0,1646	
	0,60	18,85	0,00633	0,2323	
	0,70	21,99	0,00622	0,3107	
	0,80	25,13	0,00612	0,3993	
	0,90	28,27	0,00603	0,4995	
	1,00	31,42	0,00598	0,6096	
	1,25	39,27	0,00582	0,9270	
	1,50	47,12	0,00570	1,307	
	1,75	54,96	0,00559	1,745	
	2,00	62,83	0,00552	2,251	
	2,50	78,54	0,00539	3,434	
	3,00	94,25	0,00532	4,881	
	3,50	110,0	0,00527	6,581	
4,00	125,7	0,00522	8,514	0,1856	

Таблица 39 (продолжение).

<i>D mtr.</i>	<i>v mtr. sec.</i>	<i>Q liter sec.</i>	$\xi$	Потеря напора въ <i>mtr</i> на 100 <i>mtr</i> длины трубы.	$\frac{Q^2}{s}$
0,25	0,05	2,154	0,00779	0,001588	0,3792
	0,10	4,909	0,01736	0,006002	
	0,15	7,663	0,0309	0,01301	
	0,20	9,818	0,04686	0,02238	
	0,25	12,27	0,0667	0,03400	
	0,30	14,73	0,0906	0,04815	
	0,40	19,64	0,0133	0,08259	
	0,50	24,54	0,017	0,1258	
	0,60	29,45	0,0206	0,1779	
	0,70	34,36	0,02596	0,2382	
	0,80	39,27	0,03187	0,3064	0,5826
	0,90	44,18	0,0381	0,3838	
	1,00	49,09	0,04576	0,4697	
	1,25	61,36	0,0562	0,7161	
	1,50	73,63	0,0752	1,013	
	1,75	85,90	0,10343	1,356	
	2,00	98,18	0,14036	1,748	
	2,50	122,7	0,21524	2,671	
	3,00	147,3	0,30517	3,795	
	3,50	171,8	0,41512	5,115	
4,00	196,4	0,5507	6,615		
0,300	0,05	3,534	0,00737	0,001252	0,9975
	0,10	7,669	0,0174	0,004716	
	0,15	10,60	0,03072	0,01028	
	0,20	14,14	0,04655	0,01780	
	0,25	17,67	0,0638	0,02710	
	0,30	21,21	0,0928	0,03841	
	0,40	28,27	0,1307	0,06600	
	0,50	35,34	0,17943	0,1007	
	0,60	42,41	0,23883	0,1426	
	0,70	49,48	0,30874	0,1911	
	0,80	56,55	0,38966	0,2462	1,485
	0,90	63,62	0,48260	0,3183	
	1,00	70,69	0,58756	0,4078	
	1,25	88,36	0,80543	0,5766	
	1,50	106,03	0,10554	0,8165	
	1,75	123,7	0,13526	1,095	
	2,00	141,4	0,17520	1,414	
	2,50	176,7	0,25311	2,170	
	3,00	212,1	0,36004	3,083	
	3,50	247,4	0,49498	4,146	
4,00	282,7	0,65495	5,382		

Таблица 39 (продолжение).

<i>D</i> , mtr.	<i>v</i> , mtr. sec.	<i>q</i> , ltr. sec.	<i>S<sub>r</sub></i>	Потери напора въ mtr на 100 mtr длины трубы.	$Q^3$
0,35	0,05	4,811	0,00709	0,001032	2,240
	0,10	9,621	0,00666	0,003879	
	0,15	14,43	0,00642	0,008414	
	0,20	19,24	0,00625	0,01456	
	0,25	24,05	0,00612	0,02228	
	0,30	28,86	0,00603	0,03161	
	0,40	38,49	0,00586	0,05462	
	0,50	48,11	0,00573	0,08344	
	0,60	57,73	0,00564	0,1246	
	0,70	67,33	0,00556	0,1587	
	0,80	76,97	0,00548	0,2043	
	0,90	89,59	0,00542	0,2557	
	1,00	96,21	0,00538	0,3134	
	1,25	120,3	0,00528	0,4787	
	1,50	144,3	0,00518	0,6789	
	1,75	168,4	0,00511	0,9116	
	2,00	192,4	0,00506	1,179	
	2,50	240,5	0,00498	1,813	
	3,00	288,6	0,00492	2,579	
	3,50	336,7	0,00487	3,475	
4,00	384,8	0,00483	4,502	3,289	
0,4	0,05	6,283	0,00679	0,0008652	4,564
	0,10	12,57	0,00636	0,003242	
	0,15	18,85	0,00611	0,007007	
	0,20	25,13	0,00598	0,01219	
	0,25	31,42	0,00587	0,01870	
	0,30	37,70	0,00580	0,02661	
	0,40	50,27	0,00566	0,04616	
	0,50	62,83	0,00555	0,07072	
	0,60	75,40	0,00546	0,1002	
	0,70	87,97	0,00538	0,1344	
	0,80	100,5	0,00531	0,1732	
	0,90	113,1	0,00526	0,2172	
	1,00	125,7	0,00522	0,2661	
	1,25	157,1	0,00511	0,4070	
	1,50	188,5	0,00504	0,5780	
	1,75	219,9	0,00498	0,7773	
	2,00	251,3	0,00493	1,005	
	2,50	314,2	0,00485	1,547	
	3,00	377,0	0,00481	2,206	
	3,50	439,8	0,00477	2,978	
4,00	502,7	0,00473	3,857	6,562	

Таблица 39 (продолжение).

<i>D mtr.</i>	<i>v mtr/sec.</i>	<i>Q litr/sec.</i>	<i>z</i>	Потеря напора въ <i>mtr</i> на 100 <i>mtr</i> длины трубы.	<i>Q<sup>2</sup></i>
0,500	0,05	9,818	0,00629	0,0006412	15,63
	0,10	19,64	0,00595	0,002426	
	0,15	29,45	0,00574	0,005266	
	0,20	39,27	0,00559	0,009117	
	0,25	49,09	0,00547	0,01394	
	0,30	58,91	0,00540	0,01982	
	0,40	78,54	0,00528	0,03445	
	0,50	98,18	0,00519	0,05291	
	0,60	117,8	0,00512	0,07516	
	0,70	137,4	0,00505	0,1009	
	0,80	157,1	0,00500	0,1305	
	0,90	176,7	0,00496	0,1638	
	1,00	194,4	0,00492	0,2006	
	1,25	245,4	0,00484	0,3084	
	1,50	294,5	0,00479	0,4395	
	1,75	343,6	0,00474	0,5919	
	2,00	392,7	0,00470	0,7660	
	2,50	490,9	0,00464	1,183	
	3,00	589,0	0,00460	1,688	
	3,50	687,2	0,00456	2,278	
4,00	785,4	0,00453	2,955	20,67	
0,800	0,05	14,14	0,00595	0,0005054	39,56
	0,10	28,27	0,00547	0,001859	
	0,15	42,41	0,00530	0,004052	
	0,20	56,55	0,00520	0,007068	
	0,25	70,69	0,00511	0,01085	
	0,30	84,82	0,00506	0,01547	
	0,40	113,1	0,00496	0,02697	
	0,50	141,4	0,00487	0,04137	
	0,60	169,6	0,00482	0,05896	
	0,70	197,9	0,00477	0,07942	
	0,80	226,2	0,00472	0,1026	
	0,90	254,5	0,00468	0,1289	
	1,00	282,7	0,00466	0,1588	
	1,25	363,4	0,00460	0,2442	
	1,50	424,1	0,00455	0,3479	
	1,75	494,8	0,00452	0,4704	
	2,00	565,5	0,00449	0,6103	
	2,50	706,9	0,00443	0,9402	
	3,00	848,2	0,00439	1,343	
	3,50	989,6	0,00436	1,815	
4,00	1131	0,00434	2,359	54,22	

Таблица 39 (продолжение).

<i>D</i> mtr.	<i>v</i> mtr sec.	<i>q</i> litr sec.	$\xi$	Потери напора въ mtr на 100 mtr длины трубы.	$\frac{q^2}{v}$
0,700	0,05	19,24	0,00549	0,0003997	32,61
	0,10	38,49	0,00516	0,001503	
	0,15	57,73	0,00501	0,003283	
	0,20	76,97	0,00493	0,005713	
	0,25	96,21	0,00485	0,008828	
	0,30	115,5	0,00479	0,01256	
	0,40	153,9	0,00470	0,02190	
	0,50	192,4	0,00465	0,03371	
	0,60	230,9	0,00457	0,04792	
	0,70	269,4	0,00453	0,06464	
	0,80	307,9	0,00450	0,08388	
	0,90	346,4	0,00448	0,1057	
	1,00	384,8	0,00445	0,1296	
	1,25	481,1	0,00441	0,2007	
	1,50	577,3	0,00436	0,2857	
	1,75	673,5	0,00434	0,3871	
	2,00	769,7	0,00431	0,5021	
	2,50	962,1	0,00427	0,7773	
	3,00	1155	0,00423	1,109	
	3,50	1347	0,00420	1,498	
4,00	1539	0,00418	1,948	121,6	
0,800	0,05	25,11	0,00502	0,0003198	197,5
	0,10	50,27	0,00485	0,001236	
	0,15	75,40	0,00473	0,002712	
	0,20	100,5	0,00464	0,004730	
	0,25	125,7	0,00458	0,007295	
	0,30	150,8	0,00453	0,01039	
	0,40	201,1	0,00446	0,01819	
	0,50	251,3	0,00441	0,2810	
	0,60	301,6	0,00437	0,04669	
	0,70	351,9	0,00434	0,05419	
	0,80	402,1	0,00431	0,07050	
	0,90	452,4	0,00429	0,08836	
	1,00	502,7	0,00427	0,1088	
	1,25	628,3	0,00423	0,1684	
	1,50	754,0	0,00419	0,2403	
	1,75	879,6	0,00417	0,3254	
	2,00	1005	0,00415	0,4230	
	2,50	1257	0,00411	0,6516	
	3,00	1508	0,00407	0,9395	
	3,50	1759	0,00404	1,261	
4,00	2011	0,00402	1,639	246,7	

Таблица 39 (продолжение).

<i>D</i> mtr.	<i>v</i> mtr sec.	<i>Q</i> litr sec.	$\zeta$	Потеря напора въ <i>mtr</i> на 100 <i>mtr</i> длины трубы.	$Q^2$	
0,900	0,15	95,43	0,00444	0,002263	402,4	
	0,20	127,2	0,00438	0,003969		
	0,25	159,0	0,00432	0,006116		
	0,30	190,9	0,00428	0,008726		
	0,40	254,5	0,00422	0,01530		
	0,50	318,1	0,00419	0,02373		
	0,75	477,1	0,00413	0,05662		
	1,0	636,2	0,00409	0,09265		
	1,25	795,2	0,00406	0,1437		
	1,50	954,3	0,00403	0,2054		
	2,00	1272	0,00399	0,3615		
	2,50	1590	0,00395	0,5592		
	3,00	1909	0,00391	0,7971		
	3,50	2227	0,00388	1,077		
	4,00	2545	0,00386	1,399		462,9
	1,000	0,15	117,8	0,00421		0,001931
0,20		157,1	0,00416	0,003392		
0,25		196,4	0,00412	0,005250		
0,30		235,6	0,00408	0,007486		
0,40		314,2	0,00404	0,01318		
0,50		392,7	0,00401	0,02044		
0,75		589,0	0,00395	0,04530		
1,00		785,4	0,00392	0,07992		
1,25		981,7	0,00389	0,1239		
1,50		1178	0,00386	0,1771		
2,00		1571	0,00384	0,3132		
2,50		1963	0,00381	0,4855		
3,00		2356	0,00379	0,6936		
3,50		2749	0,00376	0,9365		
4,00		3142	0,00374	1,220	809,0	
1,200		0,15	169,6	0,00383	0,001464	1964
	0,20	226,2	0,00380	0,002582		
	0,25	282,7	0,00378	0,004014		
	0,30	339,3	0,00375	0,005734		
	0,40	452,4	0,00372	0,01011		
	0,50	565,5	0,00370	0,01572		
	0,75	848,2	0,00366	0,03498		
	1,00	1131	0,00363	0,06167		
	1,25	1414	0,00362	0,09610		
	1,50	1696	0,00360	0,1376		
	2,00	2262	0,00358	0,2433		
	2,50	2827	0,00355	0,3770		
	3,00	3393	0,00352	0,5382		
	3,50	3958	0,00350	0,7284		
	4,00	4524	0,00349	0,9487	2156	

Таблица 39 (продолженіе \*).

<i>D</i> mtr.	<i>v</i> mtr sec.	<i>Q</i> litr sec.	$\frac{Q^2}{D^5}$	Потеря напора въ мѣр въ 100 мѣр длины трубы.	$\frac{Q^2}{i}$
1,500	0,15	265,1	0,00342	0,001346	6713
	0,25	441,8	0,00339	0,002880	
	0,50	893,6	0,00334	0,01175	
	0,75	1325	0,00332	0,0278	
	1,00	1767	0,00330	0,04485	
	1,50	2651	0,00327	0,1000	7226
	2,00	3534	0,00325	0,1767	
	3,00	5301	0,00321	0,3926	
	4,00	7069	0,00318	0,6915	
1,800	0,15	381,7	0,00314	0,0008002	18210
	0,25	636,2	0,00311	0,002202	
	0,50	1272	0,00306	0,008665	
	0,75	1909	0,00303	0,01930	
	1,00	2545	0,00300	0,03398	
	1,50	3817	0,00297	0,07569	19312
	2,00	5089	0,00295	0,1337	
	3,00	7634	0,00293	0,2987	
	4,00	10179	0,00293	0,5310	
2,400	0,15	678,6	0,00272	0,0005199	48574
	0,25	1131	0,00269	0,001428	
	0,50	2262	0,00265	0,005628	
	0,75	3393	0,00264	0,01262	
	1,00	4524	0,00263	0,02234	
	1,50	6786	0,00262	0,05008	49030
	2,00	9048	0,00261	0,08874	
	3,00	13572	0,00260	0,1988	
	4,00	18096	0,00259	0,3520	

Для сравненія этихъ данныхъ съ приведенными выше въ § 21, приводимъ слѣдующую сравнительную таблицу, въ которой подсчитаны для нѣсколькихъ диаметровъ и нѣ-

\* При вычисленія послѣдняго вертикальнаго столбца  $\frac{Q^2}{i}$  во всей таблицѣ 39 расходъ *Q* былъ выраженъ не въ литрахъ, а въ кубическихъ метрахъ



сколько скоростей потери напора на 100 *mts* длины трубы по нормам Вейсбаха, Дарси, Фламана, Кристеня, Зонне и Фаннинга. При этом Вейсбах не характеризует степени загрязненя, но несомненно имѣть въ виду высокую степень шероховатости: данные Фламана относятся къ загрязненнымъ трубамъ, но безъ стѣсненя ихъ сѣченя; данные прочихъ авторовъ относятся къ чистымъ трубамъ.

	Диаметръ 0,1 <i>mts</i>			Диаметръ 0,25 <i>mts</i>		
	$v = 0,1$ <i>mts sec</i>	$v = 1,0$	$v = 2$	$v = 0,1$	$v = 1,0$	$v = 2$
Вейсбахъ . . . . .	0,0226	1,22	4,3	0,0091	0,49	1,72
Дарси . . . . .	0,0127	1,27	5,1	0,0045	0,45	1,79
Фламанъ . . . . .	0,029	1,63	5,5	0,0091	0,52	1,74
Кристенъ . . . . .	0,0129	1,70	5,2	0,0054	0,51	2,18
Зонне . . . . .	0,0133	1,33	5,1	0,0049	0,49	1,97
Фаннингъ . . . . .	0,0184	1,34	4,9	0,0060	0,47	1,75

	Диаметръ 0,5 <i>mts</i>			Диаметръ 0,8 <i>mts</i>		
	$v = 0,1$	$v = 1,0$	$v = 2,0$	$v = 0,2$	$v = 1,0$	$v = 2,0$
Вейсбахъ . . . . .	0,0045	0,24	0,86	0,0091	0,153	0,54
Дарси . . . . .	0,0021	0,21	0,85	0,0052	0,131	0,52
Фламанъ . . . . .	0,0039	0,22	0,74	0,0072	0,121	0,41
Кристенъ . . . . .	0,0023	0,22	0,91	0,0050	0,125	0,50
Зонне . . . . .	0,0022	0,22	0,88	0,0052	0,130	0,52
Фаннингъ . . . . .	0,0024	0,20	0,77	0,0047	0,109	0,42

	Диаметръ 1 <i>mts</i>			Диаметръ 1,2 <i>mts</i>		
	$v = 0,2$	$v = 1,0$	$v = 2,0$	$v = 0,2$	$v = 1,0$	$v = 2,0$
Вейсбахъ . . . . .	0,0073	0,122	0,43	0,0061	0,102	0,36
Дарси . . . . .	0,0041	0,104	0,42	0,0034	0,086	0,34
Фламанъ . . . . .	0,0055	0,092	0,31	0,0023	0,039	0,129
Кристенъ . . . . .	0,0037	0,095	0,37	0,0032	0,081	0,323
Зонне . . . . .	0,0041	0,102	0,41	0,0033	0,083	0,334
Фаннингъ . . . . .	0,0034	0,080	0,31	0,0026	0,062	0,243

Отсюда видно, что вообще по Фаннингу вычисляются несколько меньшие потери напора, нежели по прочим авторам (кроме Фламану). Это особенно замѣтно по сравнению съ Дарси, данные котораго, наоборот, ниже данных Фаннинга только въ малыхъ трубахъ и при малыхъ скоростяхъ. Потери напора по Фламану, особенно при среднихъ диаметрахъ (0,5 до 1 *meter*), довольно близки къ даннымъ Фаннинга, и вообще отличаются отъ данныхъ Дарси въ большей степени, нежели данные Фаннинга. — Наоборотъ, если сравнить данные Фаннинга съ нормами другого американскаго авторитета, H. Smith (см. табл. N 29), то окажется, что при большихъ диаметрахъ и большихъ скоростяхъ послѣдній даетъ еще меньшия потери напора, чѣмъ Фаннингъ, что видно изъ слѣдующей таблички, въ которой сравниваются нѣсколько значений коэф-товъ  $\zeta_r$  Фаннинга съ соответствующимъ коэф-томъ, вычисленнымъ по коэф-ту  $\zeta_r$  Smith'a:  $\zeta_r = \frac{2g}{v^2} - \frac{64}{v^2}$ .

При <i>D</i> въ футахъ	При <i>v</i> въ футахъ въ сек.	Значенія $\zeta_r$		Разница въ значеніи $\zeta_r$ по Фаннингу.
		по Fanning'y.	по Smith'y.	
1	1	0,00326	0,00397	- 11,4
	2	0,00582	0,00598	- 2,75
	3	0,00560	0,00542	- 3,22
	4	0,00544	0,00513	- 5,7
	5	0,00512	0,00452	- 11,7
2	1	0,00503	0,00542	- 7,35
	2	0,00482	0,00479	+ 0,62
	3	0,00461	0,00440	- 6,90
	4	0,00473	0,00418	- 7,15
	5	0,00444	0,00370	- 16,7

Такимъ образомъ, данные Фаннинга являются болѣе или менѣе средними среднми данныхъ рекомендуемыхъ нормъ. Въ силу этого мы на нихъ и остановились при вычисленіи таблицы 39.

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что коэффиціенты таблицы 39 Фаннингъ чптаетъ относящимся къ чистымъ трубамъ, съ малою степенью шероховатости. Если является необходимость считаться съ возможностью котораго загрязненія, то онъ рекомендуетъ увеличивать табличные значения коэффиціента  $\zeta_r$ , а слѣдовательно, и потерянныи напоръ, на слѣдующее число процентовъ (см. табл. 40).

Т а б л и ц а 40:

При диаметрахъ въ <i>mtr</i>	0,1	0,15	0,3	0,6	0,9	1,2
% увеличенія $\zeta_r$ . . .	45	40	33	29	27	25

При болѣе сильномъ загрязненіи цѣлесообразно довести увеличеніе коэффициента сопротивленія даже до 100%.

При оцѣнкѣ вліянія загрязненія слѣдуетъ имѣть въ виду сказанное по этому поводу на стр. 227. Легко усмотрѣть, что одинаковая степень загрязненія, т.-е. одинаковая толщина осадковъ въ трубѣ малаго диаметра вызываетъ относительно большую потерю напора, нежели въ трубѣ большаго диаметра; съ этимъ нужно считаться, если оцѣнка загрязненія дѣлается только въ смыслѣ измѣненія коэффициента тренія.

2) Труба строится. Даны  $Q$  и  $L$ ; кромѣ того, обыкновенно можно выяснитъ величину располагаемаго напора  $h$ , т.-е. тотъ напоръ, который по мѣстнымъ условіямъ можно затратить на преодоленіе сопротивленій и на сообщеніе водѣ скорости. Требуется по этимъ даннымъ найти  $D$  и  $v$ .

Прежде всего, имѣемъ соотношеніе:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v,$$

откуда

$$v^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4}.$$

Введя это въ ур-іе (25), получимъ:

$$h = \left( 1 + \zeta_e + \sum \zeta + \zeta_r \frac{4L}{D} \right) \frac{16Q^2}{2g\tau^2 D^5} \dots \dots \dots (26)$$

При предварительномъ расчетѣ суммой  $(1 + \zeta_e + \sum \zeta)$  пренебрегаютъ, что при большихъ длинахъ трубы  $L$  приводитъ только къ небольшимъ погрѣшностямъ. Тогда ур-іе (26) переходитъ въ ур-іе

$$h = \frac{64}{2g\tau^2} \zeta_r \frac{Q^2 L}{D^5} \dots \dots \dots (27)$$

Отсюда:

$$D = \sqrt[5]{\frac{64}{2g\tau^2} \zeta_r} \sqrt[5]{\frac{Q^2 L}{h}} \dots \dots \dots (27')$$

гдѣ буквой  $i$  обозначено отношеніе  $\frac{h}{L}$ , т.-е. паденіе высоты пьезометра на каждый погонный *mtr* трубы.



(по Вейсбаху оно изменяется вмѣстѣ со скоростью  $v$ , по Дарси — съ диаметромъ  $D$ ), то непосредственно (изъ 27') найти  $D$  нельзя. Приходится идти по способу послѣдовательныхъ приближеній, а именно, нужно задаться какой нибудь величиною  $\zeta_r$ , найти соответствующее ему  $D$ ; по нему исправить заданное  $\zeta_r$ , снова опредѣлить  $D$ . Если полученная такимъ образомъ величина  $D$  мало отличается отъ опредѣленной въ первый разъ, то можно этимъ и ограничиться, въ противномъ случаѣ слѣдуетъ исправить  $\zeta_r$ , и т. д. Въ виду того, что на практикѣ употребительны трубы только нѣкоторыхъ диаметровъ (см. таблицы, разрабатываемыя и издаваемыя Водопроводными (ѣздами), многократныхъ пересчетовъ величины  $D$  дѣлать не приходится.

При этихъ вычисленіяхъ большую помощь оказываетъ 6-й столбецъ вышеприведенной таблицы 39. Вычисляя по заданнымъ  $Q$ ,  $h$  и  $L$  величину  $\frac{LQ^2}{h} = \frac{Q^2}{i}$ , имѣемъ возможность прямо подыскать по таблицѣ подходящий диаметръ. Такъ, напр., пусть секундный расходъ  $Q = 280$  литровъ; это количество воды должно пройти по трубѣ 5 километровъ, а имѣющіеся насосы могутъ развить давленіе только въ двѣ атмосферы. Тогда находимъ  $i = \frac{2 \cdot 10}{5000} = 0,004$ ; такъ что  $\frac{Q^2}{i} = \frac{0,0784}{0,004} = 19,6$ . По таблицѣ видимъ, что труба въ 0,5 *mtr* въ диаметрѣ пропуститъ этотъ расходъ при скорости въ  $1,5 \cdot \frac{208}{294,5} = 1,42$  *mtr* въ секунду, при чемъ двухъ атмосферъ вполне достаточно, такъ какъ необходимо собственно только напоръ  $0,04395 \cdot \frac{1,42^2}{1,5^5} = 0,004$  *mtr* на каждые сто метровъ длины трубы.

Когда выясненъ диаметръ трубы, слѣдуетъ его провѣрить уже по точной формулѣ (26), отбрасывая всѣ потери напора, это особенно необходимо дѣлать, если приближенное ур-іе (27') применялось для предварительнаго расчета короткой трубы, для которой величина  $(1 + \zeta_r + \Sigma \zeta)$  представляется далеко не исчезающей передъ членомъ  $\zeta_r \frac{4L}{D}$ . Такъ, напримѣръ, если мы имѣемъ дѣло съ трубою диаметромъ въ 0,1 *mtr* и длиною въ 100 *mtr*, то, считая, по Фаннингу,  $\zeta_r \sim 0,007$ , получаемъ  $\zeta_r \frac{4L}{D} = 28$ ; между тѣмъ, если считать сопротивленіе при входѣ по насадку Вентури, т. е. если положить  $\zeta_r \sim 0,5$ , и даже допустить, что никакихъ особыхъ сопротивленій на трубѣ нѣтъ, то членъ  $(1 + \zeta_r + \Sigma \zeta)$  по вычисленіи оказывается равнымъ 1,5, = величиной, которой, вообще говоря, не представляется возможнымъ пренебречь передъ 28, — на величинѣ расхода это отразилось бы уменьшеніемъ его въ отношеніи  $\sqrt{\frac{28}{29,5}} = \frac{5,3}{5,44}$ , т. е. почти на 3%. При болѣшихъ диаметрахъ и при болѣе короткихъ трубахъ это обстоятельство выдѣляется еще болѣе рѣзко. Въ такихъ случаяхъ бываетъ, наоборотъ, прѣлесообразнѣе при предварительномъ расчетѣ пренебречь потерей напора на треніе (см. задачу № 33 въ концѣ этой главы), т. е. положить въ ур-іи (26)  $\zeta_r = 0$ , а иногда также и  $\Sigma \zeta = 0$ , и опредѣлять диаметръ уже изъ ур-ія:

$$h = (1 + \zeta_r) \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D^5}$$

Легко видѣть, что это ур-іе не отличается отъ обычнаго ур-ія расхода черезъ насадокъ въ главѣ II мы видѣли, что существуетъ соотношеніе

$$1 \quad \zeta_r = \frac{1}{\mu^2},$$

коль скоро при выходѣ изъ насадка нѣтъ сжатія струи.

Иногда при расчетѣ трубъ удобно задаваться скоростью. Руководствомъ можетъ служить слѣдующая таблица максимальныхъ скоростей, допускаемыхъ американскими строителями, въ трубахъ разныхъ диаметровъ.

Диаметры въ дюймахъ.	4	6	8	10	12	14	16	18	20	24	27	30	36
Максим. скорость въ футахъ.	3,1	3,9	4,5	5,0	5,5	5,8	6,0	6,2	6,5	6,7	6,9	7,0	7,2

Фламанъ рекомендуетъ еще болѣе низкія значенія для максимальныхъ скоростей, назначая ее для трубъ диаметромъ въ 0,25; 0,50; 1,00 *mtr* соответственно въ 1; 1,4; 2 *mtr sec*. Обыкновенно этихъ скоростей не достигаютъ. Равнымъ образомъ не берутъ и слишкомъ малыхъ скоростей (въ 1 футъ и меньше), такъ какъ въ этомъ случаѣ изъ воды легко осаждаются взмученныя въ ней вещества и засоряютъ трубы.

Необходимо замѣтить, что эти данныя взяты изъ практики городскихъ водоснабженій, въ которыхъ чаще всего приходится проводить умѣренныя количества воды и перекачивать ихъ обыкновенно за счетъ оплачиваемой деньгами тепловой энергии. Совсѣмъ другія нормы выработаны практикой турбинныхъ водопроводовъ, ведущихъ воду, въ дѣляхъ утилизаціи ея энергии, иногда въ очень большихъ количествахъ и всегда только за счетъ нѣкотораго пониженія общаго коэффициента полезнаго дѣйствія установки; при этомъ легко видѣть, что съ повышеніемъ располагаемаго напора, а онъ можетъ достигать нѣсколькихъ сотъ метровъ—что понижение коэффициента полезнаго дѣйствія установки, вслѣдствіе потерь въ трубопроводѣ, дѣлается менѣе ощутительнымъ. Въ такихъ водопроводахъ скорости въ 2 и болѣе *mtr* встрѣчаются очень часто, даже при длинныхъ трубопроводахъ и малыхъ диаметрахъ, такъ какъ существенно важно уменьшить начальную стоимость сооруженія (см. въ концѣ этой главы задачу № 68). Въ слѣдующей таблицѣ приведены нѣкоторые примѣры такихъ трубопроводовъ. Кромѣ размѣровъ трубъ, въ ней приведены также теряемые въ нихъ напоры, выраженные въ *mtr*, а также въ ‰ отъ располагаемаго напора; при этомъ подсчетъ коэффициентъ сопротивленія тренія былъ оцѣненъ по ур-ю Кристиена (см. стр. 221).

Названіе установокъ.	Внутрен-	Длина	Расходъ	Скорость	Располо-	Потеря напора	
	ній диаметръ въ <i>mt.</i>	трубы въ <i>mt.</i>	въ <i>mt.<sup>3</sup>/sec.</i>	въ <i>mt. sec.</i>	гаемый напоръ въ <i>mt.</i>	въ <i>mt.</i>	въ " " отъ рас- полагае- маго.
<i>Vauery</i> около Роны, близъ ея впаденія въ Женевское озеро .	0 325	1300	0,173	2,36	920	28,2	3,06
<i>Juce</i> на р. Плевѣ . .	1,600	236	6,00	3,00	75	1,13	1,5
<i>St.-Maurice</i> на Ронѣ .	2,700	470	15,88	2,78	36	1,00	2,8
<i>Champ</i> на р. Дракъ близъ Гренобля . . .	3 300	4700	17,00	1,98	35	3,91	11,2
<i>Ontario Power Co</i> на Ниагарѣ . . . . .	5,600	1850	118,75	5,00	56	5,22	9,35

Изъ этой таблицы видно, съ какими большими потерями мирятся, когда имѣютъ дѣло съ большими разстояніями и съ большими расходами.

Сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе. Исключая изъ выраженія потеряннаго напора скорость помощью уравненія расхода, мы получаемъ ур-іе 27:

$$\eta_r = \frac{32}{\pi^2 g} \zeta_r \frac{l Q^2}{D^5}.$$

Сравнимъ съ помощью этого выраженія потери напора въ двухъ трубахъ, изъ которыхъ одна пропускаетъ расходъ  $Q$ , а другая—одну  $m$ -ую его часть при условіи одинаковой средней скорости въ обѣихъ трубахъ. Ясно, что если въ первой трубѣ расходъ и діаметръ назовемъ  $Q$  и  $D$  и потерю напора опредѣлимъ по выше приведенному выраженію, то для другой трубы расходъ будетъ  $\frac{Q}{m}$ , діаметръ  $\frac{D}{m}$ , а потеря напора вычислится:

$$\eta_r' = \frac{32}{\pi^2 g} \zeta_r \frac{l \left(\frac{Q}{m}\right)^2}{\left(\frac{D}{m}\right)^5} = \frac{32}{\pi^2 g} \zeta_r \frac{l Q^2}{D^5} V m.$$

Если даже пренебrecь тѣмъ, что коэффициентъ сопротивленія возрастаетъ съ уменьшеніемъ діаметра, все-таки видно, что потеря напора въ малой трубѣ при указанныхъ выше условіяхъ въ  $m$  разъ больше, чѣмъ въ большой. Такъ какъ съ другой стороны стоимость трубы и ея укладки считается прямо пропорціональной діаметру трубы, то оказывается выгоднымъ

данный расход проводить через одну трубу, а не дробить его на несколько меньших трубъ. Этому правила всегда и придерживаются за исключениемъ тѣхъ случаевъ, встрѣчающихся опять въ практикѣ турбинныхъ водопроводовъ, когда проводимый расходъ слишкомъ великъ (вся установка Ontario Power Co на Ниагарѣ будетъ заключать 3 такихъ трубы, какъ упомянутая въ послѣдней таблицѣ), когда большое значеніе придается надежности сооруженія (на станціяхъ Laje и St.-Maurice проложены по 2 трубы, какъ упоминаемыя въ таблицѣ) и, наконецъ, когда затрудненія съ монтажемъ требуютъ уменьшенія диаметра трубъ.

#### § 24. О давленіи внутри водопроводной трубы. Сифонъ. Водоструйный насосъ для выкачиванія воздуха.

Всѣ вычисления предыдущаго параграфа предполагаютъ, что труба во всякомъ ея мѣстѣ работаетъ полнымъ сѣченіемъ, т-е. что жидкость не разрывается нигдѣ. Признакомъ этого, какъ извѣстно, служить то обстоятельство, что величина гидродинамическаго давленія вездѣ остается положительной, или, если говорить не о полномъ давленіи, а объ его избыткѣ надъ атмосфернымъ, то этотъ избытокъ, могущій быть и отрицательнымъ, нигдѣ однако не долженъ быть меньше минусъ  $10,33 \text{ mgr}$ . Поэтому результаты предыдущихъ подсчетовъ только тогда могутъ быть признаны правильными, если это условіе относительно давленія выполнено. Изъ этого слѣдуетъ, что при рѣшеніи практическихъ задачъ необходимо всегда давать себѣ отчетъ, каково давленіе въ разныхъ мѣстахъ трубы, — другими словами, необходимо всегда строить пьезометрическую напорную линію.

Особое вниманіе нужно обращать на тѣ точки трубы, гдѣ заранее можно предполагать наличность пониженнаго давленія. Къ такимъ точкамъ относятся, во-первыхъ, всѣ тѣ, гдѣ скорость движенія повышется, т-е. всѣ сжатія сѣченія; при внезапныхъ расширеніяхъ и суженіяхъ сѣченія мы всегда находимъ эти мѣстныя сжатія: даже безъ наличности сжатія, при плавномъ измѣненіи сѣченія, въ узкомъ мѣстѣ давленіе неизбѣжно понижается, какъ мы это видѣли на примѣрѣ коническихъ расходящихся насадковъ. Далѣе, къ такимъ опаснымъ точкамъ нужно отнести вершины всѣхъ поднимающихся по теченію вѣтвей трубы: здѣсь давленіе уменьшается за счетъ увеличенія высоты точки надъ плоскостью сравненія. Наконецъ, вершины всѣхъ болѣе или менѣе длинныхъ и сравнительно круто опускающихся внизъ по теченію частей трубы, въ силу своего возвышеннаго положенія, также представляютъ опасность разрыва жидкости. Въ предыдущемъ § было уже указано, что построение пьезометрической линіи помогаетъ разыскать всѣ эти опасныя точки. Для дальнѣйшаго уясненія дѣла остановимся на разсмотрѣннн одного примѣра—*сифона*.

Сифономъ называется труба, проложенная такъ, что нѣкоторою частью она лежитъ выше уровня воды въ питающемъ резервуарѣ (фиг. 144). Для движенія воды отъ перваго сосуда до входа во второй мы имѣли ур-е (25)



въ § 23. Для краткости пьема будемъ считать, что сопротивление входа  $\zeta$ , включено подъ знакомъ  $\Sigma \zeta$ , такъ что вмѣсто ур-я (25) напишемъ ур-е

$$H_1 - H_2 = h - \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \Sigma \zeta + 4 \frac{L}{D} \zeta \right) \dots \dots \dots (28)$$

Въ какомъ-нибудь сѣченіи  $MN$ , на разстояніи  $L$ , отъ начала трубы (считая по длинѣ трубы) и на высотѣ  $r$  отъ плоскости сравненія  $QR$ , имѣемъ.

$$H_1 - \frac{p_0}{\gamma} = r - \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \Sigma \zeta + \zeta_r \frac{4L}{D} \right).$$

На пути отъ  $AB$  до  $MN$  особыя сопротивления могутъ быть иныя, нежели на всей трубѣ,—потому мы и обозначили ихъ черезъ  $\Sigma \zeta$ .

Изъ написаннаго ур-я имѣемъ:

$$\frac{p_0}{\gamma} = H_1 - r - \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \Sigma \zeta + \zeta_r \frac{4L}{D} \right),$$

или, замѣняя  $r$  по ур-ю (28):

$$\frac{p_0}{\gamma} = H_1 - r - \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \Sigma \zeta + \zeta_r \frac{4L}{D} \right) = h - \frac{v^2}{2g} \left( 1 + \Sigma \zeta + \zeta_r \frac{4L}{D} \right) \dots \dots \dots (29)$$

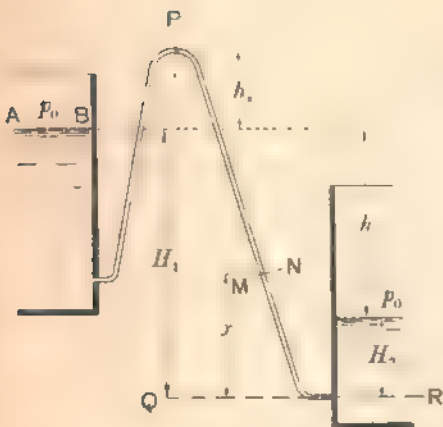
Такъ какъ  $p_0$  должно быть всегда больше нуля, то это ур-е сводится къ неравенству:

$$H_1 < \frac{p_0}{\gamma} + \frac{1 + \Sigma \zeta + \zeta_r \frac{4L}{D}}{1 + \Sigma \zeta + \zeta_r \frac{4L}{D}} h \dots \dots \dots (29)$$

Величинами  $(1 + \Sigma \zeta)$  и  $(1 + \Sigma \zeta)$ , по сравненію съ потерями на треніе, по ихъ малости обыкновенно бываетъ возможно пренебречь. Откидывая ихъ, дадимъ неравенству (29) видъ:

$$r - H_1 < \frac{p_0}{\gamma} - \frac{L_r}{L} h.$$

Особенно важенъ случай, когда  $r$  есть высота наивысшей точки сифона  $P$ . Пусть  $r - H_1$  есть  $h_r$ —это будетъ высота наиболѣ возвышеннаго сѣченія сифона  $P$  надъ уровнемъ верхняго резервуара  $AB$ . Замѣтивъ, что



Фиг. 144.

для среднего атмосферного давления  $\frac{P_0}{\gamma} = 10,33 \text{ мтр}$  и обозначивъ соответствующую длину  $L_1$  трубы через  $L_2$ , найдемъ, что допустимая высота сифона определяется соотношеніемъ

$$h = 10,33 - \frac{L_1}{L_2} h, \dots \dots \dots (30)$$

т.е. высота сифона надъ уровнемъ питающаго резервуара не только меньше высоты барометрическаго давления, но еще зависитъ отъ располагаемаго напора (уменьшается съ его увеличеніемъ), отъ положенія высшей точки по длинѣ трубы (уменьшается съ увеличеніемъ  $L_1$ ) и отъ длины самой трубы.

То же самое легко получить, если идти съ другой стороны, т.е. если разсмотрѣть движете отъ наивысшаго сѣченія  $P$  до уровня во второмъ сосудѣ, принимая плоскость сравненія въ уровень второго резервуара. Имѣемъ въ этомъ случаѣ:

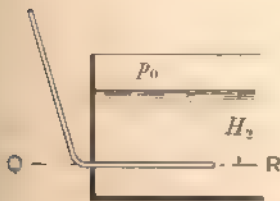
$$\frac{P_0}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} - h_s = h = \frac{P_0}{\gamma} + \left[ \sum \alpha z + z + \frac{4(L - L_2)}{D} \right] \frac{v^2}{2g} + \frac{(v - 0)^2}{2g}.$$

Последнимъ членомъ сѣчена отдѣльно потеря на ударъ при входѣ во второй сосудъ, скорость въ которомъ предполагаемъ равной нулю. Оставляя теперь неравенство  $\frac{P_0}{\gamma} > 0$ , находимъ:

$$h_s = h < \frac{P_0}{\gamma} - \left[ \sum \alpha z + z + \frac{4(L - L_2)}{D} \right] \frac{v^2}{2g}, \dots \dots \dots (31)$$

т.е. наиболее возвышенная точка сифона, или, вообще, всякая точка трубы, должна лежать надъ горизонтомъ въ приемномъ резервуарѣ меньше, чѣмъ на 10,33 мтр (если въ этомъ резервуарѣ давление на поверхности равно атмосферному) илюсь все потери на пути отъ этой точки до резервуара, кромѣ потери при входѣ въ него. Отсюда видно, что потери на этомъ пути (т.е. за возвышенной точкой) увеличиваютъ допустимую высоту, тогда какъ потери на пути до возвышенной точки уменьшаютъ ее возможную высоту (см. неравенство 29).

(съ этой точки зрѣнія далеко не безразлично, какъ труба примыкаетъ ко второму резервуару, — такъ ли, какъ на фигурахъ 144, или, напр., какъ на фиг. 145, гдѣ все осталось по-старому, кромѣ того, что труба продолжена далеко внутрь резервуара; въ этомъ последнемъ случаѣ повышаются потери напора на участкѣ за сифономъ, и если сифонъ, не снабженный этимъ добавкомъ, не подавалъ воды, то можетъ получиться, что, будучи имъ снабженъ,



Фиг. 145.

или достаточной, конечно, длинѣ прибавка, онъ окажется въ состояніи течь. Легко видѣть, что при наличности прибавка скорость  $v$ , какъ

это видно из уравнения (28), окажется меньше, нежели без него; в этом в сущности, и заключается вся разница.

Подставляя в неравенство (31) значение  $\frac{v_1^2}{2g}$ , определенное из уравнения (28), и деля в результате подстановки вышеупомянутыя упрощающія предположенія, получаемъ:

$$h_2 + h < \frac{p_2}{\gamma} + \frac{L}{L} \frac{L_2}{L} h \dots \dots \dots (32)$$

Не трудно убѣдиться, что это выраженіе тождественно съ выраженіемъ (30), такъ же, какъ (31) тождественно съ (29); однако выраженія (31) и (32) показываютъ съ большей очевидностью, нежели выраженія (29) и (30), что хотя бы разсматриваемая точка лежала и ниже уровня *AB* въ верхнемъ сосудѣ ( $h_2$  отрицательно), тѣмъ не менѣе въ ней можетъ оказаться опасное разрѣженіе. Такой именно случай представляетъ всякая вертикальная труба: при любомъ знакѣ при  $h_2$ , лишь только  $h - h_2$  положительно, необходимо прибѣгать къ провѣркѣ. Съ подобнымъ случаемъ намъ придется встрѣтиться въ курсѣ турбинъ.

Мы видѣли изъ предыдущаго §, что при всякомъ измѣненіи сѣченія, трубы появляется соответствующее измѣненіе въ пьезометрической линіи, т.е. въ давленіи внутри трубы. Этимъ обстоятельствомъ пользуются во многихъ случаяхъ и съ разными дѣлями. Укажемъ слѣдующіе два примѣра:

Упомянемъ, прежде всего, о *водомерѣ Вентури*, имѣющемъ широкое примѣненіе въ Америкѣ и постепенно распространяющемся также въ Россіи. Устройство его крайне просто: въ трубопроводъ вставляется постепенно и плавно сужающаяся конoidalная труба, которая затѣмъ такъ же плавно расширяется до первоначальнаго діаметра. Въ самомъ узкомъ и въ самомъ широкомъ мѣстахъ прибора устанавливаются пьезометрическія трубки, помощью которыхъ можно наблюдать разность давленій въ этихъ мѣстахъ. Читая эту разность въ каждый данный моментъ и зная площади обоихъ сѣченій, легко вычислить расходъ на основаніи слѣдующихъ очевидныхъ уравненій.

$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2,$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g}.$$

Если въ данный моментъ наблюдаена разность давленій  $\frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = h$ , при  $F_2 > F_1$ , а кромѣ того если постоянный коэффициентъ сопротивленія  $\zeta$  известенъ, послѣ, напр., опытаго его опредѣленія, то легко вычисляемъ:

$$Q = F_1 \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 (1 + \zeta)}}.$$

Приборъ устроенъ такъ, что разности уровней  $h$  въ обоихъ пьезометрахъ автоматически и непрерывно записываются на бумажной лентѣ, разграфленной такъ, что на ней можно читать не самую разность уровней  $h$ , а прямо соответствующій ей расходъ. На лентѣ такимъ образомъ записываются круглыя сутки всѣ секундные расходы.

Затѣмъ укажемъ, что тѣмъ обстоятельствомъ, что съ повышеніемъ скорости уменьшается давленіе, пользуются для полученія *искусственнаго разряженія*. На трубѣ *A* (фиг. 146) дѣлаютъ мѣстное суженіе; вслѣдъ за нимъ располагаютъ постепенно расширяющуюся трубу *B*. Щель между обѣими трубками окружена кожухомъ *C*, который можно соединить трубкою *D* съ сосудомъ, откуда нужно выкачать воздухъ.



Фиг. 146.

Назовемъ черезъ  $v_1$ ,  $p_1$ ,  $F_1$  соответственно скорость, давленіе и сѣченіе струи въ трубѣ *A* до суженія, тѣ же величины въ узкой части трубы *A* назовемъ тѣми же буквами безъ значковъ; въ узкой части трубы *B* введемъ значки  $v_2$  и въ широкой части трубы *B*—значки  $v_2$ . Для движенія отъ сѣченія  $F_1$  до сѣченія  $F$  имѣетъ мѣсто ур-іе:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + \zeta_1 \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (33)$$

гдѣ буква  $h$  обозначаетъ вертикальное разстояніе отъ сѣченія *A* до сѣченія  $F$ , а послѣднимъ членомъ оцѣнивается потеря напора при прохожденіи черезъ быстро сужающуюся часть.

При переходѣ отъ сѣченія  $F$  къ сѣченію  $F_2$ ,— въ предположеніи, что течетъ только вода (изъ *C* ничего не поступаетъ) и что щель настолько узка, что струя переходитъ, какъ если бы щели совсѣмъ не было,—имѣемъ ур-іе:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{(v - v_2)^2}{2g}$$

Наконецъ, для движенія отъ сѣченія  $F_2$  до сѣченія  $F_2$  имѣемъ:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} = (h_2 - h) + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

Здѣсь буква  $h_2$  обозначаетъ вертикальное разстояніе отъ сѣченія *A* до сѣченія *B*.

Складывая эти три ур-ія, получаемъ:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_2 - h + \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} + \frac{(v - v_2)^2}{2g} + \zeta_1 \frac{v^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \dots \dots \dots (34)$$

Кромѣ того, при вышеуказанныхъ предположеніяхъ имѣютъ мѣсто слѣдующія ур-ія расхода:

$$Q = F_1 v_1 = F v = F_2 v_2 = F_2 v_2$$

Пользуясь ими, преобразуемъ ур-е (34) въ ур-е:

$$\frac{v_2^2}{2g} = 1 - \frac{\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} - h_2}{\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{F_2}{F_2}\right)^2 + \zeta_1 \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 + \zeta_2} \dots \dots \dots (34)$$

Далѣе опредѣляемъ давленіе  $p$  изъ ур-я (33), выражая въ немъ все скорости черезъ  $v_2$  помощью тѣхъ же ур-ій расхода:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - h - \frac{v_2^2}{2g} \left[ (1 - \zeta_1) \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 \right] \dots \dots \dots (33')$$

Если нужно, чтобы въ  $C$  была пустота, то необходимо имѣть  $\frac{p}{\gamma} = 0$ , или, стало-быть, по (33'):

$$\frac{v_2^2}{2g} > \frac{\frac{p_1}{\gamma} - h}{(1 - \zeta_1) \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}$$

Сравнивая это выраженіе съ выраженіемъ (34), заключаемъ, что для того, чтобы приборъ выполнялъ свое назначеніе, между его размѣрами и давленіями  $p_1$  и  $p_2$  должно быть слѣдующее соотношеніе:

$$\frac{p_1}{\gamma} - h > \frac{(1 - \zeta_1) \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}{(1 - \zeta_1) \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 + (1 - \zeta_2) - \frac{F_2}{F_1} \left[ 2 \frac{F_2}{F_1} - \frac{F_2}{F_1} \right]}$$

Вычитая въ обѣихъ частяхъ неравенства числитель изъ знаменателя, отчего знакъ неравенства не измѣнится, и убывая знакъ въ знаменателѣ, отчего знакъ неравенства переѣнится, получимъ:

$$\frac{p_1}{\gamma} - h > \frac{(1 - \zeta_1) \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2}{\frac{F_2}{F_1} \left( 2 \frac{F_2}{F_1} - \frac{F_2}{F_1} \right) + (1 - \zeta_2)} \dots \dots \dots (35)$$

Если неравенство (35) удовлетворено, то, дѣйствительно, струя не только не будетъ имѣть возможности заполнять пространство  $C$ , но, напротивъ того, будетъ энергично высасывать какъ изъ него, такъ и изъ связанныхъ съ нимъ пространствъ, всякую жидкость, первоначально ихъ заполнявшую. Если такую жидкостью является воздухъ, то, въ силу его весьма малата удѣльнаго вѣса по сравненію съ водою, все эти разсужденія могутъ быть примѣнены непосредственно. Если же такой высасываемой жидкостью явля-

ется вода, то это разсмотрѣніе, при которомъ мы считали, что сѣченія  $F_1$  и  $F_2$  заполнены только водою, идущею изъ трубы  $A$ , не применимо. При воздухѣ давленіе  $p$  въ  $C$  опредѣляется изъ ур-ія (33) достаточно точно, конечно, къ тому времени, когда наступаетъ установившееся состояніе, т.-е. когда воздухъ перестанетъ уноситься изъ  $C$ .

На этомъ явленіи основывается устройство водоструйныхъ насосовъ для получения безвоздушныхъ пространствъ, употребляемыхъ во всѣхъ химическихъ и физическихъ лабораторіяхъ. Обыкновенно въ такихъ случаяхъ давленіе  $p_2$  есть атмосферное давленіе, а давленіе  $p_1$  — давленіе въ водопроводѣ, достигающее нѣсколькихъ атмосферъ. Приборъ бываетъ вообще маленькихъ размѣровъ, почему въ неравенствѣ (35) вполне возможно пренебречь высотами  $h$  и  $h_2$ . Кроме того, сѣченіе  $F_1$  водопроводной трубы часто настолько велико передъ всѣми прочими сѣченіями прибора, что отношеніемъ  $\frac{F_2}{F_1}$  тоже безъ большой ошибки можно пренебречь; это можно сдѣлать съ достаточною надежностью особенно въ томъ случаѣ, если неравенствомъ (35) пользоваться для опредѣленія необходимаго минимальнаго давленія  $p_1$ . Выраженіе (35) переписывается теперь такъ

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{(1 - \zeta_1) \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2}{\frac{F_2}{F_1} \left( 2 \frac{F_2}{F_1} - \frac{F_2}{F_1} \right) - (1 - \zeta_2)} \dots \dots \dots (35')$$

Такъ, напр., если діаметры сѣченій  $F$ ,  $F_1$  и  $F_2$  соответственно равны 2, 4 и 8 *mm*, а коэф-ты  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0,1$ , то неравенство (35') даетъ:

$$\frac{p_1}{p_2} > \frac{1 \cdot 1 \cdot 4^4}{2^2 (2 \cdot 4^2 - 2^2) - 1 \cdot 1} = \frac{281,6}{110,9} = 2,54,$$

т.-е. достаточно имѣть въ водопроводѣ не менѣе 2,54 *at* давленія, чтобы этимъ приборомъ производить безвоздушное пространство. Внося  $p_1 = 2,54 p_2$  въ ур-іе (34'), считая попрежнему  $\frac{F_2}{F_1} = 0$ , а также полагая  $\frac{p_2}{\gamma} = 10 \text{ mtr}$ , получаемъ при вышеуказанныхъ діаметрахъ сѣченій  $F$ ,  $F_1$  и  $F_2$ , что:

$$\frac{c_2^2}{2g} = 0,09 \text{ mtr, такъ что } v_2 = 1,33 \text{ mtr/sec,}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = 2^4 \frac{v_2^2}{2g} = 1,44 \text{ mtr, такъ что } v_1 = 5,32 \text{ mtr/sec,}$$

$$\frac{v^2}{2g} = 4^4 \frac{v_2^2}{2g} = 23,04 \text{ mtr, такъ что } v = 21,28 \text{ mtr/sec.}$$

Далѣ изъ соотвѣствующихъ, написанныхъ выше, ур-ій Д. Бернулли получимъ полагая въ нихъ  $h = h_2 = 0$ , а также  $v_1 = 0$

$$\text{давление } \frac{P}{\gamma} = 0,09 + 10,00 = 0,009 = 1,44 \approx 8,66 \text{ } mlt.,$$

$$\text{давление } \frac{P}{\gamma} = 25,40 - 23,04 = 2,30 = 0,06 \text{ } mlt..$$

Итакъ, въ сѣченія  $F_1$  давление будетъ ниже атмосфернаго, а въ сосудѣ  $C$  (давление  $p$ ) можно ждать почти полнаго разрѣженія. При этомъ расходъ рабочей воды будетъ  $v_2 F_2 = 13,30.005 = 0,0665 \text{ } lit./sec.$

### § 25. Правило Дирри.

Нрѣдко водопроводная линия составляется изъ трубъ разнаго діаметра. Потери напора, вызываемая такою трубою, должна быть оцѣнена, какъ сумма потерь, вызванныхъ каждой частью постояннаго діаметра. Вычисления облегчаются, если такую составную трубу замѣнить трубой постояннаго діаметра, эквивалентной первой. Двѣ трубы называются эквивалентными, если онѣ, при одинаковомъ расходѣ въ обѣихъ, вызываютъ одинаковыя потери напора.

Пусть данная труба составлена изъ частей длиною  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , и соотвѣтственныхъ діаметровъ  $D_1, D_2, \dots, D_n$ . Вся труба, пропуская въ секунду  $Q \text{ } mdt^3$ , вызываетъ потерю напора на треніе:

$$h = \frac{4L_1}{D_1^5} \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \frac{4L_2}{D_2^5} \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} + \dots + \frac{4L_n}{D_n^5} \zeta_r^{(n)} \frac{v_n^2}{2g} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{4L_k}{D_k^5} \zeta_r^{(k)} \frac{v_k^2}{2g}$$

При этомъ

$$Q = \frac{\pi D_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} v_2 = \dots = \frac{\pi D_n^2}{4} v_n.$$

Поэтому

$$h = \sum_{k=1}^k \zeta_r \frac{4L_k}{D_k^5} \frac{16Q^2}{\pi^2 \cdot 2g} = \frac{16Q^2}{\pi^2 \cdot 2g} \left[ \frac{4L_1}{D_1^5} \zeta_r + \dots + \frac{4L_n}{D_n^5} \zeta_r^{(n)} \right] = \frac{64Q^2}{\pi^2 \cdot 2g} \sum_{k=1}^{k=n} \zeta_r^{(k)} \frac{L_k}{D_k^5}.$$

Для эквивалентной трубы постояннаго діаметра  $D$ , длиною  $L$ , та же потеря  $h$ , при томъ же расходѣ  $Q$ , можетъ быть выражена такъ:

$$h = \frac{64Q^2}{\pi^2 \cdot 2g} \zeta_r \frac{L}{D^5}$$

Условіе эквивалентности получимъ, сравнивъ два послѣднія выраженія

$$\sum_{k=1}^{k=n} \zeta_r^{(k)} \frac{L_k}{D_k^5} = \zeta_r \frac{L}{D^5}$$

Въ такомъ соотношеніи должна быть длина и діаметръ эквивалентной трубы съ длинами и діаметрами составныхъ частей данной трубы. Это ур-е и представляетъ то, что называется „правиломъ Дирри“. Какъ первое приближеніе, можно положить:

$$\zeta_r = \zeta_r^{(1)} = \dots = \zeta_r^{(n)} = \zeta_r.$$

Тогда, задаваясь диаметром  $D$  эквивалентной трубы, находимъ ее длину  $L$ :

$$L = \frac{D^5}{D_1^5} L_1 + \frac{D^5}{D_2^5} L_2 + \dots$$

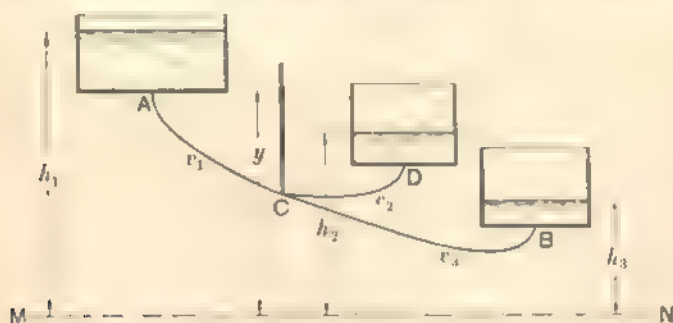
Или, задаваясь длиной  $L$ , —напротивъ, считая, что эквивалентная труба имѣетъ длину данной трубы, т.-е. полагая  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n = \sum L_k$ , —находимъ ее диаметр  $D$ :

$$D = \sqrt[5]{\frac{\sum L_k}{\sum D_k^5}}$$

Выяснивъ такимъ образомъ длину и диаметр эквивалентной трубы, мы можемъ вмѣсто действительной трубы имѣть въ виду затѣмъ только эту эквивалентную. Правило *Парри* можетъ быть съ выгодой применено только въ томъ случаѣ, когда данная труба настолько длинна, что скоростнымъ напоромъ, равно какъ напорами, идущими на особые сопротивления \*), можно пренебречь передъ сопротивленіемъ тренія.

### § 26. Сложный водопроводъ.

Некая труба, имѣющая точки развѣтвленія, называется сложнымъ водопроводомъ. Въ водопроводной сѣти можетъ быть нѣсколько точекъ развѣтвленія. Разсмотримъ одну изъ нихъ (фиг. 147), въ которой отъ трубы  $AB$  взята вѣтвь  $CD$ . Въ концахъ



Фиг. 147.

трубы  $A$ ,  $B$  и  $D$  имѣются нѣкоторыя гидродинамическія давления, которыя поднимаютъ воду въ пьезометрахъ, вставленныхъ въ этихъ концахъ. Вмѣсто пьезометровъ вообразимъ сосуды, въ которыхъ эти трубы пусть и примыкаютъ, понятно, что горизонтъ воды въ сосудахъ вполнѣ опредѣляетъ величину гидродинамическаго давления. Назовемъ высоты стояния этихъ горизонтовъ надъ общою горизонтальною плоскостью сравненія  $MN$  черезъ  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ , при чемъ, согласно чертежу, пусть  $h_1 > h_2 > h_3$ . Если въ точкѣ  $C$  вставить пьезометръ, то и въ немъ вода также поднимется; пусть она здѣсь поднимается до нѣкоторой высоты  $y$  надъ тѣмъ же горизонтомъ  $MN$ . Смотря по тому, какова высота  $y$ , движение воды въ сѣти  $ABD$  будетъ разное: если  $h_1 > y > h_2 > h_3$ , то резервуаръ  $A$  питаетъ оба резервуара  $D$  и  $B$ ; если же  $h_1 > h_3 > y > h_2$ , то оба резервуара  $A$  и  $D$  подаютъ воду въ сосудъ  $B$ .

\*) Въ трубѣ пережняго диаметра всегда есть сопротивления при переходѣ изъ одного диаметра въ другой.



Задача может быть поставлена двояко. во-первых, могут быть даны диаметры  $d_1, d_2, d_3$  и длины  $l_1, l_2, l_3$  трубъ  $AC, CD$  и  $CB$ ; равнымъ образомъ задаются высоты  $h_1, h_2, h_3$ ; требуется отыскать расходы  $Q_1, Q_2, Q_3$ , въ каждой трубѣ, равно какъ и направление течения въ трубѣ  $CD$ : во-вторыхъ, могутъ быть заданы длины трубъ и высоты  $h_1, h_2, h_3$ , и требуется найти размеры по заданнымъ расходамъ.

I) Предположимъ сначала, что имѣеть мѣсто соотношение.

$$h_1 > y > h_2 > h_3.$$

Тогда очевидно:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

или

$$d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2 + d_3^2 v_3, \dots \dots \dots (36)$$

гдѣ  $v_1, v_2, v_3$  суть неизвѣстныя пока скорости въ вѣтвяхъ  $AC, CD, CB$

Предполагая, что трубы длинныя, такъ что скоростной напоръ и влияние особаго сопротивленія исчезаютъ передъ величиною потеряннаго на трение напора, можно написать ур-ня потерь напора:

для вѣтви $AC$ :	$h_1 - y = \zeta_1 \frac{4 l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}$	}	\dots \dots \dots (37)
" " $CD$ :	$y - h_2 = \zeta_2 \frac{4 l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}$		
" " $CB$ :	$y - h_3 = \zeta_3 \frac{4 l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g}$		

Если же имѣеть мѣсто соотношение

$$h_1 < h_2 > y > h_3,$$

то такія же четыре ур-ня напишемъ такъ:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

или

$$d_1^2 v_1 + d_2^2 v_2 = d_3^2 v_3, \dots \dots \dots (38)$$

Затѣмъ:

для вѣтви $AC$ :	$h_1 - y = \zeta_1 \frac{4 l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}$	}	\dots \dots \dots (39)
" " $DC$ :	$h_2 - y = \zeta_2 \frac{4 l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}$		
" " $CB$ :	$y - h_3 = \zeta_3 \frac{4 l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g}$		

Въ обоихъ случаяхъ задача оказывается вполне опредѣленной, такъ какъ для нахождения четырехъ неизвѣстныхъ  $y, v_1, v_2$  и  $v_3$  имѣемъ также четыре ур-ня. Но заранѣе неизвѣстно, какую изъ этихъ системъ ур-нй нужно пользоваться. Слѣдующее разсмотрѣние даетъ отвѣтъ и на этотъ вопросъ.

Замѣнимъ всѣ эти три трубы трубами одного и того же диаметра  $D$ , соответственно измѣняя ихъ длины до  $L_1, L_2$  и  $L_3$ . Эти длины опредѣлимъ по правилу *Darwin* (см. § 25) въ формѣ:

$$L_1 = \left(\frac{D}{d_1}\right)^5 l_1; L_2 = \left(\frac{D}{d_2}\right)^5 l_2; L_3 = \left(\frac{D}{d_3}\right)^5 l_3.$$

Соответственно изменившиеся скорости назовем через  $v'$ ,  $v''$ ,  $v'''$ . Система ур-й (36) и (37) представится тогда так:

$$v' = v'' = v''' \dots \dots \dots (36')$$

$$\left. \begin{aligned} h_1 - y &= \zeta \frac{4L_1 v'^2}{D \cdot 2g} \\ y - h_2 &= \zeta \frac{4L_2 v''^2}{D \cdot 2g} \\ y - h_3 &= \zeta \frac{4L_3 v'''^2}{D \cdot 2g} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37')$$

Тут, по Дарси, все  $\zeta$  одинаковы. Определяя из (37') скорости  $v$  и внося ихъ въ (36'), получимъ соотношение:

$$\left| \frac{2gD}{4\zeta} \right| \left| \frac{h_1 - y}{L_1} \right| = \left| \frac{2gD}{4\zeta} \right| \left| \frac{y - h_2}{L_2} \right| = \left| \frac{y - h_3}{L_3} \right|,$$

т. е.

$$\left| \frac{h_1 - y}{L_1} \right| = \left| \frac{y - h_2}{L_2} \right| + \left| \frac{y - h_3}{L_3} \right| \dots \dots \dots (40)$$

Если это ур-е имѣетъ положительный корень  $\alpha$ , то этотъ корень долженъ, очевидно, заключаться между  $h_1$  и  $h_2$ , т. е. должно существовать соотношение

$$h_1 > \alpha > h_2.$$

Если теперь мы дадимъ  $y$ -ку значение, большее корня  $\alpha$  (но меньшее, повявно, съ  $h_1$ ), то послѣ подстановки его въ ур-е (40) лѣвая часть окажется меньше правой; если дать значение меньшее  $\alpha$  (но большее  $h_2$ ), то лѣвая часть будетъ больше правой. Замѣтимъ, что, дадимъ  $y$  ку наименьшую возможную для него величину, т. е. положимъ

$$y = h_2.$$

т. е. если вообще ур-е (40) имѣетъ мѣсто, т. е. если направление течения таково, какъ предполагено ур-ями (36) и (36'), то ур-е (40) должно слѣдовать къ неравенству:

$$\left| \frac{h_1 - h_2}{L_1} \right| > \left| \frac{h_2 - h_3}{L_3} \right|$$

$$\frac{h_1 - h_2}{h_2 - h_3} > \frac{L_1}{L_3} \dots \dots \dots (41)$$

т. е. заключаемъ: если между заданными величинами существуетъ соотношение такое, какое предполагено ур-ями (36) и (36'). Слѣдовательно, въ противномъ случаѣ нужно пользоваться системой ур-й (36) и (37').



Если бы трубы *CD* не было, то въ точкѣ *C* пьезометръ далъ бы высоту  $y'$ , которую легко найти такимъ путемъ: труба *ACB* представляетъ простой водопроводъ, въ которомъ падение пьезометрической высоты пропорционально длинѣ трубы. Следовательно:

$$\frac{h_1 - y'}{L_1} = \frac{h_1 - h_2}{L_1 + L_2}$$

откуда

$$y' = h_1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} (h_1 - h_2) \dots \dots \dots (42)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ ту высоту пьезометра  $y''$ , которая установилась бы въ *C*, если бы не было сосуда *B*:

$$y'' = h_1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} (h_1 - h_2) \dots \dots \dots (43)$$

Одно изъ этихъ значеній будетъ больше другого: пусть, напримѣръ,  $y' > y''$ . Можно показать, что корень  $\alpha$  ур-я (40) меньше  $y''$ . Въ самомъ дѣлѣ, внеси значеніе  $y'$  въ первую половину ур-я (40), получимъ величину

$$\sqrt{\frac{h_1 - h_2}{L_1 + L_2}}$$

Дѣлая ту же подстановку во второй половинѣ, получимъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$\sqrt{\frac{h_1 - h_2}{L_1 + L_2}} + \sqrt{\frac{(L_1 + L_2)(h_1 - y')}{(L_1 + L_2)L_2}}$$

Очевидно, что первое выраженіе меньше второго; дѣлая же  $y' = h_2$ , мы получимъ неравенство обратнаго знака [см. неравенство (41)]. Изъ этого заключаемъ, что корень  $\alpha$  ур-я (40) заключается между  $h_2$  и наименьшимъ изъ значеній  $y'$  и  $y''$ , определенныхъ ур-ями (42) и (43). Совершенно подобнымъ образомъ получимъ для ур-я (40), что его корень  $\beta$  меньше  $h_2$ , но больше наибольшаго изъ значеній  $y'$  и  $y''$ , определенныхъ ур-ями (42) и слѣдующимъ (44):

$$y'' = h_2 + \frac{L_2}{L_2 + L_1} (h_2 - h_1) \dots \dots \dots (44)$$

Эти аналитическіе признаки имѣютъ вполне реальный смыслъ. Предположеніе о сѣтвистости резервуаровъ *B* или *D* равносильно допущенію что на трубахъ *CD* или *CB* соответственно закрыты краны: при этомъ пьезометрическая высота въ трубѣ, напр. *CD* отъ точки *C* и вплоть до закрытаго крана, очевидно, одна и та же и равна  $y'$ , а на пути отъ резервуара она тоже одна и та же во всехъ точкахъ и равна  $h_2$ . Пусть  $y' < y''$ , тогда все-таки больше, чѣмъ  $h_2$ . Если теперь открыть кранъ на трубѣ *CD*, то вода по ней отъ *C* къ *D*, благодаря чему неизбежно понизится давленіе въ точкѣ *C*. Это ясно, что расходъ въ трубѣ *AC* возрастетъ. А это и значитъ, что корень  $\alpha$  ур-я (40) меньше наименьшаго изъ значеній  $y'$  и  $y''$ .

Въ сѣти имѣется не одна точка развѣтвленія, а  $m$ , въ которыхъ сходится  $n$  трубъ. Мы можемъ написать:

- для каждой точки развѣтвленія ур-е расхода, подобно (36) или (38), а всего . . . . .  $m$  ур-ій
  - для каждой сѣтви ур-е паденія высоты пьезометра, подобно (37) или (39), а всего . . . . .  $n$  ур-ій
- Итого получимъ . . . . .  $(m + n)$  ур-ій.

Неизвестными же являются  $n$  скоростей и  $m$  пьезометрических высот: остальные величины (диаметры, длины и пьезометрическая высота в концах каждой ветви) попрежнему считаемся данными. Система уравнений оказывается вблизи определенной и может быть, следовательно, разрешена, хотя и не без чисто вычислительных затруднений.

II) Даны длины труб, высоты  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , а также расходы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$ , требуется определить диаметры и пьезометрическую высоту  $y$ . Вопрос становится неопределимым, так как уравнения (36) и (38) обращаются в соотношения между заданными величинами, и для определения четырех неизвестных остаются только три уравнения (37) или (39). Можно составить недостающее четвертое уравнение, как условие наименьшей стоимости эксплуатации труб. Для этого нужно выразить стоимость постройки трубы, которая обыкновенно может быть принята пропорциональной диаметру трубы. Ежегодный расход, зависящий от этой стоимости сооружения, определяется процентами на затраченный капитал, на погашение, на фонд возобновления, на ремонт и т. д. Другая составная часть годового расхода состоит из стоимости энергии, затрачиваемой на перекачку; эта последняя пропорциональна потерянной напору, т.-е. разности, в которую войдет  $y$ . Последнюю величину можно исключить из выражения стоимости эксплуатации при помощи уравнений, подобных (37) или (39). Наконец, взяв производную от выражения стоимости эксплуатации по диаметру, получим новое уравнение, связывающее расходы и диаметры, и вопрос становится определенным\*). Однако практически важна наименьшая стоимость эксплуатации всего водопроводного сооружения, а не одной его составной части—трубопровода. Поэтому следует принять во внимание при таких подсчетах и стоимость водоподъемных зданий, их оборудования машинами, стоимость персонала и т. п., и вопрос чрезвычайно осложняется. В серьезных случаях составляют несколько проектов водопроводов и для каждого из них выводят стоимость сооружения и его эксплуатации. При составлении же проекта имеют в виду ряд условий, предписываемых контрактом; одним из главнейших обыкновенно является требование, чтобы нигде в водопроводной линии давление не падало ниже определенной нормы, напр., ставится условие, чтобы во всякой точке водопровода вода могла подняться на высоту четырехэтажного дома. Критическими точками, для которых это условие должно быть проверяемо, являются все точки разветвления, а также те точки водопроводной линии, которая по своему положению является возвышенными.

Здесь не место выяснять все условия, которые нужно иметь в виду при проектировании водоснабжения, а также те меры, которыми достигается соблюдение предписанных требований,—это задача курса водоснабжения; отметим только, что надлежащим выбором диаметра всегда можно достигнуть того, чтобы высота пьезометра нигде не опускалась ниже предписанной нормы. В самом деле мы имеем выражение падения высоты пьезометра в виде:

$$h - y = \zeta \frac{4l}{d} \frac{Q^2}{2g} = \zeta \frac{64}{73} \frac{l}{2g} \frac{Q^2}{d^5}.$$

Ясно, что надлежащим увеличением  $d$ , при заданных  $Q$  и  $l$ , всегда можно получить любое малое падение  $(h - y)$  высоты пьезометра.

В заключение этого параграфа заметим, что рассмотренная схема с небольшими изменениями применима к ряду других случаев, напр., если бы на трубе  $AD$  в точке  $C$  было сделано просто отверстие, диаметром  $d_c$ , вместо трубы с резервуаром  $B$ . При этом, конечно, должна быть задана координата  $h_c$  центра тяжести отверстия  $C$ . Вообще говоря, может оказаться, что  $h_c$  и больше, и меньше, чем  $h_2$ . В первом случае не возникает вопроса о направлении течения в трубах: через отверстие  $C$  выливается

\*) Совершенно подобными соображениями можно установить наилучший диаметр трубопровода, ведущего воду в видах утилизации ее энергии. Тут только не будет расхода на энергию, затрачиваемую на перекачку, но будет убыток от невозможности продать ту энергию, которая тратится в трубопроводах. Ясно, что тут разницы никакой нет.

часть того расхода, которая течет по трубѣ *AC*; остальная течетъ дальше въ резервуаръ *D*. Но если  $h_1 < h_2$ , то кромѣ такого направления течения возможно также, что оба резервуара питаютъ отверстие. Рѣшеніе ведется вполне согласно вышеуказанному; необходимо только вмѣсто третьихъ строкъ въ уравненіяхъ (37) и (39) написать:

$$y - h_c = (1 + \zeta) \frac{v^2}{2g},$$

а въ послѣднихъ членахъ уравненій неразрывности (36) и (38) нужно ввести коэффициентъ расхода  $\mu$ . Числовые значенія коэффициентовъ  $\zeta$  и  $\mu$  надо брать соответственно устройству отверстій. Примѣненіе правила Дарриу хотя и возможно, но большого упрощенія не вноситъ — Во избѣжаніе недоразумѣній отмѣтимъ еще разъ, что въ такъ написанныхъ уравненіяхъ (36) и (38) *скоростной напоръ въ трубѣ приравненъ нулю*. Поэтому рѣшивъ вопросъ, слѣдуетъ убедиться въ величинѣ слѣдственной ошибки и, въ случаѣ надобности, исправить ее, внося скоростной напоръ въ соответствующія части уравненій (36) и (38).

### § 27. Непрерывная раздача.

Разсмотримъ случай непрерывной раздачи по трубѣ постояннаго діаметра *D*. Очевидно, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ неравнобѣрнымъ движеніемъ; въ то же время такую трубу можно разсматривать, какъ случай сложнаго водопровода съ безконечно большимъ числомъ точекъ отвѣтвленій. Разсуждаемъ здѣсь слѣдующимъ образомъ:

На всякомъ элементѣ трубы длиною *ds* потеря напора *dh* можетъ быть представлена такъ:

$$dh = \frac{4 ds}{D} \zeta_r \frac{v^2}{2g}.$$

Пусть труба имѣетъ длину *l* и расходъ въ ея началѣ *Q*. Предполагая, что раздача по длинѣ трубы происходитъ равномерно, такъ что на единицу длины отдается  $\frac{Q}{l} = q$  куб. метр<sup>3</sup>, получимъ, что черезъ какое-нибудь сѣченіе, состоящее отъ начала на разстояніи *s*, протекаетъ количество жидкости, равное  $ql - qs = q(l - s)$ , такъ какъ на длинѣ *s* отдано *qs* куб. метровъ жидкости; поэтому скорость въ этомъ сѣченіи

$$v = \frac{q(l - s)}{\tau D^2}.$$

Слѣдовательно, потеря напора *dh* на длинѣ *ds* смежнаго съ этимъ сѣченіемъ элемента трубы будетъ:

$$dh = \frac{4 ds}{D^5} \zeta_r \frac{q^2 (l - s)^2 16}{2g \pi^2} = \frac{64 \zeta_r q^2}{2g \pi^2} \frac{(l - s)^2}{D^5} ds = \frac{A}{D^5} (l - s)^2 ds,$$

гдѣ буквою *A* для сокращенія обозначенъ постоянный коэф-тъ:

$$A = \frac{64 \zeta_r q^2}{2g \pi^2}.$$

Вся потеря напора  $h$  на длине  $l$  трубы определяется ур-емъ:

$$h = \frac{4}{D} \int_0^l q^2 ds = \frac{A}{D} \left( l^3 - l^2 \cdot \frac{l^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \frac{Al^3}{D^5}.$$

Если бы раздача воды была только въ концѣ трубы, то потеря напора  $h$  опредѣлялась бы

$$h = \frac{4l}{D^5} \cdot \frac{16q^2 l^3}{2g\pi^2} = A \frac{l^3}{D^5} = 3h,$$

т. е. при равномерной раздачѣ воды потеря напора оказывается втрое меньшей, нежели при раздачѣ того же расхода въ концѣ трубы. Такъ какъ необходимый напоръ обыкновенно создается искусственно при помощи насосовъ или путемъ надлежаще высокаго расположенія питающаго резервуара, то, конечно, желательно имѣть его возможно малымъ, и съ этой точки зрѣнія выгодно примѣнять равномерную отдачу. Но равномерная раздача воды въ такой формѣ, какъ это предположено выше, неосуществима практически, ибо отдача воды можетъ быть осуществлена только помощью отвлѣченій, поставленныхъ въ отдѣльныхъ точкахъ магистрали. Какъ бы то ни было, во всякомъ случаѣ выгодно возможно болѣе увеличивать въ трубѣ число пунктовъ отдающихъ воду, — потеря напора будетъ меньшая.

Обратно, оставляя ту же потерю, можно, примѣняя непрерывную раздачу воды, пропустить черезъ ту же трубу большее количество воды, а именно, называя  $\frac{A}{q^2}$  черезъ  $B$  и помня, что  $ql = Q$ , при равномерной раздачѣ имѣемъ:

$$h = \frac{1}{3} A \frac{l^3}{D^5} = \frac{1}{3} Bq^2 l^2 \frac{l}{D^5} = \frac{B}{3} Q^2 \frac{l}{D^5}.$$

при отдачѣ въ концѣ въ количествѣ  $Q_1$  имѣемъ:

$$h = \frac{64}{2g\pi^2} Q_1^2 \frac{l}{D^5} = BQ_1^2 \frac{l}{D^5}.$$

При условии одинаковой потери напора имѣемъ:

$$Q_1^2 = \frac{1}{3} Q^2$$

или

$$\frac{Q}{Q_1} = \sqrt{3} = 1.73.$$

Итакъ, при равномерной отдачѣ воды черезъ одну и ту же трубу, при одинаковой потерѣ напора, можно пропустить черезъ начальное сѣченіе трубы объемъ воды, въ 1.73 раза болѣе, нежели при отдачѣ въ концѣ.

### § 28. Водоструйные приборы.

В некотором отношении къ сложному водопроводу относятся водоструйные приборы, представляющие собою тоже подобие точек разветвления: различа только въ томъ, что въ сложномъ водопроводѣ движение опредѣляется исключительно соотношениями между пьезометрическими давлениями и потерями напора въ отдельныхъ вѣтвяхъ: здѣсь же движение въ одной изъ вѣтвей производится за счетъ части черпн движениа въ другой вѣтви \*). Разсмотримъ сначала, что происходитъ въ такомъ насосѣ, состоящемъ (фиг. 148), въ общемъ, изъ двухъ трубъ (1) и (2), оканчивающихся двумя концентрическими соплами, которыя затѣмъ переходятъ въ одну общую трубу; сѣчене внутренняго сопла назовемъ черезъ  $F_1$ , наружнаго — черезъ  $F_2$ , сѣчене общей трубы — черезъ  $F$ , соответственныя скорости пусть будутъ  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v$  (послѣдняя взята тамъ, гдѣ обѣ струи уже смѣшались и идутъ съ обѣю среднюю скоростью). Давленіе въ плоскости обѣихъ сопелъ назовемъ черезъ  $p_1$ , а тамъ, гдѣ скорость есть  $v$ , черезъ  $p$ . Предполагая что приборъ перекачиваетъ воду, мы должны, очевидно, считать: во всѣхъ мѣстахъ насоса постояннымъ. Предположимъ, что оси всѣхъ трехъ частей прибора лежатъ на одной горизонтали.

Внутреннее сопло подаетъ  $F_1 v_1 \gamma$  *kg* воды въ секунду; иля со скоростью  $v_1$  и находясь подъ давлениемъ  $p_1$ , это количество воды приноситъ съ собою запасъ работы

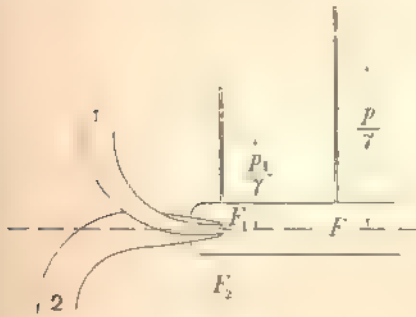
$$F_1 v_1 \left( \frac{v_1^2}{2g} + F_1 v_1 p_1 \right).$$

Вторая струя приноситъ запасъ работы

$$F_2 v_2 \gamma \left( \frac{v_2^2}{2g} + F_2 v_2 p_1 \right).$$

Изъ трубы уносится запасъ работы

$$F v \gamma \left( \frac{v^2}{2g} + F v p \right).$$



Фиг. 148.

Наконецъ, первые  $F_1 v_1 \gamma$  *kg* в. измѣнивъ внезапно скорость изъ  $v_1$  на  $v$ , преодолевали при этомъ сопротивление удара, на что затрачена ими работа:

$$F_1 v_1 \gamma \left( \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \right).$$

Подобнымъ же образомъ, вторая струя затратила при внезапномъ измѣненіи скорости энергію въ количествѣ

$$F_2 v_2 \gamma \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \right).$$

По закону сохранения энергии слѣдуетъ, что запасъ принесенной работы равенъ суммѣ унесенной и потерянной работъ; поэтому можемъ написать:

$$\begin{aligned} & F_1 v_1 \gamma \frac{v_1^2}{2g} + F_2 v_2 \gamma \frac{v_2^2}{2g} + F_1 v_1 p_1 + F_2 v_2 p_1 = \\ & = F v \gamma \frac{v^2}{2g} + F v p + F_1 v_1 \gamma \left( \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \right) + F_2 v_2 \gamma \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \right) \dots \dots \dots (45) \end{aligned}$$

\* Въ § 24 были рассмотрѣны водоструйный насосъ для выкачивания воздуха; здѣсь мы имѣемъ въ виду, что насосъ употребляется для перекачивания воды.



Очевидно также, что при рассматриваемом направлении течения можем написать:

$$F_1 v_1 + F_2 v_2 = F v \dots \dots \dots (46)$$

Приняв это в виду, получим из (46):

$$F \frac{p - p_1}{\gamma} = F_1 v_1 \frac{2 v_1 \gamma}{2g} v^2 - F_2 v_2 \frac{2 v_2 \gamma}{2g} v^2 - (F_1 v_1 + F_2 v_2) \frac{v^2}{2g},$$

или, после приведения:

$$\frac{p - p_1}{\gamma} = \frac{v}{g} \left[ \frac{F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2}{F_1 v_1 + F_2 v_2} - v \right], \dots \dots \dots (47)^*$$

что можно переписать так:

$$\frac{p - p_1}{\gamma} = \frac{v}{g} \left[ \frac{F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2}{F_1 v_1 + F_2 v_2} - v \right] \dots \dots \dots (47')$$

Наконец, энергия, потерянная обтекаемыми струями при прохождении через прибор, оценивается величиной

$$L_B = F_1 v_1 \gamma \frac{(v_1 - v)^2}{2g} - F_2 v_2 \gamma \frac{(v_2 - v)^2}{2g} \dots \dots \dots (48)$$

Уравн. (46), (47) и (49) дают возможность определить по заданным, напр.,  $v_1$ ,  $v_2$  и  $p_1$ , а также по размерам прибора, остальные величины, т.е.  $v$ ,  $p$  и потерянную работу.

Легко выразить и коэффициент полезного действия прибора. Если движущей является центральная струя, то затраченная работа равна:

$$L = F_1 v_1 \gamma \frac{v_1^2 - v^2}{2g} + F_1 v_1 (p_1 - p),$$

а полезная работа равна:

$$L_n = F_2 v_2 \gamma \frac{v^2 - v_2^2}{2g} + F_2 v_2 (p - p_1).$$

Следоват. коэф-т полезного действия (мы его подробно не выписываем):

$$\eta = \frac{L_n}{L}.$$

Перейдем теперь к более конкретному случаю (фиг. 149). Из резервуара *A* вода подается по трубке к центральному соплу и далее через трубу проходит в резервуар *B*; все протекание происходит под напором  $h_2$ . Кроме того, насос сосет воду из резервуара *B* и гонит ее в тот же резервуар *D*; при этом жидкость поднимается на высоту  $h_1 - h_2$ . Оставим старая обозначения для площадей, скоростей и давлений. Сопротивления в трубке *AC*, подводящей рабочую воду, считать из общих и особых сопротивлений; если труба дана, т.е., если даны ее длина и сечение, а также площадь сопла  $F_1$ , то, в силу того, что все потери напора пропорциональны квадрату скорости, легко выразить эти потери и отнести их к скорости  $v_1$  в сопле, внося по ур-ню расхода соотношения между скоростью  $v_1$  и теми скоростями, которые входят в выражения отдельных потерь напора. Тогда во всяком случае получим, что потеря

\* Если концентрических сопел, оканчивающихся в одной плоскости, имеется не два, а больше, то, по аналогии с предыдущим, ур-не (47) можно написать так:

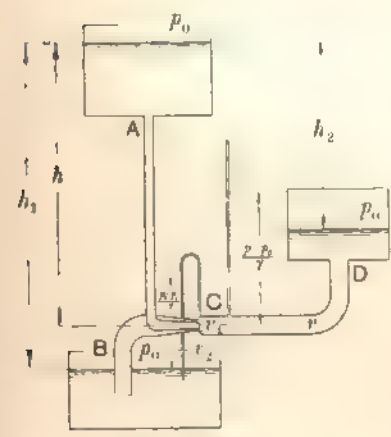
$$\frac{p - p_1}{\gamma} = \frac{v}{g} \left[ \frac{\sum F_i v_i^2}{\sum F_i v_i} - v \right].$$

напора может быть выражена, какъ  $\zeta_1 \frac{v_1^2}{2g}$ , гдѣ, конечно, коэффициентъ  $\zeta_1$  есть нѣкоторый производный коэф-тъ, ни въ какихъ таблицахъ не находящийся. Подобнымъ же образомъ потерю напора во всасывающей трубѣ, отнесенную къ скорости  $v_2$ , назовемъ черезъ  $\zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$ , а потерю въ нагнетательной трубѣ  $CD$ , которую мы полагаемъ цилиндрической съ сѣченіемъ  $F$ , обозначимъ черезъ  $\zeta \frac{v^2}{2g}$ . Ур-я Д. Бернулли для отдѣльныхъ вѣтвей будутъ:

для  $AC$ : 
$$\frac{p_0}{\gamma} + h = \frac{p_1}{\gamma} + (1 + \zeta_1) \frac{v_1^2}{2g} \dots \dots \dots (49)$$

для  $BC$ : 
$$\frac{p_0}{\gamma} - (h_1 - h) = \frac{p_1}{\gamma} + (1 + \zeta_2) \frac{v_2^2}{2g} \dots \dots \dots (50)$$

для  $CD$ : 
$$\frac{p}{\gamma} - \frac{v^2}{2g} = (h - h_2) \frac{p_0}{\gamma} + \zeta \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (51')$$



Фиг. 149.

Последній членъ въ последнемъ ур-и имѣетъ значеніе потери напора на ударъ при переходѣ изъ трубы  $CD$  въ резервуаръ  $D$ , гдѣ скорость предположена исчезающе малой; если бы резервуара  $D$  не было, то этотъ членъ выражалъ бы уносимую изъ трубы живую силу на каждый  $kg$  воды.

Кромѣ того, для самого насоса мы имѣемъ ур-е (47'), по которому

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{1}{g} \left[ \frac{F_1}{F} v_1^2 + \frac{F_2}{F} v_2^2 - v^2 \right].$$

Исключая помощью этого ур-я давления  $p$  изъ ур-я (51'), получимъ окончательно для этой вѣтви  $CD$ , послѣ приведенія:

$$\frac{p_1}{\gamma} - (h - h_2) = \frac{p_0}{\gamma} + (2 + \zeta) \frac{v^2}{2g} - \frac{2F_1}{F} \frac{v_1^2}{2g} - \frac{2F_2}{F} \frac{v_2^2}{2g} \dots \dots \dots (51)$$

Присоединяя къ ур-ямъ (49), (50) и (51) еще ур-е расхода (46), получимъ для опредѣленія неизвѣстныхъ скоростей  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v$  и давления  $p_1$  четыре ур-я, — вопросъ, такимъ образомъ, можно считать рѣшеннымъ. Именно, вносимъ въ ур-е (51) значеніе  $v$ , опредѣленное изъ ур-я расхода. Собирая надлежащимъ образомъ члены, получимъ:

$$\frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + h - h_2 = - \left[ 2 \frac{F_1}{F} - (2 + \zeta_1) \frac{F_1^2}{F^2} \right] \frac{v_1^2}{2g} + \left[ 2 \frac{F_2}{F} - (2 + \zeta_2) \frac{F_2^2}{F^2} \right] \frac{v_2^2}{2g} - 2(2 + \zeta) \frac{F_1}{F} \frac{F_2}{F} \frac{v_1 v_2}{2g}.$$

Дѣлимъ уравненіе на  $\frac{v_1^2}{2g}$  и располагаемъ его правую часть по нисходящимъ степенямъ отношенія  $\frac{v_2}{v_1}$ ; получаемъ:

$$\frac{2g}{v_1^2} \left[ \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + h - h_2 \right] = \left[ 2 \frac{F_1}{F} - (2 + \zeta) \frac{F_1^2}{F^2} \right] - 2(2 + \zeta) \frac{F_1}{F} \frac{F_2}{F} \frac{v_2}{v_1} + \left[ 2 \frac{F_2}{F} - (2 + \zeta) \frac{F_2^2}{F^2} \right] \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 \dots (1)$$

Первую часть этого уравнения преобразуемъ помощьюъ ур-ий (49) и (50). Пользуясь ур-иемъ (49), можемъ написать:

$$\frac{2g}{v_1^2} \left[ \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} + h - h_2 \right] - \frac{2g}{v_1^2} \left[ (1 + \zeta_1) \frac{v_1^2}{2g} - h_2 \right] = (1 + \zeta_1) - \frac{2g}{v_1^2} h_2 \dots (E)$$

Далѣе, вычитая (50) изъ (49), находимъ:

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{h_1}{(1 + \zeta_1) - (1 + \zeta_2)} \left( \frac{v_2^2}{v_1^2} \right) \dots \dots \dots (52)$$

Поэтому выражение (E), т.е. первая часть ур-ия (D), преобразуется далѣе въ

$$(1 + \zeta_1) - \frac{h_2}{h_1} \left[ (1 + \zeta_1) - (1 + \zeta_2) \frac{v_2^2}{v_1^2} \right] - \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} \right) (1 + \zeta_1) - (1 + \zeta_2) \frac{h_2}{h_1} \frac{v_2^2}{v_1^2} \dots (F)$$

Замѣняя теперь этимъ выраженіемъ (F) первую часть ур-ия (D) и собирая члены съ  $\left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2$ , получаемъ ур-іе:

$$\begin{aligned} & \left[ (1 + \zeta_2) \frac{h_2}{h_1} - (2 + \zeta_2) \frac{F_2^2}{F_1^2} - 2 \frac{F_2^2}{F_1^2} \right] \frac{v_2^2}{v_1^2} - 2(2 + \zeta_2) \frac{F_1}{F_2} \frac{F_2}{F_1} \frac{v_2}{v_1} - \\ & = 2 \frac{F_1}{F_2} - (2 + \zeta_2) \left( \frac{F_1}{F_2} \right)^2 - (1 + \zeta_2) \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} \right) \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

Отсюда можемъ найти отношеніе  $\frac{v_2}{v_1}$ , а по нему, при помощи (52), опредѣлимъ скорость  $v_1$ ; дальнѣйшее рѣшеніе совершенно просто.

Опредѣливъ такимъ образомъ всѣ скорости и давления остается выразить коэф-циентъ полезнаго дѣйствія прибора. Работа, затраченная въ единицу времени, есть, очевидно,  $F_1 v_1 h_2$ , полезная же есть  $F_2 v_2 (h_1 - h_2)$ , поэтому

$$\eta = \frac{h_1}{h_2} - 1 - \frac{F_2}{F_1} \frac{v_2}{v_1} \dots \dots \dots (54)$$

По поводу этихъ ур-ий слѣдуетъ отмѣтить, что ни въ одно изъ нихъ 46, 52, 53 и 54, служащихъ для опредѣленія скоростей и коэф-та полезнаго дѣйствія, высота  $h$ , опредѣляющая расположеніе прибора, не входитъ; другими словами, насосъ можетъ служить, какъ всасывающій (эжекторъ) и какъ нагнетательный, или какъ то и другое вмѣстѣ. При этомъ, если коэф-тъ полезнаго дѣйствія прибора и мѣняется, то только потому, что при разныхъ положеніяхъ насоса мѣняются коэф-ты  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  и  $\zeta$ . Можно, между прочимъ, указать, что увеличеніе высоты  $h$ , т.е. уменьшеніе всасыванія, несомнѣнно удлиняетъ подводящую трубу и укорачиваетъ всасывающую; поэтому съ увеличеніемъ  $h$  несомнѣнно увеличивается  $\zeta_1$  и уменьшается  $\zeta_2$ ; изъ того, что первый коэф-тъ входитъ въ постоянный членъ ур-ия (53), а второй—въ коэф-тъ при второй степени отношенія  $\frac{v_2}{v_1}$ , можно заключить, что уменьшеніе всасыванія дастъ для даннаго насоса большія отношенія  $\left( \frac{v_2}{v_1} \right)$ , т.е. большіе коэф-ты полезнаго дѣйствія. Но, помимо этого, изъ (52), видно, что чѣмъ больше  $\zeta_2$  и меньше  $\zeta_1$ , тѣмъ хуже, ибо тѣмъ меньшія отношенія необходимы для  $\left( \frac{v_2}{v_1} \right)$ , чтобы для

работы насоса не получить черезчур больших скоростей  $v_1$ . Ур-е (52) кладет даже определенный предѣлъ для  $\frac{v_2}{v_1}$ , — именно, должно быть

$$\frac{v_2}{v_1} < 1 + \zeta_1; \dots \dots \dots (G)$$

При несоблюдении этого условия скорость  $v_1$  становится мнимой, т.е. невозможной. Здѣсь видимъ новое указание на необходимость большихъ высотъ всасыванія и даже большихъ длинъ всасывающихъ трубъ. Кроме того, очевидно, все-таки, что высота  $h$  вообще, не безразлична: отъ нея зависитъ давление  $p_1$  (ур-е 51), которое, конечно, отвѣтъ не должно падать ниже нуля, иначе движение воды во всасывающей трубѣ прекратится, и насосъ не будетъ работать.

Далѣе, очевидно, что приборъ тогда является насосомъ когда по ур-ю 53 можно получить одинъ положительный корень; ибо въ противномъ случаѣ скажется, что или сосудъ  $A$  питаетъ оба сосуда  $B$  и  $D$ , или же, при нулевомъ значеніи  $\frac{v_2}{v_1}$ , вода просто течетъ изъ  $A$  въ  $D$ , а труба  $BC$  не подаетъ ни капли воды. Приведемъ ур-е 53 къ нормальному виду  $ax^2 + bx + c = 0$ , т.е. положивъ:

$$a = 1 + \zeta_1 \frac{h_2}{h_1} + \zeta_2 \quad \zeta = \frac{F_2 v_2^2}{F} - 2 \frac{F_2}{F}$$

$$b = 2 \zeta \quad \zeta = \frac{F_1}{F} \frac{F_2}{F}$$

$$c = 1 + \zeta_1 \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} \right) + \zeta_2 \quad \zeta = \frac{F_1}{F} - 2 \frac{F_1}{F}$$

видимъ, что такъ какъ коэффициентъ  $b$ , по существу, положителенъ, то положительные корни возможны, если одновременно существуютъ слѣдующіе знаки при коэф-тахъ

$$\begin{array}{l} \text{если } a = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\} \text{ то ур-е имѣетъ 2 положительныхъ корня;} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

Итакъ, при отрицательномъ  $a$  — другими словами, если

$$\frac{h_2}{h_1} < \left[ 2 - \zeta_2 - \zeta \frac{F_2}{F} \right] \frac{F_1}{F}$$

ур-е 53, во всякомъ случаѣ, имѣетъ рѣшеніе, соответствующее вопросу, если при томъ оно удовлетворяетъ слову (G), полученному нами изъ ур-я 52. При этомъ для  $\frac{v_2}{v_1}$  указывается высшій предѣлъ; чѣмъ онъ самъ по себѣ ниже, тѣмъ лучше, ибо тѣмъ больше  $\eta$ .

Наоборотъ, если  $a$  положительно, т.-е.

$$\frac{h_2}{h_1} = \left[ \frac{2 - \frac{F_2^2}{F^2}}{1 - \zeta_1} \right] \frac{F_2^2}{F^2} \dots \dots \dots (55)$$

то необходимо имѣть  $c$  отрицательнымъ, т.-е. необходимо, чтобы:

$$1 - \frac{h_2}{h_1} = \left[ \frac{2 - \frac{F_1^2}{F^2}}{1 - \zeta_1} \right] \frac{F_1^2}{F^2}$$

иначе:

$$\frac{h_2}{h_1} > 1 - \left[ \frac{2 - \frac{F_1^2}{F^2}}{1 - \zeta_1} \right] \frac{F_1^2}{F^2} \dots \dots \dots (56)$$

Неравенства 55) и 56) даютъ въ этомъ случаѣ низшій прѣдѣлъ для отноше-  
нія  $\frac{h_2}{h_1}$ , чѣмъ отчасти уже опредѣляется максимальная возможная высота подъема воды  
 $h_1 = h_2$ , а слѣд., и максимальная величина коэф-та полезнаго дѣйствія. Именно такое со-  
отношение данныхъ величинъ и имѣть обыкновенно мѣсто.

Вообще полезное дѣйствіе такихъ насосовъ не велико; главная потеря есть та шерстя  
 $L_B$  [ур-іе 48], которая пропадаетъ внутри самого насоса и превращается въ теплоту.  
Уменьшить отчасти эту потерю можно, ставя на пути соединившихся струй коническій  
расходящійся насадокъ.

Здѣсь уместно отмѣтить, что изложенная теорія такихъ приборовъ, данная въ суще-  
ственныхъ чертахъ Зенпегомъ, применима не только къ случаю воды \*) Она пригодна  
и для двухъ упругихъ жидкостей коль скоро есть возможность считать, что  $\zeta$  до смѣше-  
нія и послѣ него сохраняетъ одно и то же значеніе; если, напр., разсматривать вмѣсто  
воды воздухъ, то вышенаписанныя ур-ія передадутъ явленіе достаточно точно, если дви-  
жущая струя воздуха вытекаетъ не подъ очень большимъ давленіемъ, такъ, чтобы можно  
было пренебречь измѣненіями  $\zeta$ , а равно и тепловымъ обменомъ, при этомъ происходящимъ.  
Подобный же случай применимости этихъ ур-ій мы имѣемъ въ паровозномъ конусѣ, гдѣ  
плотности мятая пара и горячихъ продуктовъ горѣнія близки между собою и, кромѣ  
того, входятъ и выходятъ изъ прибора при мало измѣняющихся давленіяхъ. Наобо-  
ротъ, къ инжектору, гдѣ смѣшиваются паръ и вода, эта теорія совсѣмъ не применима.  
Интересно отмѣтить, что то, что въ водоструйномъ насосѣ является чистой и даже глав-  
ной потерей,—потеря работы на ударъ и обращеніе ея въ теплоту,—въ инжекторѣ,  
питающемъ котель, является уже не потерей; нагрѣваніе питательной воды для котла есть  
полезный, попутно достигаемый результатъ при работѣ инжектора. Наоборотъ, если  
инжекторъ употребляется, какъ, вообще, средство для перекачки жидкости, напр., если бы  
имъ пользовались въ качествѣ пожарнаго насоса, то упомянутое нагрѣваніе воды опять  
утрачиваетъ характеръ полезности, и такое примененіе инжектора не можетъ быть эко-  
номично хотя иногда, въ силу удобства и компактности, инжекторами пользуются и для  
этой цѣли, напр., при тушеніи пожаровъ на желѣзнодорожныхъ станціяхъ помощью паро-  
возовъ и т. п.).

\*) Освѣщая вопросъ, эта теорія, къ сожалѣнію, не применима для практическаго проекти-  
рованія такихъ приборовъ. Нѣкоторыя данныя по этому вопросу можно найти въ статьѣ  
И. Тиле въ „Горномъ Журналѣ“ за 1892, № 2.

## § 29. О гидравлическомъ ударѣ въ водопроводныхъ трубахъ.

При расчетѣ водопроводовъ, кромѣ необходимыхъ диаметровъ трубъ, нужно опредѣлять еще толщину ихъ стѣнокъ. Воздѣйствія, которымъ можетъ подвергнуться водопроводная труба во время своей службы и которыя нужно имѣть въ виду при опредѣленіи ея прочныхъ размѣровъ, очень разнообразны. Прежде всего обращаетъ на себя вниманіе опредѣленіе толщины стѣнки изъ расчета на разрывъ тѣмъ наибольшимъ внутреннимъ гидростатическимъ давленіемъ, которое имѣетъ мѣсто въ наиболѣе низкой точкѣ водопроводной сѣти и которое мы представляемъ себѣ одинаковымъ во всѣхъ точкахъ периметра трубы, пренебрегая влияніемъ ея диаметра, если труба горизонтальна или близка къ этому положенію; расчетное, «пробное» давленіе, которымъ обыкновенно испытывается при приѣмкѣ каждая труба, принимается на условленную величину, напр., около 5 *atm*, больше этого гидростатическаго давленія. Далѣе, металлическія трубы водопроводовъ, болѣе или менѣе глубоко закапываемыя для предохраненія отъ замерзанія, нерѣдко могутъ подвергаться изгибающимъ воздѣйствіямъ, если при тѣхъ или иныхъ строительныхъ работахъ подъ городскими улицами, или благодаря размывающему дѣйствию утечки черезъ неплотности самой трубы, она окажется опирающейся своими концами на грунтъ и поддерживающей не только свой вѣсъ и вѣсъ заключенной въ ней жидкости, но также и нѣкоторую нагрузку въ видѣ слоя вышележащей земли, проезжающей повозки и т. п. Въ трубахъ очень большого диаметра и притомъ подвергнутыхъ не очень большому внутреннему давленію, ошибочно считать давленіе равномернымъ; напротивъ, при небольшомъ уклонѣ оси трубы совершенно явно выступаетъ изгибающій моментъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси трубы, сплющивающій круглое сѣченіе. Въ этомъ смыслѣ можетъ оказаться опаснымъ періодъ наполненія водою, особенно для трубъ желѣзобетонныхъ, достигающихъ огромныхъ диаметровъ свыше 3 *mt*r. И т. д... Отсылая интересующихся къ указываемымъ ниже источникамъ \*), отмѣтимъ еще одно обстоятельство, играющее роль въ этомъ вопросѣ. Водопроводная сѣть всегда снабжается задвижками, кранами и т. п. затворами, которые позволяютъ болѣе или менѣе быстро прекращать истеченіе. Если запираніе происходитъ быстро, — будемъ говорить, моментально, то это сводится къ внезапной остановкѣ всей колонны воды, которая двигалась въ трубѣ; живая сила этой массы погашается внезапно, отчего, конечно, давленіе въ трубѣ сильно повышается. Въ этомъ и состоитъ явленіе гидростатическаго удара, остававшееся мало

\*) К. М. Игнатовъ. „Толщина стѣнокъ чугунныхъ трубъ“ и „Надежность и живыя наиболѣе размѣры чугунныхъ трубопроводовъ“. Обѣ статьи отпечатаны „на глазахъ рукописи“ въ видѣ докладовъ Моск. Гор. Училищъ въ 1903 г. и войдутъ въ составъ большой изданной работы этого автора „Изъ практики проектированія инженерныхъ сооружений“. Th. Forchheimer: Zur Festigkeit weiter Röhre въ журналѣ „Zeitschr. d. Oesterr. Ing. Arch.-Vereines“, 1904, №№ 9 и 10. См. также Handbuch der Ingenieurwissenschaften, часть третья съ общимъ заглавіемъ Der Wasserbau, нужныя свѣдѣнія помѣщены въ 13 томѣ этой части, посвященномъ заглавіемъ Ausbau von Wasserkräften, написанномъ инж. Th. Koehn. стр. 889 и слѣд. Leipzig, 1908.

изследованнымъ до 1897 года, когда проф. Императорскаго Московскаго Техническаго Училища Н. Е. Жуковский разсмотрѣлъ этотъ вопросъ теоретически и провѣрилъ свои выводы на рядѣ наблюдений, произведенныхъ на Алексѣевской водокачкѣ московскаго водопровода. До тѣхъ поръ было извѣстно только, что нельзя ставить на водопроводныя линіи быстро запирающихся затворовъ, и если конструкторы при расчетѣ толщины стѣнки и оцѣнивали увеличеніе давленія отъ удара, то только по чутью: такъ, напр. Fanning \*) считаетъ, что ударъ вызываетъ увеличеніе не больше, какъ въ 100 фунт на 1 кв. дм., т. е. около 7 атм., и это добавочное давленіе онъ кладетъ въ основу расчета толщины стѣнки, которую ему еще приходится увеличивать, чтобы подогнуть полученный результатъ къ исполняемому размѣрамъ. Мы увидимъ ниже, что ударъ можетъ вызвать и дѣйствительно вызываетъ повышеніе давленія гораздо большее, нежели это полагаетъ Fanning. Кроме того, вопросъ о гидравлическомъ ударѣ приобрѣлъ за послѣдніе годы большое практическое значеніе, благодаря турбиннымъ установкамъ съ ихъ длинными и дорогими трубопроводами и быстро закрывающимися автоматическими регуляторами числа оборотовъ турбинъ. Ясно, что крайне важно защитить трубопроводъ отъ вреднаго дѣйствія ударнаго повышенія давленія и тѣмъ сдѣлать работу всей гидроэлектрической станции достаточно надежной. Кроме того, весь ходъ измѣненія давленія въ трубѣ не можетъ не отражаться на вытекании воды изъ него, а тѣмъ самымъ и на условіяхъ работы и регулированія турбинъ. И для этой цѣли, — изучения условій соблюденія желаемой степени равномерности хода двигателей, важно знать, какъ протекаетъ само явленіе гидравлическаго удара въ трубѣ. Здѣсь мы приводимъ только возможно короткое извлеченіе изъ работы Жуковскаго, отсылая интересующихся къ «Бюллетенямъ Политехническаго Общества», 1899 г., № 5 \*\*).

\*) См. S. F. Fanning, „A practical treatise on hydraulic and water-supply engineering“, 15 edition, 1902, p. 450 и 453

\*\*) Съ тѣхъ поръ въ журналѣ „Revue de mécanique“ появились двѣ работы, посвященные тому же вопросу: одна принадлежитъ проф. Рато (A. Râteau) и напечатана въ январскомъ номерѣ этого журнала за 1900 годъ; она составляетъ одну изъ послѣднихъ главъ его работы „Les turbo machines“, помещенной въ рядѣ номеровъ этого же журнала и появившейся въ 1900 году отдельной книжкой подъ заглавіемъ „Traité des turbo-machines“. Другая принадлежитъ Альеви (M. L. Allievi) Она носитъ названіе „Théorie générale du mouvement varié de l'eau dans les tuyaux de conduite“ и напечатана въ 1904 году въ томъ же журналѣ въ январской (стр. 10—22) и мартовской (стр. 244—259) книжкахъ. Впервые эта работа появилась, въ нѣсколько иномъ видѣ, еще въ декабрѣ 1901 года въ „Annali della Società degli Ingegneri ed architetti Italiani“. Первый авторъ не принимаетъ во вниманіе деформаций стѣнокъ трубы, второй авторъ считаетъ трубу растяжимой, а воду сжимаемой, что поодио соответствуетъ разсмотрѣнію Н. Е. Жуковскаго, влѣдствие этого и основные результаты, полученные Альеви, тождественны съ выводами Н. Е. Однако Альеви даетъ всему вопросу иное развитіе, интересуясь преимущественно тѣми случаями, когда закрытіе трубопровода происходитъ не очень быстро, что имѣетъ мѣсто въ практикѣ турбинныхъ водопроводовъ. Нужно отмѣтить также работу вѣнскаго проф. Будау (A. Budaу, Druckschwankungen in Turbinenzuleitungsröhren, въ журналѣ „Zeitschr. d. österr. Ing.-u. Arch.-Vereines“, 1905. № 29—31). Послѣдній считаетъ воду несжимаемой. Его работа интересна цѣлымъ рядомъ практическихъ указашій. — См. также вышеупомянутое сочиненіе Th. Коehn'a. Ausbau

Пусть мы примем горизонтальную трубу, длиною  $l$ , радиуса  $R_0$ , по которой жидкость протекает со скоростью  $v$  отъ конца  $B$  къ концу  $A$ , изъ котораго она и выливается. Пусть въ какой-нибудь моментъ конецъ  $A$  закрывается. Тогда вся живая сила массы воды, находившейся въ этотъ моментъ въ трубѣ, равная  $\gamma_0 \pi R_0^2 l \frac{v^2}{2g}$ , погашается. Здѣсь  $\gamma_0$  есть вѣсъ 1  $\text{mtr}^3$  воды до удара; вмѣсто  $\frac{\gamma_0}{g}$  введемъ плотность  $\rho_0$  до удара, такъ что уничтоженная живая сила выразится

$$\rho_0 \pi R_0^2 l \frac{v^2}{2} \dots \dots \dots (57)$$

Эта живая сила тратится на работу деформации стѣнокъ трубы и на сжатіе самой воды, упругостью которой, хотя и малой, пренебречь все-таки нельзя.

Деформация стѣнокъ состоитъ какъ въ вытягиваніи осей трубы, такъ и въ увеличеніи ея диаметра. Легко, однако, видѣть, что работа деформации состоитъ, главнымъ образомъ, изъ работы удлиненія периметра трубы, и въ гораздо меньшей степени изъ работы вытягиванія трубы въ длину. Поэтому мы примемъ во вниманіе только эту первую деформацию.

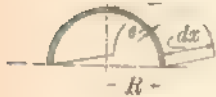
Съ момента начала закрытія задвижки давленіе внутри возрастаетъ, при чемъ, если сначала, до повышенія давленія, внутренний диаметръ былъ  $2R_0$ , то потомъ, когда избыточное давленіе достигло вѣкоторой величины  $P$ , внутренний диаметръ сдѣлался равнымъ  $2R$ ; подъ  $P$ , такимъ образомъ, мы будемъ подразумѣвать не полное давленіе внутри трубы, а только величину его измѣненія, вызваннаго ударомъ. Легко видѣть, что въ указанный моментъ вся внутренняя поверхность трубы оказывается подверженной силѣ  $2\pi R l P$ ; эта сила вызываетъ дальнѣйшее измѣненіе радиуса трубы, къ этому времени измѣнившемуся уже на величину  $(R - R_0)$ . Слѣдовательно, сила  $2\pi R l P$ , суммирующаяся изъ ряда элементарныхъ силъ, направленныхъ по радиусамъ, приложенныхъ по всей поверхности трубы и перемѣщающихъ свои точки приложенія, — каждая на величину  $d|R - R_0|$  и тоже въ радіальномъ направленіи, — эта суммарная сила совершаетъ работу  $2\pi R l P d(R - R_0)$ . Вслѣдствіе малой измѣняемости радиуса ошибки не будетъ, если вмѣсто  $R$  въ множителѣ передъ скобками мы поставимъ начальный радиусъ  $R_0$ , такъ какъ это сводится къ отбрасыванію въ выраженіи элементарной работы бесконечно малаго второго порядка. Имѣя выраженіе работы за элементъ времени  $dt$ , можемъ выразить теперь работу, успешную на деформированіе трубы отъ начального значенія радиуса  $R_0$  до вѣкотораго  $R$ , **интеграломъ**

$$\int_{R_0}^R 2\pi R_0 l P \cdot d(R - R_0).$$

von Wasserkraften, стр. 507 и слѣдъ Нельза не отмѣтитъ, что ни одна изъ названныхъ работъ не охватываетъ вопроса такъ широко, и, что особенно важно, не опирается на экспериментальную проверку, какъ это сдѣлано Н. Е. Жуковскимъ, работа котораго, повидному, осталась неизвѣстной этихъ авторамъ.



Выразимъ здѣсь  $R$  черезъ  $P$ , для чего воспользуемся закономъ Гука, по которому деформация пропорциональна напряженіямъ. Очевидно, что если кольцо расширилось отъ діаметра  $2R_0$  до діаметра  $2R$ , то относительное удлинение его периметра равно  $\frac{R - R_0}{R}$ ; напряженіе же матеріала, соответствующее этому удлинению, равно  $E \frac{R - R_0}{R}$ , гдѣ  $E$  есть модуль упругости матеріала трубы. Разматривая полукольцевой элементъ трубы (фиг. 151) длиною  $dx$ , видимъ, что это напряженіе распределено по площади  $2e dx$ , гдѣ  $e$  есть толщина стѣнки трубы. Слѣдовательно, сила сопротивленія разрыву трубы по діаметральной плоскости есть  $2e dx \cdot E \frac{R - R_0}{R}$ . Сила же, стремящаяся произвести этотъ разрывъ, есть  $2R \cdot P \cdot dx$ . Для равновѣсія необходимо, чтобы



Фиг. 151.

$$2e dx \cdot E \frac{R - R_0}{R} = 2R \cdot P \cdot dx.$$

Отсюда получаемъ

$$P = \frac{e \cdot E}{R_0 R} (R - R_0).$$

Онять, въ силу малой измѣняемости радиуса, въ знаменателѣ вмѣсто  $R$  подставимъ  $R_0$ . Получаемъ:

$$P = \frac{eE}{R_0^2} (R - R_0).$$

Дифференцируемъ полученный результатъ, находимъ:

$$d(R - R_0) = \frac{R_0^2}{eE} dP.$$

Вносимъ это значеніе дифференціала  $d(R - R_0)$  въ выраженіе работы деформации трубы и, въ виду происшедшей замѣны переменнаго, соответственно мѣняемъ предѣлы интеграціи; замѣчая, что при  $R = R_0$  имѣемъ  $P = 0$  и что текущему значенію  $R$  соответствуетъ текущее значеніе  $P$ , находимъ

$$\int_{R_0}^R 2\pi R_0 l P \cdot d(R - R_0) = \int_0^P 2\pi R_0 l P \frac{R_0^2}{eE} \cdot dP,$$

что послѣ интеграціи даетъ

$$\frac{7 R_0^3 l}{eE} P^2 \dots \dots \dots (58)$$

Такова работа, затраченная на деформированіе трубы.

Работу, затраченную на сжатие воды, можно подсчитать такъ. Если какое-нибудь сжимаемое тѣло, въ количествѣ 1 *kg*, удѣльнаго объема  $v_0^*$ , подвергается внѣшнему давлению (на единицу площади) *P*, вслѣдствіе чего его удѣльный объемъ измѣняется, уменьшаясь, до *v*, то элементарная работа этого давления, какъ извѣстно, равна *P dv* или также *P d(v - v<sub>0</sub>)*, такъ какъ *dv = d(v - v<sub>0</sub>)*, ибо *v<sub>0</sub> = const.*, въ качествѣ заданной начальной величины. Если же сжатию подвержены не 1 *kg*, а нѣсколько, въ нашемъ случаѣ  $\pi R_0^2 l$  *kg* воды, то вся работа сжатія, при измѣненіи удѣльнаго объема на *d(v - v<sub>0</sub>)*, выразится черезъ

$$\pi R_0^2 l P \cdot d(v - v_0) = \pi R_0^2 l P \cdot d \left( \frac{v - v_0}{v_0} \right) \cdot v_0.$$

и слѣд. за все время, пока удѣльный объемъ мѣняется отъ *v<sub>0</sub>* до *v*, работа сжатія выразится интеграломъ

$$\int_{v_0}^v \pi R_0^2 l P \cdot d \frac{v - v_0}{v_0}.$$

Чтобы выразить непрерывное *v* черезъ *P*, воспользуемся и тутъ закономъ Гука, по которому напряженіе материала равно произведенію изъ его модуля упругости и его относительной деформации. Въ нашемъ случаѣ напряженіе сжатія воды, очевидно, есть *P*. Ея абсолютное формозмѣненіе для 1 *kg* есть *(v - v<sub>0</sub>)*, такъ что относительная деформация равна  $\frac{v - v_0}{v_0}$ . Если модуль упругости воды назовемъ буквою *K*, то имѣемъ

$$P = K \frac{v - v_0}{v_0}.$$

Дифференцируемъ это выраженіе, считая модуль упругости *K* постояннымъ; находимъ:

$$d \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{1}{K} dP.$$

Вносимъ это соотношеніе въ выраженіе работы сжатія воды, мѣняемъ соответственно предѣлы, исходя изъ того, что начальному значенію удѣльнаго объема *v<sub>0</sub>* соответствуетъ повышеніе давления *P = 0*, и интегрируемъ это выраженіе. Получаемъ:

$$\int_{v_0}^v \pi R_0^2 l P \cdot d \frac{v - v_0}{v_0} = \int_0^P \pi R_0^2 l P \cdot \frac{1}{K} dP = \frac{\pi R_0^2 l}{2K} P^2 \dots (59)$$

\* Обозначая одной и тою же буквою *v* скорость и удѣльный объемъ, полагаемъ, что это вызоветъ нѣтъ никакого недоразумѣнія, ибо въ предѣлахъ этого § удѣльный объемъ фигурируетъ, лишь кончая уравненіемъ 59, и въ эти выраженія скорость не входитъ.

Такова работа, затраченная на деформирование воды. Согласно сказанному, сумма выражений (59) и (58) должна быть равна выражению (57), т.-е. должно имѣть мѣсто равенство:

$$\gamma R_0^2 l \varrho_0 \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma R_0^3 l P^2}{eE} + \frac{\gamma R_0^2 l P^2}{2K}$$

Производя сокращенія, умножая обѣ части на  $\varrho_0$  и определяя  $P$ , получимъ

$$P = v \varrho_0 \sqrt{\frac{1}{2 \varrho_0 R_0} \frac{1}{eE} + \frac{\varrho_0}{K}} \gamma \gamma_0 \lambda \dots \dots \dots (60)$$

гдѣ обозначено:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{2 \varrho_0 R_0}{eE} + \frac{\varrho_0}{K}}} \dots \dots \dots (61)$$

Ур-іе (60) говоритъ намъ, что *увеличеніе давленія на единицу площади не зависитъ отъ длины трубы, пропорционально уничтожаемой скорости, объему единицы объема, а также некоторой величины  $\lambda$ , зависящей [см. выр. (61)] отъ матеріала и размѣровъ трубы и отъ упругости жидкости.*

Опредѣляя изъ ур. (60)  $\lambda$ , получаемъ:

$$\lambda = \frac{P}{\gamma_0} \cdot \frac{v}{v}$$

Какъ извѣстно, размѣръ величины  $\frac{P}{\gamma_0}$  есть *mtr*,  $v$  измѣряется въ  $\frac{mtr}{sec^2}$ , а  $v$  — въ  $\frac{mtr}{sec}$ . Въ силу однородности механическихъ уравненій заключаемъ, что размѣръ величины  $\lambda$  есть:  $mtr \cdot \frac{mtr}{sec^2} \cdot \frac{sec}{mtr} = \frac{mtr}{sec}$ . Значить, *величина  $\lambda$  есть некоторая скорость.*

Обратимъ вниманіе на составъ выраженія  $\lambda$ . Если матеріалъ трубы не упругъ, т.-е., если никакое напряженіе не можетъ его деформировать, такъ что его  $E = \infty$ , или, еще проще, если трубы вовсе вѣтъ, т.-е. если  $R_0 = 0$ , то величина  $\lambda$  обращается въ

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{K}{\varrho_0}} = \sqrt{\frac{Kq}{\gamma_0}}$$

а это есть извѣстное выраженіе скорости распространенія звуковыхъ колебаній въ средѣ плотности  $\varrho_0$ , т.-е. въ нашемъ случаѣ, въ водѣ. Какъ извѣстно, эта скорость есть:

$$\lambda_1 = 1435 \text{ mtr/sec} = 673 \text{ саж, сек.}$$

Если, далѣе, обозначимъ:

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{e E_0}{2 \rho_0 R_0} \dots *),}$$

то ур-іе (61) приметъ видъ:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^2}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2}. \quad (62)$$

Количество  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ , какъ отношеніе двухъ одноименныхъ величинъ, есть число абсолютное; а въ такомъ случаѣ ур-іе (62) показываетъ, что  $\lambda$  есть скорость распространенія по трубѣ и жидкой колоннѣ циркулирующихъ колебательныхъ движеній, аналогичныхъ звуковымъ. Это обстоятельство заставляетъ принять, что при направившемся ударѣ въ трубѣ возникаютъ некоторыя циркулирующія колебательныя движенія, какъ материалы трубы, такъ и жидкости, ее заполняющей. Эти колебанія распространяются по всей длинѣ трубы со скоростью  $\lambda$ , а характеръ ихъ подлежитъ дальнѣйшему выясненію.

Однако сначала приведемъ два численныхъ примѣра, которые позволятъ судить о величинѣ ударнаго повышенія давления и о влияніи его на прочность трубы.

Возьмемъ трубу большого диаметра отъ турбиннаго водопровода Лајсе (см. таблицу въ концѣ § 23). Здѣсь  $2R_0 = 1,6 \text{ mtr}$ ; труба скленана изъ стальныхъ листовъ толщиною  $e = 0,012 \text{ mtr}$ . Гидростатическій напоръ достигаетъ почти  $80 \text{ mtr}$ , такъ что напряженіе материала достигаетъ

$$k = \frac{8.160}{2.1,2} = 533 \text{ kg cm}^2.$$

Далѣе, считая для стали  $E = 22000.10^6 \text{ kg mtr}^2$ , вычисляемъ

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{0,012.22000.10^6.9,81}{1000.1,6}} = 1270 \text{ mtr sec.}$$

Поэтому, считая  $\lambda_1 = 1435 \text{ mtr sec.}$  находимъ изъ (62):

$$\lambda = \frac{1435}{\sqrt{1 + \left(\frac{1435}{1270}\right)^2}} = 950 \text{ mtr/sec.}$$

\*), Résal указалъ, что  $\lambda_2$  есть скорость распространенія колебательныхъ движеній по упругой трубѣ, наполненной пескомъ и жидкостью; если въ (61) положить  $K = \infty$  какъ характеристика несжимаемости, то и получимъ  $\lambda_2$ .

Далѣ, если вся колонна воды, двигавшаяся до этого момента со скоростью  $v = 3 \text{ mtr/sec}$ , останавливается достаточно быстро, то по форм. (60) получаемъ соответствующее повышение давления

$$P = \frac{3 \cdot 1000 \cdot 950}{9,81} = 290000 \text{ kgr/mtr}^2 \approx 29 \text{ kgr/cm}^2.$$

Это вызываетъ дополнительное напряженіе матеріала въ  $533 \frac{29}{8}$

$1930 \text{ kgr/cm}^2$ , такъ что полное напряженіе листовъ въ цѣломъ мѣстѣ достигаетъ  $533 \cdot 1930 = 2463 \text{ kgr/cm}^2$ , что съ лишнимъ въ  $4\frac{1}{2}$  раза превосходить, такъ сказать, статическое напряженіе матеріала. По этому водопроводу вода подается къ 4 турбинамъ. Если бы была сразу заперта одна турбина, а не всѣ четыре, какъ это было предположено выше, то повышение давления было бы лишь  $\frac{29}{4} = 7,25 \text{ kgr/cm}^2$ , такъ какъ оно пропорционально погашенной скорости.

Въ качествѣ другого примѣра возьмемъ водопроводъ Voussu, тоже для турбинной установки (см. последнюю таблицу въ § 23). Здѣсь внутренний діаметръ стальной заварной трубы  $2R_0 = 0,325 \text{ mtr}$ ; толщина стѣнки въ наиболѣе низкихъ мѣстахъ водопровода  $e = 0,018 \text{ mtr}$ ; скорость воды въ трубѣ  $v = 2,36 \text{ mtr/sec}$ ; гидростатическое давление достигаетъ  $950 \text{ mtr}$  или  $95 \text{ kgr/cm}^2$ ). Поэтому напряженіе матеріала трубы вычисляется:

$$h = \frac{95 \cdot 32,5}{2 \cdot 1,8} = 855 \text{ kgr/cm}^2.$$

Далѣ вычислимъ

$$v_2 = \sqrt{\frac{0,018 \cdot 22000 \cdot 10^6 \cdot 9,81}{0,325 \cdot 1000}} = 3460 \text{ mtr/sec},$$

$$v = \frac{1435}{\sqrt{1 + \left(\frac{1435}{3460}\right)^2}} = 1325 \text{ mtr/sec}.$$

Сравнивая эти значенія съ предыдущимъ примѣромъ, усматриваемъ большое вліяніе размѣровъ трубы на обѣ скорости. Наконецъ, ударное повышение давления

$$P = \frac{2,36 \cdot 1000 \cdot 1325}{9,81} = 318000 \text{ kgr/mtr}^2 \approx 32 \text{ kgr/cm}^2.$$

\* До сихъ поръ это самый большой естественный напоръ, утилизируемый въ одной ступени. Онъ представляетъ среднее вертикальное разстояніе отъ уровня озера Lac de Tavaux до Роны, недалеко отъ впаденія ея въ Женевское озеро. Существуетъ проектъ утилизаціи напора въ  $1026 \text{ mtr}$ , тоже въ Швейцаріи, недалеко отъ Савросологна, на ручьѣ Саврагласко. См. J. Erreg „Die Wasserkraftverhältnisse im Puschlav“. Bern, 1907. Это изслѣдованіе было предпринято инженеромъ Элеремъ по порученію общины Puschlav и акціонернаго общества электрической станицы Brus o, въ видахъ усиленія послѣдней.

Достаточно большое абсолютно, это повышение давления все-таки не очень велико по сравнению съ исключительно большим гидростатическимъ давлениемъ этого водопровода; напряжение материала въ трубѣ при ударѣ будетъ

$$k_1' = 855 \left( 1 + \frac{32}{95} \right) = 1140 \text{ kgr/cm}^2.$$

Изъ этихъ примѣровъ видно, какъ значительны, а также какъ опасны могутъ быть гидравлическіе удары. Кроме того, въ нижеприводимыхъ числовыхъ данныхъ указывается, что для небольшихъ чугунныхъ трубъ двойное давление достигнетъ 4 атмосферъ на каждый футъ поперечной скорости, что правило приблизительно соблюдается и для стальной трубы второго примѣра, что обнаруживается простымъ подсчетомъ: скорость  $v = 2.36 \text{ mtr/sec} = 7.737 \text{ фут/сек}$ , такъ что повышение давления на 1 футъ скорости  $32 : 7.737 = 4.136 \text{ kgr/cm}^2$ . Наоборотъ, первый примѣръ даетъ для этой величины лишь 2,948  $\text{kgr/cm}^2$ , что обуславливается большимъ диаметромъ трубы.

Обращаясь къ дальнѣйшему разсмотрѣнію явленія удара, напомнимъ, что называется скоростью распространенія колебательнаго движенія.

Если мы имѣемъ рядъ точекъ  $a, p, m, \dots, b$  (фиг. 152), связанныхъ



Фиг. 152.

въ одну упругую нить, и дадимъ одной изъ нихъ, напр., точкѣ  $a$ , толчокъ перпендикулярно къ направлению нити, то эта точка начнетъ качаться около  $a$ , какъ около центра качанія, занимая послѣдовательно всѣ положенія отъ  $a$  до  $a'$ , потомъ назадъ черезъ  $a$  до  $a''$  и обратно до  $a$ , затѣмъ снова придя въ  $a'$  и т. д. Въ то же время всѣ точки прямой  $ab$  начинаютъ послѣдовательно воспроизводить движеніе точки  $a$ , такъ что въ какой-нибудь данный моментъ точки прямой  $amn$  занимаютъ въ пространствѣ положенія  $a' m' n'$ . Линія  $a' m' n'$  называется волною. Скоростью распространенія волны называется то разстояніе  $ab$ , на которое нужно отнести точку отъ источника колебанія, чтобы она начала колебаться по прошествіи двой секунды послѣ сообщенія толчка точкѣ  $a$ .—или, иначе, можно сказать, что скоростью волны называется то разстояніе отъ источника, называемо волна, на которомъ черезъ 1 секунду воспроизводится всѣ состоянія, которыя секундой раньше имѣли мѣсто въ началѣ нити. Въ нашемъ случаѣ  $\lambda$  удобнѣе всего толковать именно въ этомъ смыслѣ:  $\lambda$  есть скорость распространенія вдоль по трубѣ, —отъ задвижки къ началу трубы (мѣсту отвлеченія отъ магистрали.—всѣхъ тѣхъ состояній, которыя называются закрытіемъ задвижки, въ частности, давления, сжатія воды, напряженія стѣнокъ трубы и т. д.

Остановимся на вопросѣ, какимъ образомъ должно происходить измѣненіе давления при задвижкѣ, предположивъ, что магистраль настолько велика, что все измѣненія, происходящія въ трубѣ, на ней не отражаются, такъ что при концѣ *B* трубы давление все время равно давлению въ магистральной; другими словами, для нея  $P_B$  (какъ избытокъ давления, вызванный ударомъ) все время равно нулю.

Пусть отрѣзокъ *AB* (фиг. *A*, табл. VI) изображаетъ нашу трубу, *B*—магистраль, *A*—задвижку. Длину трубы мы обозначили черезъ *l*; отрѣзокъ же *AB* отложимъ равнымъ величинѣ  $\frac{l}{\lambda}$ , взявши соответствующій масштабъ; такимъ образомъ этотъ отрѣзокъ изображаетъ время пробѣга ударной волны всей трубы *l*. Приступимъ теперь къ построению диаграммы давлений, которымъ подвергается точка *A*, при чемъ за ось абсциссъ примемъ ось трубы *AB* и будемъ откладывать на ней времена (вѣтво отъ *A*), а на ординатахъ будемъ откладывать соответствующія повышенія давления. Диаграмму начнемъ строить, начиная съ точки *A*.

Задвижка закрывается не моментально, а въ течение нѣкотораго промежутка времени, который на нашемъ чертежѣ пусть изображается отрѣзкомъ *Ac*. Пока задвижка закрывается, давление въ этой точкѣ постепенно повышается, подымаясь по закону, изображаемому нѣкоторой кривой *AC*, при чемъ къ моменту закрытія оно достигаетъ величины ( $P'$ ), определяемой ур-немъ (60) и изображаемой на чертежѣ ординатой *cC*. Къ этому моменту вода остановилась, но не по всей трубѣ, а только при одной точкѣ *A*. Мы приняли, что въ трубѣ имѣютъ мѣсто упругія колебанія; слѣд., надо принять, что все послѣдовательныя состоянія точки *A* передаются дальше по трубѣ со скоростью  $\lambda$ . Значитъ, въ точкѣ *B* вода начнетъ останавливаться тогда, когда съ момента начала закрытія задвижки пройдетъ время  $\frac{l}{\lambda} = AB$ . Въ продолженіе всего этого времени нѣтъ причинъ, которыя могли бы измѣнять давление въ точкѣ *A*: поэтому въ теченіе времени *cd* — *AB* — *Ac* давление при *A* будетъ оставаться постояннымъ, и эта часть диаграммы изобразится прямой *CD*, параллельной *Ad*; точка *D* будетъ лежать при этомъ на ординатѣ точки *d*, гдѣ *Ad* = *AB*.

Прежде чѣмъ говорить, что дѣлается дальше въ точкѣ *A*, обратимся къ началу трубы у магистрали. Мы сказали, что черезъ время  $AB = \frac{l}{\lambda}$  все состоянія точки *A* повторяются въ *B*, что можно представить себѣ, вообразивъ, что диаграмма *ACD* подвигается слѣва направо со скоростью  $\lambda$ . Слѣдовательно, черезъ промежутокъ времени *AB* въ точкѣ *B* должно было бы начаться увеличеніе давления. Но мы сказали также, что въ *B* все время  $P_B = 0$ ,—иными словами, существуетъ причина, которая послѣдовательно погашаетъ въ точкѣ *B* все тѣ измѣненія состоянія воды и трубы, которыя привносятся туда диаграммой *ACD*.

Вообразимъ, что къ точкѣ *B* изъ пространства, справа налѣво, надвигается новая волна состояній, вызывающая въ *B* такія же состоянія, какія вызываються первой волной, но въ прямо противоположномъ смыслѣ. Эту





вторую (лѣвую волну давлений, въ отличіе отъ первой, правой) волну для диаграммы давлений построимъ такъ: фигуру  $BACD$  перегнемъ около вертикальной линіи  $MN$  на  $180^\circ$ , и затѣмъ еще разъ повернемъ ее около линіи  $ABf_1$  въ положеніе  $BA_1C_1D_1$ . Представимъ себѣ теперь, что какъ только мы начали закрывать задвижку, т.-е., какъ только диаграмма  $ACD$  побѣжала вправо со скоростью  $\lambda$ , сейчасъ же диаграмма  $A_1C_1D_1$  побѣжала съ тою же скоростью влѣво. Черезъ время  $A_1B_1 = \frac{l}{\lambda}$  точки  $A$  и  $A_1$  сойдутся въ  $B$ , затѣмъ, еще черезъ промежутокъ времени  $Ac$  сойдутся въ  $B$  точки  $C$  и  $C_1$ , т.-е. въ этотъ моментъ въ  $B$  сложатся равныя и противоположныя давленія  $(+c_0) + (-c_1C_1)$ , такъ что давленіе  $P_B$  останется и въ этотъ моментъ равнымъ нулю. Изъ самаго способа построенія кривой  $A_1C_1$  по кривой  $AC$  видно, что и во всякій другой промежуточный моментъ постоянно складываются два равныя и противоположныя давленія, напр.  $(+\frac{1}{2}nN) + (-\frac{1}{2}n_1N_1)$ , такъ что и для этого момента  $P_B$  остается равнымъ нулю. То же самое происходитъ за все время  $cd = c_1d_1$ .

Признавъ, такимъ образомъ, для объясненія постоянства давленія у  $B$ , что въ все время  $P_B = 0$ , наличность двухъ волнъ,—правой и лѣвой,—зарождающихся одновременно съ началомъ закрытія задвижки, одной въ  $A$  (задвижки), другой—въ пространствѣ въ  $A_1$ , такъ что  $AB = A_1B$ , мы должны, конечно, допустить, что обѣ волны распространяются затѣмъ по той трубѣ  $AB$ . Понятно, что точка  $A$  трубы находится подъ вліяніемъ одной лѣвой волны до тѣхъ поръ, пока въ нее не приблизится лѣвая волна; для того лѣвой волнѣ потребуется пройти путь  $A_1BA$ , на что потребуется время  $AA_1 = \frac{2l}{\lambda}$ . За все это время, пока лѣвая волна бѣжитъ отъ  $B$  до  $A$ , въ  $A$  не появляется никакихъ причинъ для измѣненія имѣющагося тамъ давленія  $P_A$ ; поэтому для слѣдующаго за  $Ad$  промежутка времени  $de = Ad$  давленіе у точки  $A$  будетъ оставаться равнымъ  $P_A$ ; соответственная часть диаграммы изобразится отрезкомъ  $DE$ , составляющимъ продолженіе  $CD$ , при томъ  $de = Ad = BA$ .

Такимъ образомъ, мы построили диаграмму правой волны  $ACDE$ , изображающую измѣненіе давленій въ точкѣ  $A$  за время  $\frac{2l}{\lambda}$ . Эта диаграмма сейчасъ же даетъ намъ возможность получить диаграмму лѣвой волны за тотъ же промежутокъ времени  $\frac{2l}{\lambda}$ , для чего ее нужно лишь перевернуть въ положеніе  $A_1C_1D_1E_1$ . Итакъ, за время  $\frac{2l}{\lambda}$  съ момента начала закрыванія задвижки диаграмма правой волны есть  $ACDE$ , а лѣвой...  $A_1C_1D_1E_1$ .

Далѣе, отмѣтивъ уже однажды аналогію разсматриваемаго явленія съ колебаніями упругой нити (по отношенію къ  $\lambda$ , да еще и потому, что при введѣ ур-ня (60) мы два раза пользовались выраженіемъ упругихъ деформаций по напряженіямъ), мы должны провести аналогію и дальше, сказавъ, что диаграмма волны должна быть построена подобно тому, какъ вообще представляются диаграммы упругихъ волнъ. Тамъ мы видѣли (см. фиг. 152),

что волна имѣть профиль  $am'n$  ., при чемъ каждая половина волны совершенно симметрична съ своею смежною половиною: профиль  $qn'r$  полученъ опрокидываніемъ профиля  $pm'q$  и сдвигомъ его на величину  $pq$  въ направленіи распространенія волны, такъ что квадрантъ  $pmm'$  тождественъ съ квадрантомъ  $qn'n$  и квадрантъ  $mm''q$  одинаковъ съ  $nn'r$ .

Такъ же должна быть построена и диаграмма нашей волны. Считая, что  $ACDd$  есть первый квадрантъ, а  $DdeE$  -второй, опрокидываемъ весь профиль  $ACDE$  около горизонтальной оси и сдвигаемъ его влѣво на  $Ae$ , такъ что онъ займетъ положеніе  $EfgA_2$ . Контуръ  $ACDEfgA_2$  и представляетъ собою, такимъ образомъ, полную правую волну, которая затѣмъ, конечно, повторяется въ  $A_2C_2$  и дальше неопредѣленное число разъ. Такимъ же образомъ дополняемъ лѣвую волну  $A_1C_1D_1E_1f_1g_1A_3$  и т. д.

Имѣя, такимъ образомъ, полную волну и зная, что онѣ одновременно начинаютъ бѣжать, — одна отъ  $A$  вправо другая отъ  $A_1$  влѣво, обѣ со скоростью  $\lambda$ , - и при встрѣчѣ складываются, мы можемъ построить полную диаграмму измѣненій давленій въ любой точкѣ трубы. Начнемъ съ задвижки  $A$ .

Мы уже получили диаграмму давленій въ этой точкѣ для всего того промежутка времени  $\frac{2l}{\lambda}$ , пока она находилась подъ исключительнымъ вліяніемъ правой волны. Переносимъ эту часть диаграммы, для удобства дальнѣйшихъ построеній, ниже, въ  $A, l$ , табл. VI. Получаемъ контуръ  $a_0C_0D_0E_0$ , тождественный съ  $ACDE$ .

Мы остановились на разсмотрѣніи явленія какъ разъ въ тотъ моментъ, когда правая волна подошла къ точкѣ  $A$  своей вершиной  $E$ , а лѣвая начальною точкой  $A_1$ . Съ этого момента въ  $A$  начинаютъ складываться обѣ волны, принося одновременно пониженія давленія. Пусть какой-нибудь точкѣ  $k$  промежутка  $ef$  соответствуетъ точка  $n_1$  промежутка  $A_1c_1$ , т. е.  $ek = A_1n_1$ . Правая волна приноситъ въ точку  $A$  въ моментъ  $k$  пониженіе давленія, выражающееся отрѣзкомъ  $rR$ ; лѣвая въ тотъ же моментъ принесетъ пониженіе  $n_1N_1$ ; въ суммѣ получится пониженіе давленія на  $-(rR - n_1N_1)$ , изображаемое на суммарной диаграммѣ отрѣзкомъ  $r_0R_0$ . По построенію кривыхъ  $A_1C_1$  и  $Ef$ , ясно, что отрѣзки  $rR$  и  $n_1N_1$ , удовлетворяющіе условію  $ke = rE - A_1n_1$ , между собою равны, такъ что  $rR - n_1N_1 = r_0R_0 = 2rR$ .

Когда, наконецъ, въ точку  $A$  приходятъ точки  $f$  и  $c_1$ , то съ первой приходитъ пониженіе  $(-fF)$ , а со второй — также пониженіе  $(-c_1C_1)$ , равное  $(-fF)$ ; въ суммѣ получимъ пониженіе  $F_1F_0$ , заканчивающее собою суммарную кривую  $E_0R_0F_0$ . Точкамъ  $E_0$  и  $F_0$  этой кривой соответствуетъ отрѣзокъ абсциссы  $e_0f_0 = ef = Ae$  времени закрытія задвижки, и за это время давленіе мѣняется отъ  $+P = e_0E_0$  до  $-P = f_0F_0$ .

Далѣе, правая волна будетъ приносить  $P_{пр} = 0$ , а лѣвая — состояніе  $P_{лѣв} = -P$ . Соответствующая часть суммарной диаграммы выразится отрѣзкомъ  $F_0G_0A_0'$ , параллельнымъ оси  $a_0a_0'$ ; точка  $A_0'$  его будетъ соответствовать тому моменту, когда въ  $A$  придетъ точка  $A_2$  правой волны и точка  $E_1$  лѣвой. Дальше обѣ волны приносятъ повышеніе давленія, которое произойдетъ отъ  $P = a_0'A_0'$  до  $+P = c_0'C_0'$ , опять-таки за время  $a_0'a_0' = a_0c_0 =$  времени

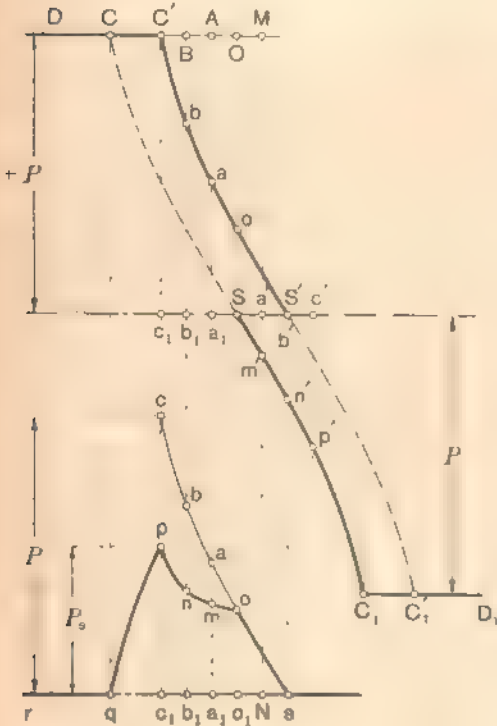
затвора. Словомъ, діаграмма давленийъ въ точкѣ *A* будетъ имѣть видъ  $a_0, C_0, E_0, F_0, A_0', C_0', \dots$ . При этомъ *длина діаграммы отъ начала подъема давленія до начала ея паденія* (и наоборотъ, — отъ начала паденія до начала подъема, такъ какъ  $a_0, e_0 = e_0, a_0'$ ) *равна двойному времени пробѣга ударной волны всей трубы*  $(a_0, e_0 = \frac{2l}{\lambda})$ .

Для какой-нибудь промежуточной точки трубы *m*, взятой на разстоянн *x* отъ задвижки, такъ что правая волна добѣгаетъ до нея черезъ промежутокъ времени  $Am = \frac{x}{\lambda}$ , діаграмма давленийъ построится такъ (см. *A, II*) — сначала приходитъ правая волна, измѣняя давленіе по *ACA*<sub>1</sub>; исключительное дѣйствіе этой волны продолжается до тѣхъ поръ, пока не приблизитъ въ ту же точку *m* лѣвая волна. Когда точка *A* правой волны пришла въ *m*, то въ то же время точка *A*<sub>1</sub> лѣвой волны приходитъ въ *m*<sub>1</sub>, такъ что  $A_1m_1 = Am = \frac{x}{\lambda}$ . Лѣвой волнѣ отъ *m*<sub>1</sub> до *m* остается пробѣгать путь, равный  $(2l - 2x)$ , на что уйдетъ время  $2 \frac{l-x}{\lambda}$ . Слѣдовательно, съ того момента, какъ правая волна принесла въ *m* поднятіе давленія, и до того момента, какъ лѣвая принесетъ туда же паденіе давленія, протечетъ  $2 \frac{l-x}{\lambda}$  времени. Итакъ, даваемыя  $Aa_1 = 2 \frac{l-x}{\lambda} = 2 Bm$ . Съ точки *A*<sub>1</sub> начинается пониженіе *A*<sub>1</sub>*C*<sub>1</sub> давленія, вызываемое лѣвою волною; давленіе *P* падаетъ до нуля и остается такимъ, пока правая волна своею точкою *E* не принесетъ новаго паденія давленія. Очевидно, время  $a_1E = 2 \frac{x}{\lambda}$ . Давленіе *P* остается отрицательнымъ, пока въ *m* не приблизитъ точка *E*<sub>1</sub> лѣвой волны, послѣ чего отрицательное давленіе начнетъ возрастать до нуля (вѣтвь *E*<sub>1</sub>*F*<sub>1</sub>), далѣе остается нулевымъ, пока точка *A*<sub>2</sub> правой волны не принесетъ новаго подъема давленія и т. д. Діаграмма давленийъ въ точкѣ *m* имѣетъ видъ *ACA*<sub>1</sub>*C*<sub>1</sub>*EFE*<sub>1</sub>*F*<sub>1</sub>*A*<sub>2</sub>... Вѣтви *AC* и *EF* тождественны съ одноименными вѣтвями правой волны, вѣтви же *A*<sub>1</sub>*C*<sub>1</sub> и *E*<sub>1</sub>*F*<sub>1</sub> тождественны съ такими же вѣтвями лѣвой волны, если ихъ переложить коло вертикальной линіи на 180°. Далѣе длины *Ac = a*<sub>1</sub>*C*<sub>1</sub> *Ef = e*<sub>1</sub>*F*<sub>1</sub> — времени затвора, длины же *Aa*<sub>1</sub> и *Ee*<sub>1</sub>, т. е. *длины діаграммы отъ начала уменьшенія давленія до начала уменьшенія ея*, равны двойному времени пробѣга ударной волной пути отъ данной точки до магистрала  $2 \frac{l-x}{\lambda}$ .

Наконецъ, для какой-нибудь точки *S*, взятой настолько близко отъ магистрала, что лѣвая волна приближается къ ней раньше, нежели правая волна принесетъ наибольшее давленіе, діаграмма давленийъ получаетъ видъ (*A, III*) зигзагообразной линіи *sopqs'o'p'q's'...*

Построеніе одной вѣтви такой линіи, *sopq*, сдѣлано на фиг. 153 въ болѣе крупномъ масштабѣ, при чемъ для симметрии чертежа предположено, что точка *S* трубы отстоитъ отъ ея начала такъ, что время пробѣга этого

расстояния  $OM$  ударною волною равно  $l - y$ , времени полного подъема давления  $OC$  (ось чертежа  $MN$  проведена через начало трубы). В верхней части чертежа расположены индикатором ветви  $SC$  подъема давлений правой волны и  $S'C'$  падения давлений левой волны. В тотъ моментъ когда правая волна уже дошла до рассматриваемой точки  $S$  трубы; такимъ образомъ, расстояние  $SS' = 2OM = 2 \frac{l - y}{\lambda}$ , гдѣ  $y$  есть расстояние точки  $S$  отъ задвижки. За время  $SS'$  давленія въ точкѣ  $S$  измѣняются по закону, изображаемому кривою  $SC$ . Къ концу этого промежутка времени волны расположатся такъ правая займетъ положеніе  $S'C'D$ , а лѣвая —  $SC_1D_1$ . Устроимъ внизу кривую  $soabc$ , равную кривою  $S'C'$  и расположенную подъ нею такъ, что точки  $s$  и  $S'$ , равно какъ  $c$  и  $C'$ , лежатъ соответственно на однѣхъ вертикаляхъ. Давленіе въ точкѣ  $S$  сначала возрастаетъ по кривою  $so$  (воспроизводящей кривою  $S'C'$ ) вплоть до точки  $o$ , которая опредѣляется моментомъ вступленія въ точку  $S$  лѣвой волны  $S'C_1$  и соответствующимъ ударнымъ давленіемъ  $So = o, o$ ; съ этого момента, въ виду того, что лѣвая волна приноситъ съ собою пониженіе давленія, теченіе кривою  $soab$  измѣняетъ свой характеръ и опредѣляется суммированіемъ эффектовъ обѣихъ волнъ. Обѣ кривыя  $SC$  въ этотъ моментъ занимаютъ положенія  $S'C'$  и  $SC_1D_1$ . Послѣ этого, черезъ промежутокъ времени  $Sa_1$ , принятый на чертежѣ для удобства равнымъ отрѣзку  $Sa'$ , правая волна принесетъ повышеніе давленія  $a_1a$  (см. верхнюю и нижнюю диаграммы), а лѣвая волна принесетъ пониженіе давленія  $a'm'$  (см. верхнюю диаграмму, гдѣ сдѣлано  $Sa' = Sa_1$ ). Поэтому откладываемъ на нижней диаграммѣ по той же ординатѣ  $a_1a$  отрѣзокъ  $am = a'm'$  и получаемъ для этого момента времени точку  $m$  диаграммы и соответствующее повышеніе давленія  $a_1m$ . Подобнымъ же образомъ строимъ слѣдующую точку  $n$  диаграммы: откладываемъ одинаковыя времена  $o_1b_1 = Sb_1 - Sb'$  (на чертежѣ принято  $a_1b_1 = Sa_1$ , почему точка  $b'$  совпадаетъ съ точкой  $S'$  верхней диаграммы); далѣе отрѣзокъ  $b'n'$  переносимъ на ординату  $b_1b$ , отъ точки  $b$  нижней диаграммы, такъ что  $bn = b'n'$ . И такъ далѣе, до наибольшаго повышенія давленія  $c_1p$ , наступающаго тогда, когда правая волна принесетъ въ данную точку свое полное ударное давленіе  $-P'$ , уменьшаемое соответствующимъ пониженіемъ давленія лѣвой волны  $c'p'$  (при чемъ, конечно,



Фиг. 153.

давленія  $a'm'$  (см. верхнюю диаграмму, гдѣ сдѣлано  $Sa' = Sa_1$ ). Поэтому откладываемъ на нижней диаграммѣ по той же ординатѣ  $a_1a$  отрѣзокъ  $am = a'm'$  и получаемъ для этого момента времени точку  $m$  диаграммы и соответствующее повышеніе давленія  $a_1m$ . Подобнымъ же образомъ строимъ слѣдующую точку  $n$  диаграммы: откладываемъ одинаковыя времена  $o_1b_1 = Sb_1 - Sb'$  (на чертежѣ принято  $a_1b_1 = Sa_1$ , почему точка  $b'$  совпадаетъ съ точкой  $S'$  верхней диаграммы); далѣе отрѣзокъ  $b'n'$  переносимъ на ординату  $b_1b$ , отъ точки  $b$  нижней диаграммы, такъ что  $bn = b'n'$ . И такъ далѣе, до наибольшаго повышенія давленія  $c_1p$ , наступающаго тогда, когда правая волна принесетъ въ данную точку свое полное ударное давленіе  $-P'$ , уменьшаемое соответствующимъ пониженіемъ давленія лѣвой волны  $c'p'$  (при чемъ, конечно,

$c_1, c_1 = Sc_1 = Sc'$  и также  $cp = c'p'$ ). Дальше правая волна будет все время приносить полное давление  $-P$ ; левая же волна будет вызывать все большее и большее падение, которое, как это легко сообразить, будет протекать по кривой  $pq$ , — обращенной кривой  $p'C_1$  левой волны. Далѣе на протяжении, считая отъ точки  $c_1$ , равномъ  $2 \frac{u}{\lambda}$ , кривая будетъ изображаться прямой нулевого давленія  $qr$ , послѣ чего начнется пониженіе давленія, совершенно одинаковое съ тѣмъ, какъ оно повышалось. Такъ опредѣлится часть волны  $sopqs'$ , дальнѣйшія части будутъ протекать симметрично съ этой. Очевидно, что наибольшее давленіе такой волны  $P$ , будетъ меньше ударнаго  $P$ , и тѣмъ меньше, чѣмъ ближе точка  $S$  находится къ магистральной. Въ самомъ началѣ трубы давленіе  $P$  все время остается равнымъ нулю, такъ что давленіе въ трубѣ равно здѣсь давленію въ магистральной.

Итакъ, наличность двухъ волнъ, правой и лѣвой, вполне объясняетъ тотъ фактъ, что большое избыточное давленіе у задвижки не вызываетъ, все-таки, никакого измѣненія давленія у магистральной. Съ другой стороны, она обуславливаетъ три характерныхъ вида діаграммъ давленій въ разныхъ точкахъ трубы. Поставивъ индикаторъ на трубѣ, въ которой путемъ быстрого запиранія задвижки произведенъ ударъ, и вращая барабанъ индикатора достаточно быстро, можно снять діаграммы давленій и сравнить ихъ съ получаемыми теоретически.

Но, прежде чѣмъ говорить объ экспериментальной провѣркѣ сдѣланныхъ выводовъ, отвѣтимъ на вопросъ: остается ли вода въ трубѣ послѣ удара неподвижной? Разсматривая какое-нибудь сѣченіе трубы, мы видимъ, что какъ въ немъ самомъ, такъ и по обѣ стороны отъ него давленія измѣняются: пока по обѣ стороны отъ разсматриваемаго сѣченія давленія одинаковы, вода въ немъ можетъ оставаться въ покоѣ; но какъ только съ одной стороны давленіе измѣняется, такъ сейчасъ же жидкость въ этомъ сѣченіи устремляется въ сторону меньшаго давленія съ нѣкоторой скоростью. Для опредѣленія ея формула Торичелли, очевидно, не примѣнима, такъ какъ здѣсь имѣетъ мѣсто движеніе не установившееся, а колебательное, и вопросъ можно рѣшить помощью того соображенія, что если погашеніе скорости вызываетъ увеличеніе давленія на  $P$  по ур-ю (60), то, наоборотъ, паденіе давленія на величину  $P$  вызываетъ появленіе скорости, опредѣляемой тѣмъ же ур-емъ (60).

Итакъ, въ смыслѣ движенія воды въ трубѣ, для какойнибудь точки  $m$  трубы картина явленія такова (діаграмма  $A, B$ , табл. VI). Пусть задвижка закрывается. Несмотря на это, въ точкѣ  $m$  сохраняется полная скорость  $c$  до тѣхъ поръ, пока къ точкѣ  $m$  не подойдетъ правая волна. Какъ только въ  $m$  давленіе начнетъ расти (по  $AC$ ), скорость постепенно уменьшается до нуля, и вода останавливается къ тому моменту, какъ въ  $m$  приходитъ точка  $C$  диаграммы, ибо съ этого момента давленія по обѣ стороны сѣченія  $m$  сравниваются. Вода остается въ покоѣ до тѣхъ поръ, пока лѣвая волна не принесетъ разрѣженія: какъ только начнется паденіе давленія по  $A_1C_1$ , въ  $m$  появится скорость, направленная въ противоположную сторону, т.-е. къ задвижки къ магистральной, при чемъ она все возрастаетъ до вели-

чины — —  $\frac{P}{v_0^2}$  Когда избыток давления въ  $m$  упадетъ до нуля (прямая  $C_1E$ ), давления съ обѣихъ сторонъ сравняются, и течение въ  $m$  по направлению къ магистрали будетъ происходить съ постоянной скоростью  $v^*$ ). Далѣе правою волною приносится новое разряженіе, при чемъ со стороны задвижки давление будетъ меньше на скорости воды въ  $m$  это отразится тѣмъ, что она будетъ постепенно падать до нуля вследствие, такъ сказать, торможенія, приносимаго разряженіемъ отъ задвижки. Вода въ  $m$  остановится тогда, когда въ нее придетъ точка  $F$  диаграммы. За все время  $fo_1$  вода въ  $m$  неподвижна, въ это же время разряженіе передается до магистрали, и какъ только оно дойдетъ до нея, сейчасъ же большее давление магистрали погонитъ воду къ задвижкѣ. Въ  $m$  эта скорость по направлению къ задвижкѣ будетъ возрастать, пока давление будетъ расти по  $E_1F_1$ ; достигнетъ своей наибольшей величины —  $\frac{P}{v_0^2}$ , будетъ ее сохранять при  $P = 0$  по  $F_1A_1$ , а потомъ снова будетъ угашаться, когда давление начнетъ расти по  $A_1C_1$ .

Легко убѣдиться, что при задвижкѣ съ тѣхъ поръ, какъ она окончательно закрыта, скорость все время равна нулю. Въ любомъ мѣстѣ трубы вода сначала останавливается, потомъ отбрасывается къ магистрали, остается въ покоѣ, отбрасывается къ задвижкѣ, остается въ покоѣ, опять бѣжитъ къ магистрали и т. д. Въ самомъ отвѣтвленіи отъ магистрали вода бѣжитъ то въ одну, то въ другую сторону.

Такимъ образомъ, все явленіе идетъ такъ постепенно останавливается вода во всей трубѣ, растягивая ее и сжимаясь сама. Постепенно эти состоянія охватываютъ всю трубу, передаваясь отъ слоя къ слою со скоростью  $\lambda$ . Но прошедши времени  $\frac{l}{\lambda}$  мы застаемъ растянутую трубу, наполненную сжатой и остановленной водою. При свободномъ сообщеніи съ магистралію, гдѣ господствуетъ первоначальное давление, вода въ трубѣ, понятно, не можетъ остаться въ равновѣсіи и начинаетъ вытекать изъ трубы въ магистраль; давление въ трубѣ сравнивается съ давлениемъ въ магистраліи, т.-е. становится первоначальнымъ, а стѣнка трубы восстанавливаетъ первоначальную форму. Постепенно, отъ слоя къ слою, эти состоянія передаются со скоростью  $\lambda$  назадъ къ задвижкѣ. Черезъ время  $\frac{l}{\lambda}$  слой, стоявшій у задвижки, начинаетъ испытывать стремленіе отойти отъ нея и образуетъ разряженіе, благодаря чему сейчасъ же останавливается, а стѣнка трубы деформируется, сжимаясь по сравнению съ первоначальнымъ состояніемъ. Эти состоянія опять черезъ время  $\frac{l}{\lambda}$  достигнутъ до магистрали, давление которой заставитъ воду хлынуть изъ магистрали въ трубу: при этомъ

\* Это течение поддерживается тѣмъ, что вся труба между точкой  $m$  и задвижкой постепенно съ паденіемъ давления сужается и восстанавливаетъ свою форму, а наполняющая ее вода расширяется, откуда и получается расходъ, поддерживающій въ точкѣ  $m$  эту скорость.

по трубѣ, по направленію къ задвижкѣ, будутъ распространяться состоянія, имѣвшія въ ней мѣсто до удара. Достигнувъ закрытой задвижки, они вызовутъ новый ударъ, и весь циклъ явленій начнетъ повторяться. Если на явленіе гидравлическаго удара посмотрѣть именно такимъ образомъ, то станетъ ясно, откуда берется эта, на первый взглядъ фантастическая, лѣвая волна: все дѣло заключается въ отмѣченной выше невозможности сохраненія въ равновѣсіи всѣхъ состояній воды и стѣнки трубы, когда вся остановленная и сжатая колонна воды находится въ непосредственномъ сообщеніи съ достаточно большой магистралью постояннаго давления. въ невозможности водѣ отойти отъ задвижки, не оставляя за собою пустоты и т. д. Сами же волны, и правая и лѣвая, только удобны для облегченія представленія о періодическихъ измѣненіяхъ давления въ трубѣ.

Экспериментальная провѣрка приведенной теоріи удара въ трубахъ состояла въ слѣдующемъ: 1) опредѣлялись наибольшіе избытки давления въ трубѣ и сравнивались съ числами, даваемыми ур-емъ (60); 2) непосредственно измѣрялась скорость  $\lambda$  распространенія ударной волны, выполнялось это путемъ измѣренія времени, протекающаго отъ начала подъема давления въ одной точкѣ трубы до начала подъема давления въ другой, отстоящей отъ первой на опредѣленномъ разстояніи  $L$ ; это время сравнивалось съ вычисленнымъ временемъ  $\frac{L}{\lambda}$ , гдѣ  $\lambda$  опредѣлялось по ур-ю (61); 3) наконецъ, въ-третьихъ, снимались ударныя діаграммы въ различныхъ точкахъ трубы.

Наблюденія производились надъ чугунными трубами, диаметромъ въ 2", 4", 6" и 24", при чемъ толщина стѣнокъ ихъ была принята соответственно въ  $\frac{10''}{32}$ ,  $\frac{11''}{32}$ ,  $\frac{13''}{32}$  и  $\frac{22''}{32}$  \*), такъ что отношеніе  $\sqrt{\frac{e}{2R_0}}$ , входящее въ выраженіе  $\lambda_2$ , было соответственно равно.

$$\frac{1}{8} \sqrt{10}; \quad \frac{1}{8} \sqrt{\frac{11}{2}}; \quad \frac{1}{8} \sqrt{\frac{13}{3}}; \quad \frac{1}{4} \sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Вычислимъ сначала  $\lambda_2$  для трубы въ 2", выражая ее въ *mtr sec*; очевидно, что отъ  $\lambda_2$  при  $2R_0 = 2''$  можно перейти къ  $\lambda_2$  во всякой другой трубѣ, умножая первую величину на отношеніе значенія  $\left[ \sqrt{\frac{e}{2R_0}} \right]$  къ  $\left[ \sqrt{\frac{e}{2R_0}} \right]$  при  $e = 2''$ .

\*) Эти размѣры были взяты изъ таблицъ размѣровъ трубъ, предписанныхъ Московскимъ Водопроводнымъ Съѣздомъ, а не обмѣромъ; естественно, что дѣйствительныя толщины отличались отъ этихъ величинъ, что, хотя и очень мало, все-таки могло вызвать нѣкоторое кажущееся несогласіе теоріи съ опытомъ.

Для чугуна  $E \sim 1000000 \text{ kg/cm}^2$  или  $10^{10} \text{ kg/m}^2$ ,  $q = 9,8 \text{ mtr/sec}^2$ ;  $\gamma = 1000 \text{ kg/mtr}^3$ ; следовательно

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{2R_0} \cdot \frac{Eq}{\gamma}} = \frac{1}{5} \sqrt{10 \cdot \frac{10^{10} \cdot 9,8}{10^3}} =$$

$$= \frac{10^4}{5} \sqrt{9,8} = 3913 \text{ mtr/sec} = 1834 \text{ саж/сек.}$$

Такова величина  $\lambda_2$  для трубы диаметромъ въ 2". Умножая эту величину соответственно на  $\sqrt{\frac{11}{20}}$ ,  $\sqrt{\frac{13}{30}}$ ,  $\sqrt{\frac{11}{120}}$ , получимъ скорости  $\lambda_2$  для трубы въ 4", 6" и 24".

Скорость  $\lambda_1$  принята нами (см. стр. 294) въ 673 саж/сек. Вычисляя теперь  $\lambda$  по ур-ю (62), находимъ:

$2R_0$ въ дюйм.	$c$ въ дюйм.	$\frac{c}{2R_0}$	$\lambda_2$ въ саж/сек.	$\lambda$ въ саж сек.	$P:q$ въ atm.
2"	$\frac{10}{32}$	$\frac{1}{8} \sqrt{10}$	1834	632	1,066
4"	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{8} \sqrt{11}$	1360	604	3,856
6"	$\frac{13}{32}$	$\frac{1}{8} \sqrt{13}$	1297	588	3,783
24"	$\frac{22}{32}$	$\frac{1}{8} \sqrt{11}$	555	428	2,754

Какъ видно, для первыхъ трехъ трубъ скорость  $\lambda$  измѣняется сравнительно мало.

Далѣе, если уравнение (60) отнести къ единицѣ скорости, т.-е. раздѣлить его на число, представляющее отношеніе величины скорости къ единицѣ мѣры, то результатъ, который можно выразить, съ одной стороны, просто членомъ  $\frac{P}{\gamma}$ , а съ другой  $\frac{\lambda^2 \gamma}{q}$ , будетъ представлять увеличеніе давленія на каждую единицу потерянной скорости: если  $c$ ,  $q$  и  $\lambda$  выразить въ футахъ, а  $\gamma$  въ фунтахъ для 1 куб. фута, то  $\frac{\lambda^2 \gamma}{q}$  будетъ выражено въ фунтахъ на квадратный футъ для каждого фута потерянной скорости. Такъ какъ рѣчь идетъ о водѣ и такъ какъ столбъ воды въ 34 фута уравновѣшиваетъ одну атмосферу, развивая давленіе 34  $\cdot$   $\gamma$  фунтовъ на 1 кв. футъ, то мы находимъ, что  $\frac{\lambda^2 \gamma}{34 \cdot \gamma}$  представляетъ увеличеніе давленія, выраженное въ атмосферахъ, на каждый футъ потерянной скорости. Такъ какъ



...  $\lambda$  дм сек<sup>2</sup>, а скорость волны въ футахъ равна  $7\lambda$ , гдѣ  $\lambda$  взято изъ выше-

... и выражено въ сажняхъ, то величина  $\frac{7\lambda}{34.32} = \frac{7\lambda}{1088}$

... увеличеніе давленія въ атмосферахъ на каждый футъ потерянной

... Эти величины подсчитаны въ последнемъ столбцѣ таблицы. Для

... первыхъ трубъ можно, слѣдовательно, считать, что на каждый футъ

... давленіе поднимается, въ среднемъ, на 1 атмосферы

1) Первая серія опытовъ не дала полного согласія между вычислен-

... величинами  $P$  и наблюдаемыми,—главнымъ образомъ, по причинѣ

... употреблявшихся при этомъ манометровъ Бурдона съ максим-

... стрѣлкой: инерція частей прибора откидывала стрѣлку дальше,

... такъ что показанія манометровъ всё больше вычисленнаго  $P$ ,

... эти наблюденія достаточно подтверждаютъ то, что величина  $P$  имѣеть

... ту же величину по всей трубѣ (кромѣ частей, ближайшихъ къ ма-

... тали).

2) Непосредственныя измѣренія  $\lambda$  дали хорошіе результаты для трубы

... на которой, въ среднемъ, оказалось, что длану въ 100 саж. волна

... бѣгаетъ въ 0,165 секунды, чему соответствуетъ скорость  $\lambda = \frac{100}{0,165} =$

... саж/сек, что очень близко къ табличной величинѣ. Малые промежутки

... измѣрялись здѣсь помощью хронографа съ камертономъ, отбивав-

... сотыя доли секунды.

3) Наконецъ, въ разныхъ мѣстахъ трубы снимались индикаторныя

... граммы. Чтобы ихъ координировать, на каждой изъ нихъ наносились

... атмосфернаго давленія (для чего индикаторъ соединялся съ атмосфе-

... и прямая гидростатическаго давленія (индикаторъ соединялся съ тру-

... изъ которой еще не начиналось истечение). Зная масштаб пружинъ

... индикатора и имѣя эти линіи (хотя достаточно было бы в одной изъ нихъ),

... можно по діаграммамъ измѣрять давленія. Чтобы координировать абсциссы

... граммы, на ней особымъ карандашомъ наносились отмѣтки полусекундъ,

... торы отбивалъ полусекундный маятникъ, всякій разъ замыкающій токъ

... прижимающій на одинъ моментъ карандашъ къ діаграммѣ. Скорость  $v$ ,

... мѣщая мѣсто въ трубѣ до удара, опредѣлялась взвѣшиваніемъ вытекшей

... известной промежутку времени воды.

Ограничимся только слѣдующимъ примѣромъ діаграммъ (копія съ фото-

... снятыхъ съ дѣйствительныхъ диаграммъ).

На фиг. В, С и D, табл. VI представлены диаграммы, снятыя съ трубы

... (ея дланна была 356,3 саж.) при скорости истечения въ 1,8'; діаграмма

... снята у самой задвижки; діаграмма фиг. С снята на разстояніи отъ

... равномъ  $\frac{1}{2}$  всей дланн, а фиг. D получена съ точки трубы, взя-

... на разстояніи отъ задвижки, равномъ  $\frac{2}{3}$  всей дланн трубы. Во всѣхъ

... фигурахъ линія  $ab$  есть линія атмосфернаго давленія, линія  $cd$  есть

... гидростатическаго давленія. Точки подъ линіями  $ab$  суть отмѣтки

... полусекундъ. Изображены только первыя половины диаграммъ. На фиг. Е и F

... диаграммы для трубы въ 6" въ диаметръ, снятыя первая у задвижки,

... вторая—между задвижкой и магистралю.

Прежде всего бросается въ глаза сходство этихъ діаграммъ по внѣшнему виду съ фиг. А. Далѣе, горизонтальныя длины отъ начала подъема давленія до начала его паденія на первыхъ трехъ діаграммахъ относятся какъ 3:2:1, какъ и слѣдовало ожидать на основаніи изложенной выше теоріи. Повышеніе давленія или, какъ говорить проф. Жуковскій, «ударное давленіе» по діаграммамъ вездѣ достигало  $7 atm.$ , что хорошо согласуется съ вышеприведеннымъ подсчетомъ, который для этого случая даетъ  $4,066.1.8 = 7,32 atm.$  То обстоятельство, что на фиг. С и D горизонтальныя части нулевого  $P$  лежатъ выше прямой гидростатическаго давленія, слѣдуетъ объяснить тѣмъ, что ударъ отражался и на магистрали, повышая въ ней давленіе. Наконецъ, горизонтальная длина отъ  $m$  до  $n$  на фиг. В представляетъ время пробѣга ударною волною всей трубы туда и назадъ, т.-е. ея двойной длины. Тщательный обмѣръ діаграммъ далъ для трубы въ 6" скорость  $\lambda = 586 \text{ саж/сек}$  (вмѣсто теоретическихъ 588), для трубы въ 4"....  $\lambda = 600 \text{ саж/сек}$  (вмѣсто 604) и для трубы въ 2"  $\lambda$  получилось  $625 \text{ саж/сек}$  (вмѣсто 632). Въ виду трудности обмѣра эти результаты нужно считать безусловно подтверждающими теорію.

Здѣсь мы намѣтили только сущность теоріи гидравлическаго удара, опускаая ея развитіе и примѣненіе къ ряду практическихъ вопросовъ. Въ выше упомянутомъ источникѣ можно найти выясненіе вліянія на все явленіе мѣстныхъ уширеній въ трубѣ (водяныхъ колпаковъ), воздушныхъ колпаковъ, отверстій на трубѣ, черезъ которыя утекаетъ вода, отвѣтвленій отъ трубы, изъ которыхъ вода не выливается (тупики) и т. п. Замѣчательно то обстоятельство, что все теоретическія соображенія подтвердились наблюденіями и, наоборотъ, все частичныя особенности наблюденій получили теоретическое объясненіе. Отсылая интересующихся къ упомянутому источнику, укажемъ слѣдующіе, практически интересные результаты.

1. Если считать, что по мѣрѣ закрыванія затвора на трубѣ количество изливающейся жидкости уменьшается пропорціонально времени, то можно подсчитать то минимальное время  $t \text{ sec}$ , которое необходимо для полного закрыванія трубы при условіи, чтобы фактическое ударное давленіе было въ  $m$  разъ меньше того, которое соответствуетъ погашаемой скорости и вычисляется по ур-ю (60). Даваемую проф. Жуковскимъ формулу можно представить такъ:

$$t = m \frac{2l}{\lambda}.$$

Здѣсь  $t$ —искомое время;  $m$ —вышеуказанное отношеніе, выбираемое сообразно обстоятельствамъ;  $\frac{2l}{\lambda}$ — время пробѣга ударною волною двойной трубы.

2. Объемъ воздуха  $U_0$ , воздушнаго колпака при давленіи  $p_0$ , достаточный для того, чтобы ударное повышеніе давленія  $P$  было очень мало, можно вычислять по формуламъ:

$$U_0 = k \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{2l}{\lambda} \frac{p_1^2}{p_0 P}.$$

Значеніе буквъ  $U_0$ ,  $p_0$  и  $P$  только что указано. Остальныя буквы имѣютъ слѣдующія значенія:

$k$  — 1,41 есть отношеніе теплоемкости воздуха при постоянномъ давленіи къ его теплоемкости при постоянномъ объемѣ;

$d$  — діаметръ трубы, въ которой погашается скорость  $c$ ;

$\lambda$  — скорость ударной волны въ трубѣ, на которой ставится колпакъ;

$l$  — наименьшее изъ разстояній отъ колпака до задвижки или до магистрала или, вообще, до точки постояннаго давленія;

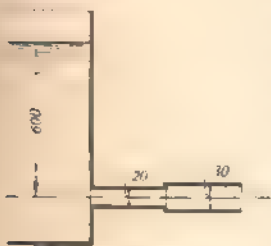
$p_1$  — то давленіе, которое имѣетъ мѣсто въ колпакѣ при теченіи воды во трубѣ со скоростью  $v$ .

Для пользованія формулой нужно давать для  $P$  достаточно малыя значенія, напр., 1 — 1,5  $kg/cm^2$ . Важно, чтобы количество воздуха въ колпакѣ пополнялось, въ случаѣ его убыли.

3. Видъ ударной диаграммы, снятой съ трубы, позволяетъ судить о мѣстѣ скопленія воздуха на трубѣ и также о мѣстѣ утечки воды изъ трубы. Если бы не необходимость для съемки такой диаграммы воспроизведенія всего явленія удара въ трубѣ, то этимъ обстоятельствомъ можно бы воспользоваться для построенія прибора, который давалъ бы возможность тыскивать мѣсто утечки; сопряженная съ откапываніемъ трубы, эта операція иногда бываетъ мѣшкотна и дорога.

### Задачи къ главамъ II и III \*).

24. Къ сосуду (фиг. 154) приставлена трубка двухъ діаметровъ, безъ всякаго скругленія кромокъ; трубка горизонтальна и настолько длинна, что наружную трубку можно считать заполненной сплошь; но тренія о стѣнки вводить не слѣдуетъ, такъ какъ длина трубки не настолько значительна. Определить расходъ при размѣрахъ, указанныхъ на фигурѣ, построить пьезометрическую линію и найти предѣльное значеніе напора, при которомъ широкій подтрубокъ перестаетъ быть заполненнымъ.



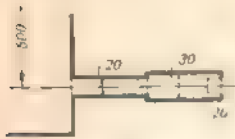
Фиг. 154.

*Отв.* Считая, что сжатія при выходѣ изъ насадки нѣтъ, и оцѣнивая коэф-тъ сопротивленія при входѣ въ первый подтрубокъ черезъ 0,5, определимъ  $Q = 1,075 \text{ liter sec}$ . Скорости въ концѣ послѣдняго подтрубка, въ концѣ первого подтрубка и въ сжатомъ сѣченіи первого подтрубка, при коэф-тѣ внутреннего сжатія — 0,64 определяются соответственно 1,52  $mtr$ , 3,42  $mtr$  и 5,35  $mtr$  въ секунду. Давленіе въ сжатомъ сѣченіи узкаго на-

\*) Въ концѣ этого списка задачъ прибавлено нѣсколько дополнительныхъ задачъ на вопросы гидростатики. Большинство рѣшеній приведено послѣ вычисленій по счетной линейкѣ, т.-е. съ доступной для нея точностью лишь въ третьемъ знакѣ. Во избѣжаніе недогазубній относительно употребленныхъ значеній коэффиціентовъ сопротивленія, въ большинствѣ рѣшеній указаны или приняты значенія коэффиціентовъ или названія соответствующихъ эмпирическихъ данныхъ.

садка на 0,95 *mtr* ниже высоты атмосферного давления, а передь входомъ въ широкий насадокъ—на 0,295 *mtr*, если коэф-тъ сопротивленія до сжатого сѣченія считать равнымъ 0,06. Это давление обратится въ нуль при напорѣ въ 6,6 *mtr*.

25. Найти расходъ и построить пьезометрическую линію для подтрубка, изображеннаго на фиг. 155, пренебрегая трениемъ и считая напоръ надъ горизонтальною осью его равнымъ 600 *mm*.

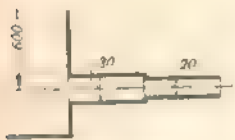


Фиг. 155.

*Отв.* Считая коэф-тъ несовершеннаго сжатія, въ соответствии съ таблицами Вейсбаха—1,112  $\alpha$ , гдѣ  $\alpha$  есть коэф-тъ совершеннаго сжатія въ тонкой стѣнкѣ, равный 0,64, а также считая коэф-тъ сопротивленія при проходѣ черезъ первый насадокъ = 0,5, а тотъ же коэф-тъ при выходѣ изъ отверстия = 0,06, найдемъ скорость въ отверстіи (въ сжатомъ сѣченіи) = 2,93 *mtr*, во второмъ подтрубкѣ—0,891 *mtr*, въ первомъ подтрубкѣ—2,01 *mtr* и въ сжатомъ сѣченіи этого подтрубка 3,15 *mtr* въ секунду.

Сообразно съ этимъ расходъ равенъ 0,63 *ltr sec*. Давленіе въ сжатомъ сѣченіи насадка больше высоты атмосфернаго давленія на 0,07 *mtr*; давленіе передь отверстиемъ больше атмосфернаго на 0,393 *mtr*.

26. Рѣшить вопросы предыдущей задачи для насадка по фиг. 156, если напоръ надъ горизонтальною осью насадка по прежнему = 600 *mm*.



Фиг. 156.

*Отв.* Коэф-ты сопротивленій и сжатія считаемъ, какъ въ предыдущей задачѣ; сжатіе при входѣ въ широкий насадокъ считаемъ одинаковымъ со сжатіемъ при отверстіяхъ въ тонкой стѣнкѣ. Тогда скорость въ концѣ насадка—2,93 *mtr/sec*; расходъ  $Q = 0,92$  *ltr sec*. Давленіе передь входомъ въ малый подтрубокъ на 0,477 *mtr* больше атмосфернаго, давленіе въ сжатомъ сѣченіи малого подтрубка на 0,356 *mtr* выше высоты атмосфернаго давленія.

27. Къ сосуду приставлена трубка, составленная изъ колѣнъ (фиг. 157). При напорѣ въ 600 *mm* надъ центромъ тяжести отверстія въ стѣнкѣ найти расходъ черезъ сѣченіе *A*, пренебрегая трениемъ. Тотъ же вопросъ рѣшить, предполагая что колѣно *A* занимаетъ положеніе *A'*, указанное пунктиромъ, повернувшись около горизонтальной оси *CD* на 180°.



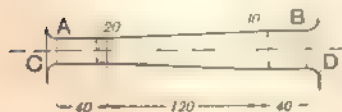
Фиг. 157.

*Отв.* Считаемъ коэф-ты сопротивленія: при входѣ = 0,5, на колѣно въ 90° = 1. Пренебрегая прочими сопротивленіями, определяемъ расходъ въ первомъ случаѣ = 0,551 *ltr sec*, во второмъ случаѣ = 0,603 *ltr sec*.

28. Какъ измѣнится расходъ въ обоихъ случаяхъ задачи № 27, если вмѣсто колѣнъ поставить закругленія, при чемъ радиусъ закругленія оси сдѣлать = 25 *mm*? Если сдѣлать его 50 *mm*? Въ обоихъ случаяхъ расстояние между осью части *A* и осью *CD* неизмѣнно = 50 *mm*. Трение попрежнему въ расчетъ не вводить.

*Отв.* При радиусѣ закругленія оси въ 25 *mm* коэф-тъ сопротивленія въ колѣнѣ = 0,206, почему расходы будутъ 0,745 и 0,81 *ltr sec*. При радиусѣ закругленія оси въ 50 *mm* коэф-тъ сопротивленія колѣна будетъ 0,092, почему расходы будутъ 0,795 и 0,865 *ltr sec*.

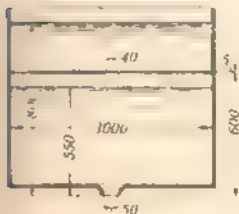
29. Имѣется подтрубокъ (фиг. 158), состоящій изъ двухъ цилиндрическихъ частей и одной конической. Его можно приставить къ сосуду или концомъ *A* при помощи фланца *C*, очерченнаго по формѣ сжатой струи, или концомъ *B* при помощи такого же фланца *D*. Въ первомъ случаѣ имѣются, сдѣл., части *C—AB* (*D* выкинута), а во второмъ *D—BA* (*C* выкинута). Сравнить расходы въ обоихъ слу-



Фиг. 158.

...аяхъ, считая, что напоръ въ сосудѣ = 800 *mm*, и пренебрегая пѣими потерями напора. Выяснить соответственно давления въ частяхъ *A* и *B*.

*Отв.* При излияніи черезъ *B* расходъ = 2,8 *ltr sec*, давление въ *A* меньше высоты атмосфернаго давления на  $\frac{85}{16}$  напора, т.-е на 3,25 *mtr*. При излияніи черезъ *A* расходъ = 1,245 *ltr sec*; давление въ *B* превосходитъ высоту атмосфернаго давления на  $\frac{65}{81}$  напора, т.-е. на 0,642 *mtr*.



Фиг. 159.

30. Имѣется сосудъ съ перегородкой, въ которой сдѣлано круглое отверстіе въ тонкой стѣнкѣ (фиг. 159); размеры указаны на рисункѣ въ *mm*. Сравнить расходы въ томъ случаѣ, когда напоръ = 800 *mm* и когда онъ = 550 *mm*. Въ обоихъ случаяхъ считать напоръ постояннымъ.

*Отв.* Считая въ нижнемъ отверстіи коэф. скорости = 0,98, а въ верхнемъ отверстіи считая коэф-тъ расхода = 0,955 0,62 0,605 и коэф-ты сжатія въ немъ же = 0,986 0,64 = 0,61, найдемъ въ первомъ случаѣ  $Q = 2,8 \text{ ltr sec}$ , а во второмъ случаѣ  $Q = 6,4 \text{ ltr sec}$ .

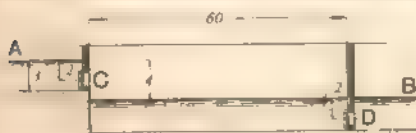
31. Въ днѣ горизонтальнаго цилиндрическаго сосуда, диаметромъ 300 *mm* сдѣлано отверстіе, очерченное по формѣ сжатой струи. Диаметръ отверстія = 20 *mm*, и оно расположено по оси цилиндра. Въ цилиндрѣ помѣщенъ поршень (безъ тренія), нагруженный горизонтальной силой въ 150 *kgf*. Предполагая, что при движеніи поршня эта сила сохраняетъ свою постоянную величину, и что давление во всѣхъ точкахъ дна цилиндра одно и то же, опредѣлить: съ какою скоростью долженъ двигаться этотъ поршень, для того, чтобы движеніе воды было установившимся? Считая, что ось цилиндра лежитъ на разстояніи 1 *mtr* отъ пола, найти, гдѣ струя упадетъ на полъ, если пренебречь сопротивленіемъ воздуха.

*Отв.* Движеніе поршня должно происходить со скоростью 28,2 *mm sec*, если коэф-тъ скорости въ отверстіи = 0,98. Струя упадетъ на полъ въ разстояніи 2,86 *mtr* отъ проекціи отверстія на плоскость пола.

32. Если въ ур-ніи (3) § 11 (стр. 100) положить  $A = A_0$ , то ур-іе даетъ:  $v = \infty = v_0$ . Что это значитъ?

*Отв.* Это значитъ, что совершенная жидкость, вступившая въ трубу съ какой-нибудь начальной скоростью и опускающаяся съ уровня  $H + \frac{p_0}{\rho g}$  на уровень  $\frac{p}{\rho g}$ , не можетъ двигаться равномерно и заполнять трубу иначе, какъ при бесконечно большой начальной скорости. Если же начальная скорость имѣетъ конечное значеніе, то паденіе совершенной жидкости съ высшаго уровня на низшій будетъ сопровождаться ускореніемъ ея движенія, какъ и всякаго свободнаго тѣла, и она не будетъ въ состояніи заполнять трубу.

33. Шлюзовая камера (фиг. 160) имѣетъ форму прямоугольнаго ящика шириною въ 2 *mtr* и длиною 60 *mtr*, и поставлена для перехода съ горизонта *A* на горизонтъ *B*, лежащій на 4 *mtr* ниже перваго. Въ стѣнкахъ имѣются отверстія, центры тяжести которыхъ лежатъ на 2 *mtr* ниже горизонтовъ *A* и *B*. Каково должно быть отверстіе *C*, чтобы шлюзъ наполнился въ 10 *min*, если считать, что отверстіе открывается моментально и что, пока горизонтъ въ камерѣ поднимается до уровня центра тяжести



Фиг. 160.

отъ отверстія, истеченіе происходитъ въ атмосферу, при дальнѣйшемъ же подъемѣ истеченіе происходитъ подъ уровень. Если дальѣ, закрывъ *C*, открыть отверстіе *D* (одинаковое съ *C*), то во сколько времени камера опорожнится?

*Отв.* Если въ *C* выполнить отверстие изъ двухъ квадратныхъ оконъ и считать коэф-тъ расхода — 0,6, то достаточно стороны квадрата въ 0,632 *mtr.* Опорожнение камеры при двухъ такихъ отверстияхъ въ *D* произойдетъ за 566 *sec* — 9,43 *min.*

34. Въ днѣ цилиндрическаго вертикальнаго воздушнаго колпака съ плоскими днищами, диаметромъ 0,5 *mtr.* сдѣлано отверстие для спуска воды диаметромъ 50 *mm.* Вода въ колпакъ стоитъ такъ, что ея уровень дѣлитъ его образующую въ отношеши 1 : 3. Къ отверстию приставлена труба диаметромъ 50 *mm.* длиною 3 *mtr.* оканчивающаяся крапомъ и, даѣе, отросткомъ той же толщины въ 0,5 *mtr.* длиною. Труба расположена такъ, что центр тяжести ея выпускнаго отверстия лежитъ въ плоскости нижняго дна. Давление воздуха 150 фунтовъ по манометру. Во сколько времени уровень воды опустится до середины образующей, если допустить, что температура и количество воздуха въ колпакѣ не мѣняется? Высота колпака — 2 *mtr.*; край повернуть на 20°. Во сколько времени произойдетъ такое же пониженіе горизонта въ колпакѣ при свободномъ сообщеши воздушнаго пространства съ атмосферомъ?

*Отв.* Называя черезъ *p* давление въ колпакѣ при какомъ-нибудь положеніи *h* надъ отверстиемъ въ днѣ, считая коэф-тъ сопротивленія при входѣ — 0,48, коэф-тъ сопротивленія тренія  $\zeta_r = 0,007$  (по Фаннингу) и беря коэф-тъ сопротивленія крапа по таблицамъ, найдемъ, что при установившемся движеніи скорость въ концѣ трубы можно найти по ур-ю:  $5v^2 = 2g \cdot h \cdot \frac{p}{\rho}$ . Возможныя коэф-та въ расчетъ не приняты. Выражая для всякаго *h* давление *p* вѣсомъ столба жидкости, наполняющей колпакъ, находимъ: давление 150 *lbs* по манометру равно 105500 *kgm/mtr<sup>2</sup>*; поэтому  $p = \frac{105500 \cdot 0,5}{h} \text{ kgm/mtr}^2$ . Слѣд., скорость опредѣлится изъ ур-я:

$$5v^2 = 2g \left( h + \frac{105,5 \cdot 0,5}{2-h} \right).$$

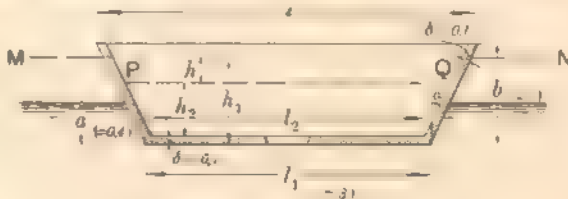
Поэтому время пониженія горизонта съ высоты *h* — 1,5 *mtr.* до высоты *h* — 1 *mtr.* опредѣлится:

$$t_{\text{сек}} = \frac{0,52}{0,05^2} \sqrt{\frac{5}{2g}} \int_1^{1,5} \frac{dh}{\sqrt{h + \frac{52,75}{2-h}}}.$$

Рѣшая интегралъ по Симпсону, найдемъ, при дѣленіи разности предѣловъ на 10 равныхъ частей, *t* — 7,6 секунды. Для послѣдняго вопроса задачи находимъ

$$t = \frac{0,8^2}{0,05^2} \sqrt{\frac{5}{2g}} \cdot 2 (\sqrt{1,5} - \sqrt{1}) = 58 \text{ секундъ}.$$

35. Понтонъ, длиною  $L_1 = 12 \text{ mtr.}$  имѣетъ постоянное поперечное сѣченіе, какъ на фигурѣ 161; его внутренняя длина  $L_2 = 11,8 \text{ mtr.}$  Онъ плаваетъ такъ, что его дно погружено подъ воду на 0,4 *mtr.* Въ днѣ его сдѣлано отверстие. Предполагая, что оно



Фиг. 161.

можетъ быть открыто моментально, найти, какова должна быть его площадь, чтобы понтонъ могъ быть затопленъ въ 10 минутъ? Коэф-тъ расхода считать — 0,6; толщина всѣхъ стѣнокъ понтона  $\delta = 0,1 \text{ mtr.}$

*Опис.* Въ некоторый моментъ, когда понтонъ ушелъ на глубину  $h_1$  до плоскости  $MM'$ , а внутри его затекла вода на глубину  $h_2$  до плоскости  $PQ$ , по закону Архимеда имѣемъ:

$$\frac{L_1}{L_2} [l_1(h_1 - a) + tg\alpha(h_1^2 - a^2) - l_2h_2 + tg\alpha h_2^2].$$

Въ это время за периодъ  $dt$  перетекаетъ количество воды:

$$L_1(l_1 + 2h_1 tg\alpha) dh_1 = \mu F \sqrt{2gh} dt.$$

Напоръ  $h$  въ это время есть:  $h = h_1 - \delta - h_2$ . Выражая  $h$  и  $h_2$  по напору  $h_1$ , получимъ для опредѣленія площади отверстия  $F$  ур-е:

$$\frac{\mu F \sqrt{2g}}{L_1} = \int_a^b \frac{(l_1 + 2tg\alpha h_1) dh_1}{\sqrt{h_1 + \frac{l_2}{2tg\alpha} - \delta} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2} \cdot \sqrt{\frac{l_2^2 \cdot L_2}{4tg^2\alpha \cdot L_1} \left( h_1 + \frac{atg\alpha}{tg\alpha} a + \frac{l_1}{tg\alpha} h_1 + h_1^2 \right)}}.$$

Здѣсь  $T$  есть заданное время въ секундахъ; уголъ  $\alpha$  есть уголъ между вертикалью и стѣнкой понтона;  $\delta = 0,1$  толщина его стѣнки. Значенія буквъ  $a$  и  $b$  видно изъ чертежа; ширина по дву внутри понтона  $l_2 = l_1 - 2\delta tg \frac{90^\circ}{2} - \alpha$ . Внося числовыя значенія  $a$  и  $b$  и раскрывая интегралъ по правилу Симпсона, для чего дѣлимъ разность  $(b-a)$  на равныхъ частей, находимъ необходимую площадь отверстия  $F = 0,0342 \text{ m}^2$ .

Если бы, по условіямъ задачи, можно было считать толщину стѣнки  $\delta = 0$ , то пришлось бы положить также:  $l_2 = l_1$  и  $L_2 = L_1$ , такъ что вышенаписанное ур-е приняло бы видъ:

$$\frac{T \mu F \sqrt{2g}}{L_1} = \int_a^b \frac{2tg\alpha \left( h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha} \right) dh_1}{\sqrt{h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha}} \cdot \sqrt{\left( h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha} \right)^2 - l_1 + \frac{atg\alpha}{tg\alpha} a}}.$$

Для краткости письма положимъ

$$\frac{l_1 + atg\alpha}{tg\alpha} a = c$$

получаемъ затѣмъ:

$$h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha} = \sqrt{h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha}} \cdot \sqrt{c - y^2}, \dots \dots \dots (a)$$

а такъ, съ другой стороны,

$$h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha} + \sqrt{h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha}} \cdot \sqrt{c - y^2} = \frac{c}{y^2} \dots \dots \dots (b)$$

и справедливости чего убѣждаемся, перемножая оба ур-ія (a) и (b). Складывая ихъ, получимъ:

$$h_1 + \frac{l_1}{2tg\alpha} = \frac{1}{2} \left( y^2 + \frac{c}{y^2} - \frac{y^2}{2} \left( 1 + \frac{c}{y^4} \right) \right).$$

и такъ

$$dh_1 = y dy - \frac{c y dy}{y^4} = y dy \left( 1 - \frac{c}{y^4} \right).$$

Предыдущий интеграл приводится поэтому к интегралу:

$$= \int_a^b \frac{2tg\alpha y^2 \left(1 - \frac{c^2}{y^6}\right) y dy}{2y} = \int_a^b tg\alpha \left[ y^2 dy - \frac{c^2}{y^6} dy \right] =$$

$$= tg\alpha \left[ \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{c^2}{5} \left( \frac{1}{b^5} - \frac{1}{a^5} \right) \right].$$

Вставляя пределы и числовые величины, находим  $F = 0,0301 \text{ mtr}^2$ .

36. Понтонъ имѣетъ форму прямоугольнаго параллелепипеда, при чемъ основание его снаружи имѣетъ размѣры  $3,5 \text{ mtr} \times 12 \text{ mtr}$ , внутри  $3,3 \text{ mtr} \times 11,8 \text{ mtr}$ , при толщинѣ боковыхъ стѣнокъ  $\delta = 0,1 \text{ mtr}$ . Высота его снаружи  $b = 1 \text{ mtr}$ , внутри  $0,9 \text{ mtr}$ , при толщинѣ дна  $\delta = 0,1 \text{ mtr}$ . Понтонъ на ружень такъ, что сидитъ въ водѣ на глубинѣ  $a = 0,4 \text{ mtr}$ . Определить площадь  $F$  отверстия въ днѣ понтона, необходимую для его затопления въ 10 минутъ.

*Отв.* Называя черезъ  $B_1$  и  $B_2$  площади внѣшняго и внутренняго оснований параллелепипеда и называя буквой  $T$  заданное время затопления въ секундахъ, получаемъ для опредѣленія искомой площади  $F$  ур-іе:

$$T \cdot \mu \cdot F \sqrt{2g} = \frac{2B_2}{B_1 - B_2} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} a - \delta - \frac{B_1}{B_2} \sqrt{1 - a} - \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} a - \delta - \frac{B_1}{B_2} \sqrt{1 - b} - \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} b \sqrt{1 - b}.$$

Вставляя всѣ данныя и рѣшая его, находимъ  $F = 0,0302 \text{ mtr}^2$ . Если бы толщину дна и боковыхъ стѣнокъ можно было считать  $= 0$ , то перетеканіе до затопленія происходило бы подѣ постояннымъ напоромъ  $= a$ , такъ что  $F = 0,025 \text{ mtr}^2$ .

37. Для опредѣленія расхода въ каналѣ, ширинкою  $1,5 \text{ mtr}$ , съ вертикальными стѣнками, въ немъ во всю его ширину поставлена вертикальная поперечная стѣнка съ острымъ краемъ и со свободнымъ доступомъ воздуха подѣ струю. Когда горизонтъ предѣ водосливомъ установился, оказалось, что вода стояла надѣ дномъ канала на высотѣ  $1,3 \text{ mtr}$ , а высота порога надѣ дномъ была сдѣлана  $0,905 \text{ mtr}$ . Каковъ расходъ?

*Отв.* Вычисляя по ур-ніямъ (17) и (18) Базена, опредѣляемъ  $Q = 0,48 \text{ mtr}^3/\text{sec}$ . Вычисляя по таблицѣ 27 Н. Смита, опредѣлимъ  $Q = 0,474 \text{ mtr}^3/\text{sec}$ .

38. Водосливная плотина (фиг. 162) поставлена перпендикулярно къ руслу рѣки. Откосъ ея — 1 : 1. Расходъ достигаетъ  $12 \text{ mtr}^3$ . Какой длины долженъ быть водосливъ, чтобы горизонтъ не подымался выше  $0,4 \text{ mtr}$  надѣ порогомъ, ширина котораго  $= 300 \text{ mtr}$ .



Фиг. 162.

*Отв.* Считая глубину въ рѣкѣ неизрѣдленно большой, подобно съ этимъ беря  $\mu$  по табл. 20, принимая во вниманіе влияние откоса по табл. 21, отбрасывая влияние толщины стѣнки по ур-нію (19), превращая боковымъ сжатіемъ и предполагая свободный доступъ воздуха подѣ струю, находимъ необходимую длину порога въ  $24,3 \text{ mtr}$ .

39. Какого размѣра должна быть круглая чугунная труба, положенная подѣ насыпью желѣзной дороги, для того, чтобы пропускать расходъ въ  $2 \text{ mtr}^3$ , не вызывая передѣ насыпью повышенія болѣе, какъ на  $1,5 \text{ mtr}$  надѣ центромъ трубы? Труба уложена съ уклономъ 1 : 100, имѣетъ длину въ  $15 \text{ mtr}$ , ея входъ снабженъ откосными крыльями, передняя стѣнка которыхъ имѣетъ уклонъ 100 : 1.

*Отв.* Допустимъ сначала, что весь напоръ расходуется на треніе въ трубѣ; тогда  $v = (1,5 + 0,01 \cdot 15) : 15 = 0,11$ ; слѣд.  $Q^2 \cdot l = 36,36...$  По таблицѣ Фаннинга (N 39) видно,



что труба потребовалась бы от 0,5 до 0,6 *mtr* диаметром. Допустим, наоборот, что трение можно пренебречь: считая коэф-тъ сопротивления при вх-дѣ, благодаря указанному въ условияхъ задачи расположению откосныхъ крыльевъ,  $\zeta_v = 0$ , найдемъ, что диаметръ трубы долженъ быть  $\approx 0,76$  *mtr*. Иначе, полагаемъ трубу въ 0,8 *mtr*, считываемъ по Фаннингу  $\zeta_v = 0,041$  и находимъ окончательно, что эта труба можетъ пропустить

$$\text{расходъ } Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{1 + 0,5 + \frac{4 \cdot 1,5}{0,8}} \frac{2g \cdot 1,65}{0,0041} = 2,125 \text{ mtr}^3/\text{sec}$$

40. Подъ полотномъ ж. д. уложена труба, сначала цилиндрическая, диаметромъ 400 *mm* и длиною 10 *mtr*, далѣе цилиндръ переходитъ въ конусъ длиною 5 *mtr* съ угломъ между образующими при вершинѣ въ 20°. обращенный широкимъ концомъ къ выходу. Труба горизонтальная; надъ центромъ ея при вх-дѣ вода стоитъ на 1,5 *mtr*. Какое расхождъ? При вх-дѣ устье трубы срезано откосною плоскостью насыпи полотна, откосъ которой = 1 : 1,5. Какъ измѣнился бы расходъ, если бы на всю длину въ 15 *mtr* труба сохраняла постоянный диаметръ въ 0,4 *mtr*?

Отв. По Вейсбаху, коэф-тъ сопротивления при вх-дѣ = 0,9. Для цилиндрической части трубы, по Фаннингу,  $\zeta_v = 0,0051$ . Выпускной диаметръ трубы — 0,4 (1 +  $1/10^3$ ) = 0,470 *mtr*. Идя въ виду считать потерю напора въ расходившейся части трубы, какъ потерю напора на трение, по средней живой силѣ, находимъ, что эта средняя живая сила соответствуетъ диаметру 0,440 *mtr*. Для опредѣленія скорости  $v$  въ концѣ трубы имѣемъ урав-

$$2g \cdot 1,5 = v^2 \left[ 1 + \left( 0,9 + 0,0051 \frac{4 \cdot 10}{0,4} \right) \left( \frac{0,47}{0,4} \right)^4 + 0,0051 \frac{4 \cdot 5}{0,44} \left( \frac{0,47}{0,44} \right)^4 \right]$$

Откуда  $v = 2,72$  *mtr sec*, а слѣд.  $Q = \frac{\pi \cdot 0,47^2}{4} v = 0,472$  *mtr}^3 \text{ sec}*. Если бы труба была цилиндрическая, диаметромъ 0,4 *mtr*, то мы получили бы:  $v = 3,5$  *mtr sec*, но  $Q = 0,44$  *mtr}^3 \text{ sec}*, т. е. расходъ, меньшій почти на 7,5%.

41. Исходя изъ таблицы коэф-товъ расхода для насадка Френсиса (см. стр. 142) можно ли опредѣлить потери напора въ отдельности для его частей *A, B, C* и т. д., и какъ это сдѣлать?

Отв. Въ виду довольно значительной разницы коэф-товъ расхода въ одномъ и томъ же насадкѣ съ переменной напора, для выясненія коэф-товъ сопротивления на отдельныхъ участкахъ насадковъ слѣдуетъ сравнивать разные насадки при условии постоянства скорости въ отдельныхъ соответственныхъ сѣченіяхъ. Такъ, напр., насадокъ *ABCDE* при напорѣ 0,42' пропускаетъ количество воды почти такое же, что и насадокъ *AB* при напорѣ 0,5'. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ коэф. сопр.  $\zeta_B$ , отнесенный къ скорости въ сѣченіи *B*, есть:  $\zeta_B = \frac{1}{0,78^2} - 1 = 0,645$ . Называя черезъ  $v_B$  скорость въ концѣ насадка *A . E*, называя черезъ  $\zeta_{BE}$  коэф-тъ сопротивления для его участка *BCDE*, отнесенный къ скорости  $v_B$ , имѣемъ урав-

$$H = \zeta_B \frac{v_B^2}{2g} + (1 + \zeta_{BE}) \frac{v_E^2}{2g}$$

При этомъ, напримѣръ, объёмомъ чертежа, находимъ отношение площадей сѣченій *B* и *E* какъ 7,88, слѣд., квадраты скоростей относятся какъ 1 : 62. Послѣ этого, такъ какъ насадокъ *A . E* даетъ полный коэф-тъ расхода  $\mu = 0,143$  при напорѣ 0,42', то получаемъ изъ предыдущаго уравн:

$$\frac{1}{0,143^2} = 0,645 \cdot 62 + 1 + \zeta_{BE}$$

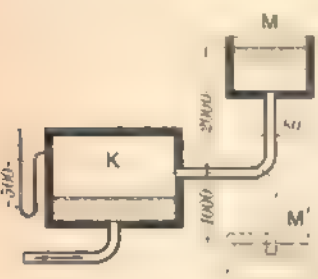
Отсюда, при данномъ напорѣ 0,42', на пути отъ *B* до *E* коэф-тъ сопротивленія былъ  $\zeta_{BE} = 8$ .

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

При напорѣ 0,64' . . . . .	$\zeta_{BE} = 8,4$ ;
„ „ 0,11' . . . . .	$\zeta_{BE} = 7,5$ ;
„ „ 0,63' въ насадкѣ <i>A...D</i> . . . . .	$\zeta_{BD} = 2,7$ .
„ „ 0,18' „ „ . . . . .	$\zeta_{BD} = 2,4$ ; соответственно $\mu = 0,215$ .
„ „ 0,71' „ „ <i>A...C</i> . . . . .	$\zeta_{BC} = 0,72$ ;
„ „ 0,10' „ „ . . . . .	$\zeta_{BC} = 0,5$ и т. д.

42. Какое давление долженъ развивать питательный насосъ въ своемъ воздушномъ котлѣ для того, чтобы поддерживать неизмѣннымъ уровень воды въ котлѣ при слѣдующихъ условияхъ. Длина питательной трубы — 25 *mtr*, ея диаметръ — 50 *mm*. На ней стоятъ 8 колѣвъ на 90° и одинъ тарельчатый клапанъ съ плоской тарелкой и нижними направляющими. Котелъ имѣетъ 100 *mtr*<sup>2</sup> поверхности нагрева и испаряетъ съ каждаго *mtr*<sup>2</sup> по 18 *kgf* пара въ часъ. Питание вводится въ паровое пространство; давление въ котлѣ 12 *atm* по манометру; отверстие питательной трубы лежитъ на 1 *mtr* выше уровня воды въ воздушномъ котлѣ насоса. Питание, равно какъ и испарение происходятъ непрерывно и равномерно.

Отв. Секундный расходъ холодной воды опредѣляется въ 0,5 *litr sec*; скорость воды почти 0,25 *mtr sec*. Считаемъ: коэф-тъ сопротивленія при входѣ  $\zeta_v = 0,5$ ; коэф-тъ сопротивленія клапана  $\zeta_{кл} = 7,1$ , соответственно 20° „ сужения; коэф-тъ сопротивленія каждаго колѣва на 90°  $\zeta = 1$ , коэф-тъ сопротивленія трения, по Дарси,  $\zeta_r = 0,0075$ . Напоръ на гидродинамическія потери опредѣляется по этимъ даннымъ въ  $31,6 \frac{v^2}{2g} = 0,101$  *mtr*. Слѣдовательно, давление въ котлѣ насоса достаточно въ 12,501 *kgf/cm*<sup>2</sup>, если считать, что 1 *atm* равна 1 *kgf/cm*<sup>2</sup>.



Фиг. 16

43. Изъ холодильника *K* паровой машины (фиг. 163) смѣсь пара и воды непрерывно выкачивается насосомъ, такъ что въ открытой манометрической трубкѣ ртуть стоитъ такъ, какъ это показано на рисункѣ. Конденсаторъ соединенъ съ резервуаромъ *M* трубой въ 80 *mm* въ диаметрѣ, длиною 8 *mtr*; на пути имѣются 3 поворота на 90° (радиусъ закругленія оси — 100 *mm*). Сколько воды выливается изъ *M* въ *K*? Сколько воды будетъ подаваться въ *K*, если резервуаръ *M* займетъ положение *M'*? Удельный вѣсъ ртути = 13,6.

Отв. Считая коэф-ты сопротивленія при входѣ  $\zeta_v = 0,5$ , трения (по Дарси)  $\zeta_r = 0,013$  и въ закругленіи (по Вейсбаху)  $\zeta = 0,2$ , найдемъ въ первомъ случаѣ  $Q = 23,7$  *litr/sec*, во второмъ случаѣ  $Q = 19,2$  *litr/sec*.

44. Имѣются 2 простыхъ водопровода, одинаковыхъ какъ по длинѣ и диаметру трубъ, такъ и по относительному расположенію горизонтовъ въ сообщаемыхъ этими трубами сосудахъ. Разница только въ томъ, что въ одномъ случаѣ течетъ ртуть, въ другомъ вода. Считая, что все коэф-ты сопротивленія въ обѣихъ жидкостяхъ одинаковы, отмѣтить, какая будетъ разница въ обстоятельствахъ движенія въ обѣихъ случаяхъ: расходъ, пьезометрической линіи, давления въ трубѣ и т. д.

Отв. Давление въ каждой точкѣ трубы, проводящей ртуть, будетъ въ 13,6 разъ больше соответствующихъ давленій въ трубѣ, проводящей воду. Расходъ ртути по вѣсу будетъ въ 13,6 разъ больше расхода воды; расходы по объему будутъ одинаковы, равно какъ и прочія обстоятельства движенія.

45. Къ сосуду (фиг. 164) приставлена прямая круглая труба диаметром 50 *mm* и длиною 10 *mtr.* Она соединена съ сосудомъ такъ (напр., помощью кожаного жбика), что ей можно давать любые уклоны, однако такъ, что точка *A* не измѣняетъ своего положенія. Опредѣлить расходъ и пьезометрическую линию, когда труба горизонтальна. Что измѣнится, если конецъ *B* поднять вверхъ на 200 *mm*? Если его опустить на 300 *mm*? Какъ нужно поставить трубу, чтобы по всей ея длинѣ давление было равно атмосферному? Вхоть *A* очерченъ по формѣ сжатой струи.

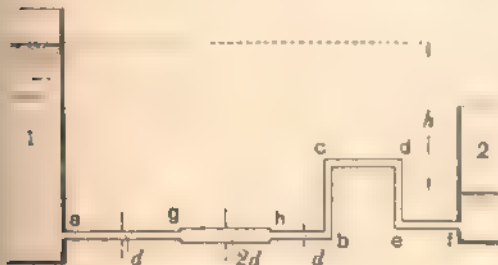


Фиг. 164.

Давление выше атмосферы на 0,476 *mtr.* 3) При наклоненной книзу трубѣ расходъ = 2,16 *ltr./sec.*; давление выше атмосфернаго на 0,435 *mtr.* 4) Конецъ *B* нужно опустить на 5,71 *mtr.* — Во всехъ случаяхъ было допущено, что коэф-тъ сопротивленія при вхоть = 0,05 и коэф-тъ тренія, по Дарси,  $\zeta_r = 0,015$ .

46. Рѣшить задачу № 45, предполагая, что при вхоть *A* кромки образуютъ со ствѣнью прямой уголъ.

*Отв.* Чтобы по всей длинѣ трубы давление оставалось атмосфернымъ, нужно конецъ *B* опустить на 4 *mtr.* При этомъ въ сжатомъ сѣченіи, если коэф-тъ сжатія = 0,64, давление будетъ на 0,36 *mtr* ниже атмосфернаго.



Фиг. 165.

47. Построить пьезометрическую линию въ трубѣ (фиг. 165), исполненной по рисунку. Всѣ участки *ag*, *gh*, *hb*, *cd*, *ef* горизонтальны, участки *bc* и *de* вертикальны. Длина *gh* < *ag*. — Что измѣнится, если на длинѣ *ag* сдѣлать трубу диаметромъ *2d*, а на длинѣ *gh* положить трубу диаметромъ *d*?

*Отв.* Построение пьезометрической линии производится по общимъ правиламъ, путемъ опредѣленія ея характерныхъ точекъ. При перемѣнѣ, указанной во

просѣ вопроса задачи, пьезометрическая линия существенно измѣнится, такъ какъ расходъ возрастетъ.

48. Въ мѣстности *A* имѣется источникъ, дающій 3,5 миллиона ведеръ въ сутки. Глубина уровня воды = 275 сажень. Эту воду нужно подавать въ городъ *B*. Проектная глубина центра трубы при вхоть въ *B* есть 290 саж. Въ этомъ мѣстѣ труба соединена съ резервуаромъ, горизонтъ въ которомъ лежитъ на 15 саж. выше оси трубы. Отъ *A* до *B* труба прямая. Сколько придется жечь угля подъ паровыми котлами на станціи въ *A* и какова должна быть ихъ поверхность нагрѣва, если труба будетъ 200 *mm* въ диаметрѣ? Расстояние отъ *A* до *B* по прямой линіи = 20 *kmt*; коэф-тъ полезнаго дѣйствія насосовъ = 0,80; механический коэф-тъ полезнаго дѣйствія паровой машины = 0,9; на индикаторную силу расходъ пара въ часъ 7 *kgr.* Котлы даютъ 7 *kgr.* пара на 1 *kgr* угля и даютъ 18 *kgr* пару на 1 *mtr*<sup>2</sup> поверхности нагрѣва.

*Отв.* Если коэф-тъ тренія  $\zeta_r = 0,0045$  (Фаннинга), то нужно жечь угля въ часъ 7 *kgr.*, а поверхность нагрѣва должна быть 313 *mtr*<sup>2</sup>.

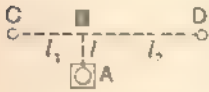
49. Какова должна быть труба при условіяхъ предыдущей задачи, если имѣется возможность развивать насосами въ *A* давление, не превосходящее 7,5 *atm* по манометру?

*Отв.* 89) *mm*, если манометрическую атмосферу считать —  $1 \text{ kg/cm}^2$  и если  $\zeta_r = 0,004$  (Фаннинг).

50. Как нужно поставить резервуар на горизонтальной станционной площадке при условии, чтобы он мог наполнить 1 тендер товарного паровоза, вмещающего 12 *tn* воды в 15 мин.? Труба, соединяющая резервуар с гидравлической станционной колонной иметь  $d = 5''$ , длина  $l = 120$  саж. По длине на ней стоять 6 колёв, с радиусом закруглений в  $6''$ . Устье гидравлической колонны лежит на высоте 1,5 саж. над станционной площадкой.

*Отв.* Считая  $5'' = 125 \text{ mm}$ , находим, что при условиях задачи скорость в трубке должна быть  $1,09 \text{ mtr/sec}$ . Если коэффициент сопротивления при входе — 0,5, на закругление — 0,2 и на трение (двойное интерполирование по таблиц 39) = 0,0063, то уровень воды в резервуаре должен стоять не ниже как на  $6,5 \text{ mtr}$  над станционной площадкой. Если иметь в виду только трение, то эта высота определится  $6,2 \text{ mtr}$ .

51. Решить предыдущую задачу в предположении, что резервуар *A* (фиг. 166) должен питать одновременно 2 колонны *C* и *D* и наполнять 2 тендера товарных паровозов по 12 *tn* каждый, при чем труба *AB* имеет  $d = 6''$  и  $l = 20$  саж.; трубы же *CB* и *BD* имеют  $d = 5''$ , а длины их таковы:  $l_1 = 40$  саж.;  $l_2 = 100$  саж. На ветви *AB* имеется одно закругление ( $R = 8''$ ), на ветви *BC* — 3 закругления и на ветви *BD* тоже 3 закругления, как в задаче № 50. Требуется, чтобы ближайший к резервуару тендер наполнился в 10 минут. Найти нужное положение резервуара *A*, а также время наполнения другого тендера.



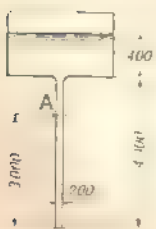
Фиг. 166.

*Отв.* Как в предыдущей задаче, считаем коэффициенты сопротивления: в колёвах — 0,2, при входе 0,5, в точке разветвления *O*, на трение (соответственно скоростям, по Фаннингу) в трубке *CB* — 0,006, в трубке *DB* — 0,0063, в трубке *AB* = 0,0077. Находим необходимое давление в точке разветвления —  $5,56 \text{ mtr}$ , секундный расход по трубке *AB* —  $32,76 \text{ ltr/sec}$ , а искомую высоту уровня воды в резервуаре над площадью —  $7 \text{ mtr}$ . После наполнения первого тендера труба *BC* запирается, при чем колонна *D* поает недостающая в этот момент во втором тендере  $4,344 \text{ tn}$  воды в  $4 \text{ min } 14 \text{ sec}$ ; соответственно скоростям считаем в трубке *AB* —  $\zeta_r = 0,0063$  а в трубке *BD* —  $\zeta_r = 0,0062$ .

52. Имеется труба переменного поперечного сечения, сквозь которую проходит расход в  $150 \text{ ltr/sec}$ . В первом месте диаметр трубы =  $200 \text{ mm}$ . В другом же месте, центр которого лежит на  $10 \text{ mtr}$  ниже первого, диаметр равен  $100 \text{ mm}$ . Найти, какое минимальное давление необходимо в первом месте, чтобы считать второе заполненным водою. Трение и, вообще, сопротивления в расчет не вводить.

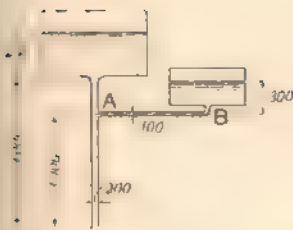
*Отв.* 0,72 атмосферного давления.

53. К резервуару (фиг. 167) приделана вертикальная труба диаметром  $200 \text{ mm}$ . Горизонт в резервуаре постоянен. Ввод в трубу хорошо скруглен, так что сжатия при входе нет. Определить расход, если труба открыта в атмосферу. В *A* сделано отверстие для пьезометра. Какой пьезометр нужен поставить, и как в нем расположится уровень?



Фиг. 167.

*Отв.*  $238 \text{ ltr/sec}$ . В обратном пьезометре вода подыметя на  $2,62 \text{ mtr}$  над уровнем в сосуде куда спущен пьезометр. В самом веру трубы авалогичное повышение достигнет величины  $2,68 \text{ mtr}$ .



Фиг. 168.

54. Къ сосуду (фиг. 168) приставлена вертикальная труба, какъ въ задачѣ № 53, но въ *A* приставлена труба, идущая къ резервуару *B*, горизонтъ котораго лежитъ на 300 *mm* выше *A*. Труба *AB* имѣетъ  $d = 100$  *mm* и  $l = 2$  *mtr*. Какъ потечетъ вода въ этомъ случаѣ?

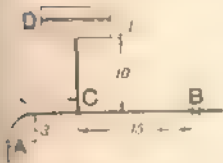
*Отв.* Пользуясь коэф-тами Дарси для новыхъ трубъ и пренебрегая коэф-тами, определяемъ высоту абсолютнаго давления въ точкѣ развѣтвленія въ 8,56 *mtr*, такъ что расходы будутъ: изъ верхняго резервуара 229 *litr/sec*, изъ другаго резервуара—40 *litr/sec*.

55. Сохраняя данныя задачи № 54, найди, какъ потечетъ вода, если горизонтъ въ *B* стоитъ ниже точки *A* на 500 *mm*.

*Отв.* При той же оцѣнкѣ сопротивленій, что и въ задачѣ № 54, найдемъ давление въ точкѣ развѣтвленія около 8,45 *mtr*, при чемъ изъ верхняго резервуара будетъ течь около 230 *litr/sec*, а изъ нижняго—32 *litr/sec*.

56. Какъ нужно поставить резервуаръ *B* (задача № 54), чтобы ни въ него, ни изъ него вода не двигалась?

*Отв.* содержится въ отвѣтѣ на задачу № 53.



Фиг. 169.

57. Вертикальная труба (фиг. 169) развѣтвляется на 2 трубы того же диаметра. Въ *A* край открытъ на 60°, въ *B* онъ открытъ вполнѣ. Диаметръ трубъ 75 *mm*. Какъ течетъ вода? Входъ въ трубу хорошо скругленъ, сопротивленія коэф-тъ не вводить.

*Отв.* Въ точкѣ развѣтвленія высота давления больше атмосфернаго на 1,3 *mtr*. Черезъ крайъ *A* выливается 6,98 *litr/sec*; черезъ крайъ *B* выливается 3,06 *litr/sec*.

58. Два горизонта (фиг. 170) сообщаются замкнутому водопроводомъ одного и того же диаметра, но въ одномъ случаѣ труба прямая, а въ другомъ наклонная, съ изгибомъ 15° и радиусомъ закругленія  $R = 600$  *mm*. Площадь сѣченія  $a = 700$  *cm²*, диаметръ сѣченія  $b = 600$  *mm*. Длины трубопроводовъ въ *mtr* указаны на чертежѣ. Отмѣнить всѣ разницы въ обстоятельствахъ движенія въ обоихъ трубопроводахъ.



Фиг. 170.

*Отв.* Если коэф-ты сопротивленія имѣютъ значенія: при входѣ, отнесенъ его къ скорости въ сжатомъ сѣченіи, 0,05, на трѣнѣ (по Дарси) 0,00518, на искривленіи 0,15, внутренняго сжатія 0,64, то въ случаѣ вертикальной трубы, расходъ — 550 *litr/sec*, скорость въ трубѣ 1,945 *mtr/sec*, скорость въ сжатомъ сѣченіи = 12,25 *mtr/sec*,

полное давление въ сжатомъ сѣченіи = 0,33 *atm*; потери работы слагаются изъ: при входѣ 210 *kgr mtr*; на трѣнѣ 20 *kgr mtr*; уносится въ отъединенное пространство и тамъ теряется на ударъ 106 *kgr mtr*; теряется на ударъ въ трубѣ 50 *kgr mtr*. Въ случаѣ наклонной трубы тѣ же величины даютъ: расходъ 545 *litr/sec*; скорость въ трубѣ 1,93 *mtr/sec*; скорость въ сжатомъ сѣченіи 12,15 *mtr/sec*; абсолютное давление въ сжатомъ сѣченіи 0,34 *atm*. Потери работы: при прохожденіи черезъ верхнее отверстие 205 *kgr mtr*; на трѣнѣ 12,5 *kgr mtr*; на искривленіи 15,5 *kgr mtr*; уносится въ отъединенное пространство 103 *kgr mtr*; теряется на ударъ въ трубѣ 2900 *kgr mtr*.

59. Разность уровней въ двухъ прудахъ — 20 *mtr*. Они соединены трубою, общая длина которой = 3 *km*. Наибольше возвышенная точка трубы лежитъ на 7 *mtr* выше уровня верхняго пруда въ разстояніи отъ него 2 *km*, считая по трубѣ. Если труба

иметь диаметр 200 *mm*, то сколько воды она пропускает? В каком расстоянии от верхнего пруда нужно расположить наиболее возвышенную точку трубы (7 *mtr* над горизонтом верхнего пруда), чтобы течение по трубѣ было невозможно при увеличении этого расстояния и устанавливалось при его уменьшении?

*Отв.*  $Q = 0$ . Движение может установиться, если возвышенная точка трубы лежит не далѣе, какъ на 495 *mtr* отъ верхнего пруда; тогда  $Q = 33,8 \text{ ltr sec}$ . Этотъ результатъ соответствуетъ коэф-ту тренія  $\zeta_r = 0,0056$ , по Дарси, для новыхъ трубъ. Если его оцѣнить, какъ для старыхъ трубъ, то условие возможности движения останется то же самое, а расходъ будетъ — 24 *ltr/sec*. По таблицѣ 39 расходъ нѣсколько больше 32 *ltr sec*, такъ какъ потеря напора на 100 *mtr* длины задана 0,667 *mtr*.

60. Вертикальный нагнетательный трубопроводъ шахтной водоотливной машины имѣетъ диаметр 0,25 *mtr*; глубина шахты 300 *mtr*; расходъ воды 180 *mtr*<sup>3</sup> въ часъ. Считая, что вся потеря напора на трение вызвана трениемъ воды объ стѣнку трубы, найти величину той, разгружающей опоры трубопровода, силы, которую развиваетъ протекающая по трубѣ вода.

*Отв.* Секундный расходъ равенъ 50 *ltr*. Потеря напора (находимъ интерполированиемъ по таблицѣ 39 на стр. 250 и сл.) равна 2,44 *mtr*. Вся секундная работа трения равна  $50 \cdot 2,44 = 122 \text{ kgr mtr}$ . При скорости въ 1,018 *mtr sec* эта работа можетъ быть развита силою въ 119,5 *kgr*. Это и есть некая разгружающая сила трения.

61. Трубопроводъ городского водоснабжения имѣетъ длину 12 *kmtr* и диаметр 0,9 *mtr*. При нормальной работѣ онъ долженъ подавать 1,5 *mtr*<sup>3</sup> воды въ секунду. Считая, что вся работа трения идетъ на нагреваніе протекающей воды и что инымъ тепловымъ воздѣйствіямъ вода на всемъ пути не подвергается, найти повышение температуры воды въ концѣ водопровода. Механический эквивалентъ тепла 424 *kgr mtr*.

*Отв.* По Кристену (см стр 221) коэффициентъ сопротивленія  $\zeta_r = 0,0048$ . Такъ какъ средняя скорость вычисляется въ 2,3565 *mtr sec*, то потеря напора опредѣляется въ 72,7 *mtr* столба воды (по Фаннингу, интерполированиемъ по таблицѣ 3<sup>я</sup> нашли бы эту потерю напора въ 60,5 *mtr*). Такъ какъ это и есть число *kgr mtr* работы трения, поглощаемой каждыиъ *kgr* воды, то, слѣд., на каждыиъ *kgr* протекающей воды приходится  $\frac{72,7}{424} = 0,172$  калорий или столько же градусовъ Ц. повышения температуры.

62. Горизонтальный насосъ забираетъ воду изъ всасывающаго колодца; уровень воды въ послѣднемъ стоитъ на 4 *mtr* ниже уровня воды во всасывающемъ колпакѣ насоса. Длина всасывающей трубы 8 *mtr*; на ней стоятъ: пятовый клапанъ съ коэффициентомъ сопротивленія  $\zeta = 2$  и три колѣна на 90° съ радиусомъ закругленія оси — 0,1 *mtr*; диаметръ трубы — 0,08 *mtr*. Какое давление должно быть во всасывающемъ колпакѣ, если секундная подача его равна 15 *ltr/sec*?

*Отв.* На 6,72 *mtr* выше барометрическаго, если, по Фаннингу, оцѣнить  $\zeta_r = 0,0056$ .



Фиг. 171

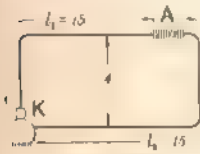
63. Съ какою силою нужно тащить поршень (фиг 171) слѣва направо, чтобы онъ двигался равномерно со скоростью 0,8 *mtr/sec*? Диаметръ трубы — 0,05 *mtr*, диаметръ поршня равенъ: 1) 0,05 *mtr* и 2) 0,10 *mtr*. Коэффициентъ сопротивленія при входѣ въ трубу — 2; правая сторона поршня подвержена атмосферному давленію; вся всасывающая труба заполнена водою.

*Отв.* 1) 6,3 *kgr* при коэффициентѣ тренія  $\zeta_r = 0,0072$ .  
2) 47,6 *kgr* при коэффициентѣ тренія  $\zeta_r = 0,0058$ .

64. Въ случаѣ предыдущей задачи найти давление сзади поршня и силу, къ нему приложенную, изъ условия, что оба поршня должны выходить изъ состоянія покоя равномерно ускореннымъ движениемъ съ ускорениемъ  $k = 3 \text{ mtr sec}^2$ . Найти также, при ка-

а чь ускорении поршня вода не будет в состоянии за ним следовать и от него отстанет?

*Отв.* Пренебрегая трением поршня и воды и считая высоту барометрического столба равной 10,33 *mt*, находим в первом случае: силу, могущую сообщить колонне воды заданное ускорение 6 *kgr*; давление в цилиндре за поршнем 4,27 *mt* столба воды; силу на поршень 11,9 *kgr*; вода начнет отставать от поршня, если ему сообщить ускорение 7,19 *mt/sec<sup>2</sup>*, для чего потребовалась бы сила на поршень в 20,28 *kgr*.— Во втором случае ускорительная сила для колонны воды нужна в 24 *kgr*; колонна воды не может следовать за поршнем с таким ускорением, так как давление за поршнем должно бы было упасть на 15,23 *mt* ниже барометрического. Наибольшее возможное в этом случае ускорение поршня есть 1,7975 *mt/sec<sup>2</sup>*, для чего нужна сила на поршень в 81,13 *kgr*.

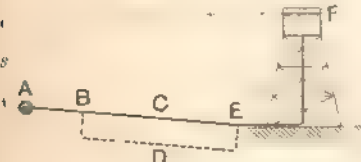


Фиг. 172.

65. Найти диаметр труб водяного отопления по следующим данным. Калориферы *A* должны отдавать 36000 калорий в час. Температура притекающей к калориферу воды 90° Ц., температура утекающей от него воды 70°. Длины труб между котлом *K* и батареей *A*, а также вертикальные расстояния даны на фиг 172 в метрах. Удельный вес воды при 70° = 0,9779, а при 90° = 0,9655.

*Отв.* Секундный расход воды нужен в 0,5 *ltr/sec*; располагаемый напор  $= h \frac{y_1 - y_2}{\gamma_0} = 0,0496$  *mt*. Поэтому  $q^2 : i = 0,00015$ . По таблиць 39 видно, что нужна труба немного больше 50 *mm* в диаметре. Принимая *d* = 60 *mm* и оценивая по Фаннингу  $\zeta_r = 0,009$ , определим достаточный напор в 0,029 *mt*, так что нужный диаметр лежит между 50 и 60 *mm*.

66. Пыется (фиг 173) труба, отводящая воду от магистрали *A*, давление в которой равно 3 *atm* избыточным, к резервуару *F*, уровень в котором стоит на 2 *mt* выше точки отвлечения от магистрали. Диаметр трубы = 0,2 *mt*. Длины отдельных ее частей таковы: длина *AB* = *l*<sub>1</sub> = 200 *mt*; длина *BCE* = *l*<sub>2</sub> = 500 *mt*; длина *EF* = *l*<sub>3</sub> = 300 *mt*. В другом случае на участке *BE* положили рядом вторую трубу *BDE*, диаметром тоже 0,2 *mt*, но длиною *l*<sub>2</sub> = 800 *mt*. В третьем случае весь участок *BE* заменил одну трубой в 0,25 *mt* диаметром и длиною 500 *mt*. Сравнить расход во всех трех случаях.



Фиг. 173.

*Отв.* 1) Вычисляя потерю напора на 100 *mt* длины, по таблиць 39 находим, что расход больше 55, но меньше 63 *ltr/sec*, приближаясь ко второй величинь. Пропорциональным интерполированием определяем его в 62 *ltr/sec*.

2) Для труб *AB* и *EF* примем  $\zeta_r = 0,0053$ , а для труб *BCE* и *BDE* примем  $\zeta_r = 0,0057$  (табл. 39); буквами *y*<sub>1</sub> и *y*<sub>2</sub> назовем высоты пьезометрических уровней в точках *B* и *E*, буквами *v*<sub>1</sub>, *v*<sub>2</sub>, *v*<sub>3</sub> называем скорости в трубах *AB* и *EF*, *BCE*, *BDE*. Пишем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 30 - y_1 - \frac{v_1^2}{2g} - 0,0053 \cdot 4.200 &= 0,2 \\
 y_1 - y_2 - \frac{v_2^2}{2g} - 0,0057 \cdot 4.500 &= v_3^2 - 0,0057 \cdot 4.800 \\
 y_2 - 8 - \frac{v_1^2}{2g} - 0,0053 \cdot 4.300 &= 0,2
 \end{aligned}$$

$$v_1 = v_2 + v_3$$

Отсюда находим  $u_1 - u_2 = 5,54 \text{ mtr}$ . После этого по таблицѣ 39 видимъ, что труба **BCE** пропускаетъ около  $43,01 \text{ liter/sec}$ , а труба **BDE** — около  $33,47 \text{ liter/sec}$ ; всего же изъ магистрали **A** берется около  $76,48 \text{ liter/sec}$ . Проверимъ результатъ изъ того соображения, что напоръ  $22 - 5,54 = 16,46 \text{ mtr}$  нуженъ для течения воды по трубамъ **AB** и **EF**, общей длиною въ  $500 \text{ mtr}$ : по таблицѣ 39, если потеря напора на  $100 \text{ mtr}$  длины равна  $\frac{16,46}{5} = 3,292 \text{ mtr}$ , то расходъ равенъ  $76,632 \text{ liter/sec}$ , что очень близко къ полученному выше результату. Неточность въ оцѣнкѣ коэффициентовъ  $\zeta_r$  не велика и во всякомъ случаѣ можетъ быть исправлена вторымъ пересчетомъ.

3) По правилу Дарси труба, диаметромъ  $250 \text{ mm}$  и длиною  $500 \text{ mtr}$ , эквивалентна трубѣ диаметромъ  $200 \text{ mm}$  и длиною  $164 \text{ mtr}$ . Такимъ образомъ въ расчетъ войдетъ труба **AF** постоянного диаметра  $0,2 \text{ mtr}$  при общей длинѣ въ  $200 + 164 = 364 \text{ mtr}$ . При напорѣ въ  $22 \text{ mtr}$  она пропуститъ (по табл. 39) около  $75 \text{ liter/sec}$ . Такимъ образомъ конвекции 2 и 3 почти равноцѣнны по даваемому расходу.

67. Сравнить потерю напора и затрачиваемая на перекачку работы въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ. Нужно провести расходъ  $200 \text{ liter/sec}$  на расстояние  $1000 \text{ mtr}$ . Въ обоихъ случаяхъ допускаютъ среднюю скорость въ  $1 \text{ mtr/sec}$ , но въ одномъ случаѣ ставятъ одну трубу на весь расходъ, а въ другомъ — двѣ одинаковыхъ.

*Отв.* Довольно близко удовлетворяютъ заданной средней скорости одна труба въ  $500 \text{ mm}$  и двѣ трубы по  $350 \text{ mm}$ . По таблицѣ 39 далѣе видно, что при скорости въ  $1 \text{ mtr}$  первая труба потребуетъ потери напора  $10 \frac{2,006 \cdot 200^2}{196,4^2} = 20,7 \text{ mtr}$ , а вторая  $10 \frac{3,134 \cdot 100^2}{96,21^2} = 33,8 \text{ mtr}$ . Затрачиваемая на перекачку работы относится какъ  $33,8 : 20,7 = 1,63 : 1$ .

68. Для городского водоснабжения нужно подавать  $15000 \text{ mtr}^3$  въ сутки на расстояние  $5000 \text{ mtr}$ , работая насосами только 15 часовъ въ сутки. Труба лежитъ горизонтально. Найти диаметръ трубы изъ условия наименьшей стоимости ея эксплуатаціи, которая слагается:

а) Изъ отчислений  $0,8\%$  на затраченный капиталъ, на погашеніе, въ фондъ возобновленія, на ремонтъ и т. д. всего  $8\%$  съ капитала, затраченнаго на постройку трубопровода. Стоимость укладки 1 погоннаго метра трубы  $50 d$  рублей, гдѣ  $d$  — диаметръ трубы въ метрахъ. б) Изъ расходовъ на энергию, при чемъ 1 силочасъ стоитъ 1,5 копейки, а коэффициентъ полезнаго дѣйствія насосовъ  $0,65$ .

*Отв.* Насосы должны развивать работу  $\frac{1000 \cdot 0,277}{75 \cdot 0,65} \zeta_r \frac{0,277^2 \cdot 64 \cdot 5000}{\pi^2 \cdot 2g d^5}$  лошадиныхъ силъ. Поэтому работа перекачки будетъ стоить рублей въ годъ.

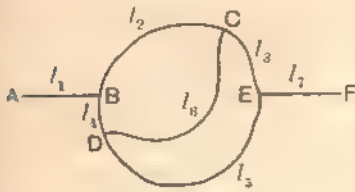
$$A_1 = \frac{1000 \cdot 0,277^2 \cdot \zeta_r \cdot 64 \cdot 5000 \cdot 0,015 \cdot 15 \cdot 365}{75 \cdot 0,65 \cdot \pi^2 \cdot 2g d^5}$$

Сооруженіе будетъ стоить  $A_2 = 0,08 \cdot 5000 \cdot 50 d$  рублей въ годъ. Стоимость эксплуатаціи  $A_1 + A_2$  рублей. Рѣшая уравненіе  $\frac{dA}{dd} = 0$ , найдемъ  $d = 0,645 \text{ mtr}$ , если считать  $\zeta_r = 0,005$ . Практически пришлось бы выполнить ближайшій рыночный размѣръ

69. Имѣемъ участокъ водопроводной сѣти, состоящій изъ 4 хъ трубъ (фиг. 174). Пьезометръ, поставленный въ **A**, имѣетъ уровень воды на высотѣ  $a = 25 \text{ mtr}$  надъ тѣмъ горизонтомъ, надъ которымъ пьезометръ въ **F** показываетъ высоту  $f = 18 \text{ mtr}$ . Кроме того, дано, что

труба <b>AB</b>	имѣетъ диаметръ $d_1 = 0,15 \text{ mtr}$	и длину $l_1 = 200 \text{ mtr}$
» <b>BCE</b>	» « « $d_2 = 0,18$	» « « $l_2 = 400$ «
» <b>BDE</b>	» « « $d_3 = 0,15$	» « « $l_3 = 300$ ..
» <b>EF</b>	» « « $d_4 = 0,15$	» « « $l_4 = 200$ ..





Фиг. 174.

Если расход в каждой из этих труб. — Как изменятся расходы, если на трубѣ BDE взять точку B, в расстоянии 50 mtr отъ B, и соединить ее трубою, в 0,10 mtr диаметромъ и длиной 50 mtr, съ точкою C трубы BCE, взявъ эту точку в расстоянии 100 mtr отъ E? — Гдѣ по трубѣ BCE нужно помѣстить точку C, чтобы вода в трубѣ DC не текла ни в ту, ни в другую сторону?

Отв. Первый вопросъ. Система уравненийъ аналогична той, которая указана в задачѣ № 66/2, при чемъ трубу BCE слѣдуетъ замѣнить по

правилу Dupuit трубою съ диаметромъ 0,15 mtr и в 161 mtr длины. Какъ первое приближение считаемъ во всѣхъ трубахъ коэффициенты  $\zeta_r$  между собою равными. Тогда выдѣла, соответствующая разности давлений в точкахъ B и E, вычисляется в 0,83 mtr. По таблицѣ 39 находимъ:

для трубы AB	потеря напора на 100 mtr	= 1,54 mtr;	поэтому расходъ	24,2 ltr sec.
„ „ BCE	„ „ „ „	= 0,516 „	„ „	= 13,54 „ „
„ „ BDE	„ „ „ „	= 0,277 „	„ „	= 9,7 „ „

Эти результаты уже довольно близко вяжутся между собою (24,2 литра съ одной стороны : 3,54 + 9,7 = 23,24 литра—съ другой) и во всякомъ случаѣ позволяютъ надежно взять подлежащія значенія для  $\zeta_r$ , а именно:

для трубъ AB и EF	считаемъ $\zeta_r = 0,0080$ ,
„ „ BCE	„ $\zeta_r = 0,0064$ .
„ „ BDE	„ $\zeta_r = 0,0067$

Послѣ этого по тѣмъ же уравнениямъ вычисляемъ разницу давлений в точкахъ B и E = 0,9 mtr столба воды, такъ что потери напора на 100 mtr длины соответственно равны 1,525; 0,56; 0,3 mtr. Интерполированиемъ по таблицѣ 39 найдемъ расходы съ одной стороны 24,09 ltr sec, съ другой стороны 14,19 и 10,16, т.е. в суммѣ 24,35 ltr sec. На такой ошибкѣ (около 1%) можно остановить приближеніе.

Второй вопросъ. Приводимъ по правилу Dupuit всѣ трубы къ одному диаметру в 0,150 mtr. Буквами  $l$ ,  $q$  и  $v$  обозначаемъ длины трубъ, расходы и скорости в качествѣ съ подстрочными указателями в порядкѣ призагаемой схемы (фиг. 174); такими же значками отмѣчаемъ коэффициенты сопротивленія тренія. Давленія в каждой точкѣ трубы обозначимъ одноименной съ нею малой буквой алфавита. Имѣемъ:

$$\begin{aligned}
 l_1 = l_7 = 200 \text{ mtr} & & l_4 = 50 \text{ mtr} \\
 l_2 = 300 \left( \frac{150}{180} \right)^5 = 120,75 \text{ mtr} & & l_5 = 250 \text{ mtr} \\
 l_3 = 100 \left( \frac{150}{180} \right)^5 = 40,25 \text{ mtr} & & l_6 = 50 \left( \frac{150}{100} \right)^5 = 378 \text{ mtr}.
 \end{aligned}$$

При рѣшеніи предыдущей задачи выяснены всѣ обстоятельства движенія воды, пока труба DC заперта, а именно, мы нашли:

$$\begin{aligned}
 q_1 = q_7 = 24,09 \text{ ltr/sec}; & & v_1 = v_7 = 1,365 \text{ mtr/sec} & & \zeta_1 = \zeta_7 = 0,0060 \\
 q_2 = q_3 = 14,19 \text{ ltr/sec}; & & v_2 = v_3 = 0,8 \text{ mtr/sec} & & \zeta_2 = \zeta_3 = 0,0064 \\
 q_4 = q_5 = 10,16 \text{ ltr/sec}; & & v_4 = v_5 = 0,572 \text{ mtr/sec} & & \zeta_4 = \zeta_5 = 0,0087
 \end{aligned}$$

Сообразно съ этимъ и съ длинами трубъ, давления въ разныхъ точкахъ системы, при запертой трубѣ *DC*, опредѣляются въ *mtr* столба воды:

$$\begin{array}{lll} a = 25; & b = 21,95; & e = 21,275 \\ f = 18; & e = 21,05; & d = 21,800. \end{array}$$

Ясно, что, отпирая трубу *DC*, мы пустимъ воду отъ *D* къ *C* вслѣдствіе избытка давления  $d - c = 0,525 \text{ mtr}$  и тѣмъ увеличимъ расходъ трубъ *AB*, *BD*, *CE* и *EF* и уменьшимъ расходъ трубъ *BC* и *DE*. Сообразно съ этимъ давления *b* и *d* понизятся, а давления *e* и *e* повысятся, и притомъ такъ, что разность  $d - c$  уменьшится, а разность  $b - d$  увеличится. Для рѣшенія имѣемъ систему 10 уравненій съ 10 неизвѣстными.

$$\begin{array}{ll} 25 - b = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} \frac{4l_1}{d} & d - c = \zeta_6 \frac{v_6^2}{2g} \frac{4l_6}{d} \\ b - c = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \frac{4l_2}{d} & f - 18 = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} \frac{4l_1}{d} \\ c - e = \zeta_3 \frac{v_3^2}{2g} \frac{4l_3}{d} & v_1 = v_4 + v_3 \\ b - d = \zeta_4 \frac{v_4^2}{2g} \frac{4l_4}{d} & v_4 - v_5 = v_6 \\ d - c = \zeta_5 \frac{v_5^2}{2g} \frac{4l_5}{d} & v_3 = v_2 + v_6 \end{array}$$

Разыскиваемъ корни путемъ послѣдовательныхъ приближеній, задаваясь разностью  $b - c$  и давлениемъ *d*. При этихъ условияхъ значенія  $\zeta$  всякій разъ съ большою точностью беремъ по таблицѣ 39, ибо потеря напора на 100 *mtr* длины всякій разъ оказывается извѣстной.

Для начала, сообразно съ вышесказаннымъ, задаемся  $b - c = 0,8 \text{ mtr}$ . Такъ какъ задано  $l_1 = l_7$ , то опредѣляемъ  $b = 21,9$ ;  $c = 21,1$  и вычисляемъ  $v_1 = 1,377 \text{ mtr sec}$ . Задаемся  $d = 21,65$ , такъ что  $b - d = 0,25$ , противъ прежнихъ 0,15. Вычисляемъ (или беремъ интерполированное) по табл. 39,  $v_4 = 0,771 \text{ mtr sec}$ ;  $v_3 = 0,488 \text{ mtr sec}$ . Послѣ этого  $v_6 = v_4 - v_3 = 0,283 \text{ mtr sec}$ . Сообразно съ этимъ вычисляемъ  $d - c = 0,264 \text{ mtr}$ , такъ что  $c = 21,386 \text{ mtr}$ . Наконецъ опредѣляемъ  $v_2 = 0,694 \text{ mtr sec}$  и  $v_5 = 0,91 \text{ mtr sec}$ . Составляемъ разность  $v_3 - v_2$ . Оказывается, что она, вмѣсто того, чтобы быть равной  $v_6$ , меньше чѣмъ  $v_6$ . Заключаемъ, что оба давления *d* и *c* нужно повысить (чтобы уменьшить  $v_6$  и увеличить разность  $v_3 - v_2$ ). Кроме того составляемъ суммы  $v_2 + v_4$ , а также  $v_3 + v_5$ . Оказывается онѣ обѣ больше чѣмъ  $v_1$ , съ которой онѣ должны равняться. Заключаемъ, что разность  $b - c$  задана слишкомъ большою, нужно увеличить расходъ въ трубкахъ *AB* и *EF* (скорость  $v_1$ ) и уменьшить его въ системѣ *BE* (суммы  $v_2 + v_4$  и  $v_3 + v_5$ ). Кроме того, такъ какъ оказывается, что  $v_3 - v_3 < v_2 - v_4$ , то еще разъ подтверждается заключеніе, что давления *d* и *c* нужно задать большими.

Если задать  $b - c = 0,75$ , то такимъ же порядкомъ вычислимъ  $v_1 = 1,381 \text{ mtr sec}$ . Задаемъ также  $d = 21,65$ , уменьшая разность  $b - d$  по сравнению съ предыдущимъ случаемъ; находимъ:

$$v_1 = 0,716; \quad v_3 = 0,476; \quad \text{такъ что} \quad v_6 = v_4 - v_3 = 0,24.$$

Далѣе  $d - c = 0,231$ , такъ что  $c = 21,429$ . Затѣмъ:

$$v_2 = 0,645; \quad v_5 = 0,94.$$

Разность  $v_3 - v_2$  на этотъ разъ  $> v_6$ ; стало быть давления въ *d* и *c* оцѣнены выше нужнаго. Сумма же  $v_2 + v_4$  меньше  $v_1$ , а сумма  $v_3 + v_5$  больше чѣмъ  $v_1$ , при чемъ сумма

$v_1 - v_2 > 2v_1$ . Отсюда заключаемъ, что разность  $b - c$  все еще оценена высоко, а величинамъ послѣдняго неравенства (2,777 и 2,762) показываютъ, что ошибка здесь невелика. Кроме того, разность  $b - d$  нужно увеличить.

Положимъ  $b - c = 0,746 \text{ mtr}$ , такъ что  $b = 21,573 \text{ mtr}$  и  $c = 21,127 \text{ mtr}$ , вычисляемъ  $v_1 = 1,381 \text{ mtr sec}$ . Положимъ  $d = 21,64 \text{ mtr}$ , такъ что  $b - d = 0,228 \text{ mtr}$  вместо послѣдняго случая. Послѣ этого:

$$v_1 = 0,721; \quad v_2 = 0,473;$$

и 170

$$v_3 = v_4 - v_5 = 0,248 \text{ mtr sec}.$$

Для  $d - c = 0,235 \text{ mtr}$ , такъ что  $c = 21,410 \text{ mtr}$ . Затѣмъ вычисляемъ:  $v_2 = 0,656 \text{ mtr sec}$ ;  $v_3 = 0,902 \text{ mtr sec}$ . Разность  $v_3 - v_2 = 0,246$ , что меньше, чѣмъ на 1% отличается отъ разности  $v_4 - v_5$  образующей сумму  $(v_1 + v_4) = 1,377$ ; также  $v_1 - v_5 = 1,375$  очень близки другъ къ другу и меньше, чѣмъ на 0,1% отличаются отъ скорости  $v_1$ . На этомъ, конечно, можно остановить изысканіе корней уравненій. Если бы это продолжать, то пришлось бы увеличивать разность  $b - c$ , сохраняя значеніе разности  $b - d$ .

Такимъ образомъ прибавокъ трубы  $DC$  мало повысилъ расходъ трубъ  $AB$  и  $EF$  — 4 литра вмѣсто 24,09, но существенно повліялъ на его распределеніе по отдѣльнымъ ветвямъ:

ветвь $BD$	пропускаетъ	12,74	литровъ	вмѣсто	10,16
» $CE$	»	15,94	»	»	14,19
» $BC$	»	11,59	»	»	14,19
» $DE$	»	0,84	»	»	10,16

Третій вопросъ. Чтобы вода не текла по трубѣ  $DC$  ни въ ту, ни въ другую сторону, нужно, чтобы отрезки  $BC$  и  $CE$  были прямо пропорциональны отрезкамъ  $BD$  и  $DE$ . Конечно, и это заключеніе, какъ и все рѣшеніе задачи, предполагаетъ возможность пренебреженія всѣми особыми сопротивленіями.

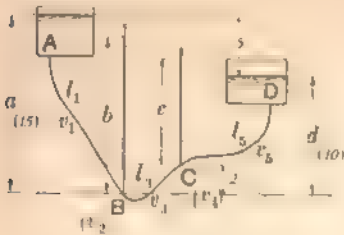
70. Труба, диаметромъ  $0,2 \text{ mtr}$  и длиною  $500 \text{ mtr}$ , соединяетъ два резервуара съ различной высотой стояния въ нихъ воды  $5 \text{ mtr}$ . На этой трубѣ, въ разстояніи  $200 \text{ mtr}$  отъ нижняго резервуара и на  $8 \text{ mtr}$  ниже уровня воды въ немъ, сдѣлано круглое отверстие (въ тонкой стѣнкѣ) въ  $0,05 \text{ mtr}$  въ диаметръ. Выяснить теченіе воды въ этой трубѣ.

Отв. Пока отверстие закрыто, по трубѣ перетекаетъ, какъ видно по таблицѣ 39, больше  $40 \text{ ltr sec}$ . При этомъ надъ отверстиемъ давленіе достигаетъ  $10 \text{ mtr}$  сверхъ атмосфернаго. Подъ такимъ напоромъ изъ отверстия могло бы вытечь лишь  $16,4 \text{ ltr sec}$ , если на основании данныхъ табл. 8 (стр. 124) и табл. 6 (стр. 122) считать для отверстия  $n = 0,6$ . Конечно, что верхній резервуаръ подаетъ воду въ отверстие и остатокъ расхода течетъ дальше къ нижнему резервуару. Путемъ пробъ оцениваемъ давленіе надъ отверстиемъ  $9,2 \text{ mtr}$  сверхъ атмосфернаго. При этомъ изъ верхняго резервуара вытекаетъ  $47,04 \text{ ltr sec}$ , въ явнѣйшій поднимается  $31,14 \text{ ltr sec}$  (обѣ величины найдены интерполяцией на табл. 39), а изъ отверстия выливается  $15,8 \text{ ltr sec}$ . Въ суммѣ это составляетъ  $46,94$ , что очень мало отличается отъ только что опредѣленнаго расхода изъ верхняго резервуара.

71. Предположить, что на трубѣ предыдущей задачи прибавлено второе отверстие, тоже въ  $0,05 \text{ mtr}$  диаметромъ, въ разстояніи  $200 \text{ mtr}$  отъ верхняго резервуара, считая отъ той трубы, и на  $15 \text{ mtr}$  ниже уровня въ немъ. Какъ течетъ вода въ этомъ случаѣ?

Отв. Представляемъ, для ясности, данныя задачи схематическимъ чертежомъ (фиг. 175), буквами  $b$  и  $c$  обозначаемъ высоты неизвѣстныхъ давленій въ точкахъ  $B$  и  $C$ , въ которыхъ сдѣланы отверстия. Буквами  $l$  и  $e$  съ нечетными значками называемъ длины участковъ трубы и скорости въ нихъ; буквою  $v$  съ четными значками называемъ ско-

рости в отверстиях *B* и *C*. Решение задачи № 67 показало, что когда *B* закрыто то, высота  $c = 9,2 \text{ mtr}$ . Легко подсчитать что при этом  $a = b = 2,53 \text{ mtr}$ , так что  $b = 12,47 \text{ mtr}$ . Подъ таким давлением из отверстия *B* может вылиться, если считать коэффициент расхода 0,6, только 18,4 *litrisec*, т.е. значительно меньше того, что протекало по трубе *CD*. В действительности же давление в *B* непременно уменьшится, расход по трубе *AB* увеличится, а в отверстии *B* уменьшится. Эти соображения заставляют считать вероятным, что расхода *Q* в трубе *AB* достаточно, чтобы покрыть расходы  $Q_2$  и  $Q_4$  в обоих отверстиях и чтобы остаток его  $Q_3$  переливался в резервуар *D*. Окончательно утверждаем, что течение будет именно таково на основании следующих соображений.



Фиг. 175.

Предположим, что по трубе *CD* совсем нет течения. Это значить, что

$$c = d - 2 = 8 \text{ mtr.}$$

При этом через отверстие *C* выливается

$$Q_4 = 0,00196 \cdot 0,6 \sqrt{19,6 \cdot 8} \cdot 1000 = 14,7 \text{ litrisec.}$$

Такой расход, протекая по трубе *BC*, потребует потери напора (находим интерполяцией по табл. 39)

$$b - (c + 2) = 0,108 + 0,0565 \frac{2,134}{3,142} = 0,146 \text{ mtr.}$$

Поэтому давление  $b = 10,146 \text{ mtr}$ , а потеря напора  $a - b = 4,854 \text{ mtr}$ . Подъ таким давлением  $b$  через отверстие *B* может вытечь около 16,6 *litrisec*, так что труба *AB* должна бы подать расход  $16,6 - 14,7 = 31,3 \text{ litrisec}$ . Между темъ при определенной высоте потерь напора в 4,854 *mtr* она может пропустить (по таблиць 39) больше 62,8 *litrisec* что и подтверждает правильность указанного утверждения.

Имѣя далѣе в виду, что давления  $b < 12,47 \text{ mtr}$  и  $c = 9,2 \text{ mtr}$ , т.е. что оба они меньше тѣмъ давленимъ, которыя соответствуют закрытому отверстию *B*, приступаемъ къ решению путемъ последовательныхъ приближений съ помощью системы 7 уравнений.

$$Q_1 = \frac{\pi 0,2^2}{4} \sqrt{\frac{(a-b) 2g \cdot 0,2}{\zeta_1 4,200}} \dots \dots \dots (1)$$

$$Q_2 = 0,6 \frac{\pi 0,5^2}{4} \sqrt{2gb} \dots \dots \dots (2)$$

$$Q_3 = \frac{\pi 0,2^2}{4} \sqrt{\frac{(b-2-c) 2g \cdot 0,2}{\zeta_3 4,100}} \dots \dots \dots (3)$$

$$Q_4 = 0,6 \frac{\pi 0,5^2}{4} \sqrt{2gc} \dots \dots \dots (4)$$

$$Q_5 = \frac{\pi 0,2^2}{4} \sqrt{\frac{(c+2) d_1 2g \cdot 0,2}{\zeta_5 4,200}} \dots \dots \dots (5)$$

$$Q_6 = Q_2 + Q_3 = Q_2 + Q_4 + Q_5 \dots \dots \dots (6 \text{ и } 7)$$

Производимъ все вычисления расходовъ въ литрахъ и при рѣшеннн 1, 3 и 5 уравнений интерполируемъ данныя таблицы 39.

Предполагаемъ  $b = 11,5 \text{ mtr}$ . Тогда потеря напора на 100 *mtr* трубы *AB* определяется въ 1,75 *mtr*. Таблица 39 даетъ тогда  $Q_1 = 55,055 \text{ litrisec}$ . Уравнение (2) даетъ  $Q_2 = 17,65 \text{ litrisec}$ , такъ что  $Q_3 = 37,408 \text{ litrisec}$ . Таблица 39 даетъ соответственно этому

...  $100 \text{ mtr}$ ,  $b = (c + 2) = 0,8526 \text{ mtr}$ , такъ что  $c = 8,6474 \text{ mtr}$ . Послеъ этого  
 ...  $Q_1 = 15,3 \text{ liter/sec}$ , такъ что  $Q_2 = 22,108 \text{ liter/sec}$ , а потеря напора на  
 ... трубы  $CD$  равна  $100 \frac{c-8}{200} = 0,3237 \text{ mtr}$ . Такой потерьъ соответствуетъ по таб-  
 ...  $22,451 \text{ liter/sec}$ , т.-е. несколько больши того, который мы только что по-  
 ... заключаемъ, что оба давления  $b$  и  $c$  въ действительности ниже, чѣмъ это оказа-  
 ... этомъ предположеніи.

... предполагаемъ послеъ этого  $b = 11,45 \text{ mtr}$ , и, проведя вычисления тѣмъ же поряд-  
 ... для истинныхъ значений всѣхъ неизвѣстныхъ слѣдующіе достаточно узкіе

$$\begin{aligned} 11,48 < b < 11,5 \text{ mtr}, \\ 55,211 > Q_1 > 55,058 \text{ liter/sec}, \\ 17,64 < Q_2 < 17,65 \text{ liter/sec}, \\ 37,571 > Q_3 > 37,408 \text{ liter/sec}, \\ 8,622 < c < 8,647 \text{ mtr}, \\ 15,29 < Q_4 < 15,3 \text{ liter/sec}, \\ 22,281 > Q_5 > 22,108 \text{ liter/sec}. \end{aligned}$$

... строкъхъ всѣ дѣльныя числа соответствуютъ предположенію  $b = 11,48 \text{ mtr}$ , на-  
 ... правому столбцу соответствуетъ значеніе  $b = 11,5 \text{ mtr}$

72. Рѣшить задачу № 71 при слѣдующихъ данныхъ (см. схему, приведенную при  
 ... этой задачи). Труба  $ABCD$  имѣетъ диаметръ  $0,1 \text{ mtr}$ . Отверстіе  $B$  имѣетъ диаметръ  
 ...  $\text{mtr}$  и находится на  $7 \text{ mtr}$  ниже уровня въ резервуарѣ  $A$ . Отверстіе  $C$  имѣетъ  
 ...  $\text{mtr}$  въ диаметръ и лежитъ на  $10 \text{ mtr}$  ниже уровня въ томъ же резервуарѣ. Длины  
 ... въ трубы таковы:  $l_1 = 150 \text{ mtr}$ ;  $l_2 = 300 \text{ mtr}$ ;  $l_3 = 50 \text{ mtr}$ . Вертикальное разстояніе  
 ... уровнями въ обоихъ резервуарахъ равно  $4 \text{ mtr}$ .

Отв. На основаніи табл. 9 (стр. 124) и табл. 6 (стр. 122) считаемъ коэффициентъ  
 ... да въ отверстіи  $B$  равнымъ  $0,61$ , а въ отверстіи  $C = 0,6$ . Допустимъ, для выясненія  
 ... давления теченія въ отдѣльныхъ участкахъ трубы, что труба  $CD$  не подаетъ воды ни  
 ... ни въ другую сторону, такъ что давленіе  $c = 6 \text{ mtr}$ . При этомъ условіи черезъ  
 ... ретіе  $C$  можетъ вылиться расходъ  $Q_1 = 0,6 \frac{\pi \cdot 0,025^2}{4} \sqrt{2g \cdot 6} \cdot 1000 = 3,19 \text{ liter/sec}$ . Чтобы

... расходъ прошелъ по трубѣ  $BC$ , необходима потеря напора (на основаніи таблицы 39)  
 ...  $c = 3 \left\{ \begin{matrix} 0,2401 & 0,1243 & 0,4084 \\ & & 0,7854 \end{matrix} \right\} = 0,739 \text{ mtr}$ , такъ что давленіе  $b = 3,739 \text{ mtr}$ . Подъ  
 ... давленіемъ черезъ отверстіе  $B$  можетъ вылиться расходъ

$$Q_2 = 0,61 \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} \sqrt{2g \cdot 3,739} \cdot 1000 = 10,2 \text{ liter/sec}.$$

... образомъ труба  $AB$  была бы должна пропустить расходъ  $Q_1 = 3,19 + 10,2$   
 ...  $13,39 \text{ liter/sec}$ , для чего по таблицѣ 39 необходима потеря напора  $a - b = 1,5 \left\{ \begin{matrix} 3,790 \\ & 0,946 & 0,354 \\ & & 1,963 \end{matrix} \right\} = 5,43 \text{ mtr}$ , тогда какъ остается располагаемой лишь высота  $7 - 3,739$

...  $3,261 \text{ mtr}$ . Ясно, что давленіе въ  $C$  должно быть ниже предположеннаго, такъ что и  
 ... въ  $CD$  вода будетъ течь отъ  $D$  къ  $C$ . Нужно выяснитъ направленіе теченія на участкѣ  
 ... либо направленіе теченія на участкѣ  $AB$ , конечно, не вызываетъ сомнѣній. Для этого  
 ... тымъ, что по всей трубѣ  $BCD$  нѣтъ теченія, такъ что  $b = 3$ ,  $c = 6 \text{ mtr}$ . При этомъ  
 ... ни труба  $AB$  можетъ пропустить расходъ (по таблицѣ 39) въ  $11,357 \text{ liter/sec}$ , тогда  
 ... черезъ отверстіе  $B$  можетъ выливаться лишь  $9,13 \text{ liter/sec}$ . Ясно, что давленіе  $b$   
 ... должно быть выше предположеннаго. Отсюда слѣдуетъ, что отверстіе  $C$  будетъ питаться  
 ... двумя резервуарами, и, кромѣ того, что давленіе  $b$  должно быть больше  $3 \text{ mtr}$ , а давле-  
 ...  $c$  должно быть меньше  $6 \text{ mtr}$ , т.-е. тѣхъ значеній давленій при которыхъ вода въ  
 ... трубѣ  $BCD$  неподвижна.

Написавши надлежащимъ образомъ систему уравнений и получаемъ слѣдующіе предѣлы, внутри которыхъ содержатся всѣ неизвѣстныя:

$$\begin{aligned} 3,18 &> b > 3,17 \text{ mtr,} \\ 11,07 &< Q_1 < 11,08 \text{ litr/sec,} \\ 9,458 &> Q_2 > 9,43 \quad \cdot \\ 1,612 &< Q_3 < 1,65 \quad \cdot \\ 5,969 &> c > 5,95 \text{ mtr} \\ 3,183 &> Q_4 > 3,18 \text{ litr/sec} \\ 1,571 &> Q_5 > 1,53 \quad \cdot \end{aligned}$$

73. Ту же задачу № 71 рѣшить при слѣдующихъ данныхъ см схему, приведенную при рѣшеніи этой задачи). Труба *ABCD* имѣетъ диаметръ 0,1 mtr. Расстояние между уровнями въ сосудахъ равно 4 mtr. Отверстие *B* имѣетъ диаметръ 0,05 mtr и находится на 7 mtr ниже уровня въ резервуарѣ *A*. Отверстие *C* имѣетъ диаметръ 0,025 mtr и лежитъ на 10 mtr ниже тѣ же уровня. Длины участковъ трубъ таковы:  $l_1 = 300$  mtr;  $l_2 = 150$  mtr;  $l_3 = 50$  mtr. (Ср. эти данныя съ задачей № 72.)

Отв. Согласно даннымъ задачи № 72, считаемъ коэффициентъ расхода въ отверстіи *B* равнымъ 0,61, а въ отверстіи *C* — 0,6. Для выясненія направленія течения въ трубѣ допустимъ, что въ трубѣ *BCD* нѣтъ никакого течения, т. е. что давленіе  $b = i = 4 = 3$  mtr. Въ такомъ случаѣ отверстіе *B* должно было бы выпускать

$$Q_2 = 1000 \cdot 0,61 \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} \sqrt{19,63} = 9,13 \text{ litr sec,}$$

тогда какъ труба *AB*, при располагаемомъ напорѣ по 1,333 mtr на каждую сотню метровъ длины трубы (см. таблицу 39), могла бы пропустить лишь 7,54 litr/sec. Ясно, что отверстіе *B* будетъ питаться обоими резервуарами а отверстіе *C* будетъ получать воду только изъ резервуара *D*.

Подобно предыдущему, сближеніемъ предѣловъ корней получимъ слѣдующія неравенства:

$$\begin{aligned} 2,78 &< b < 2,79 \\ 8,059 &> Q_1 > 8,047 \\ 8,84 &< Q_2 < 8,86 \\ 0,781 &< Q_3 < 0,813 \\ 5,808 &< c < 5,82 \\ 3,14 &< Q_4 < 3,15 \\ 3,921 &< Q_5 < 3,963 \end{aligned}$$

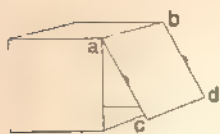
### Дополнительныя задачи по гидростатикѣ.

74. Въ цилиндрѣ плотно вставленъ поршень такъ, что расстояние отъ дна цилиндра до поршня — 20 см. Поршень былъ свободно вставленъ при атмосферномъ давленіи показаніе барометра было 74 см. Цилиндръ опустили затѣмъ въ море на глубину 40,256 mtr, при чемъ барометръ стоялъ на 70 см. Какое расстояние будетъ между дномъ цилиндра и поршнемъ, если пренебречь треніемъ поршня о стѣнки, если считать температуру воды и воздуха одинаковыми и если уд. вѣсъ морской воды принять въ 1,02?

Отв. Почти 4 см (3,98 см).

75. Пароходъ сидитъ въ морской водѣ на 0,05 mtr мезьче, чѣмъ въ прѣсной. При погружѣ 50 tn угля посадка парохода въ морѣ увеличивается на 0,025 mtr. Показать, что водоизмѣненіе парохода равно 5000 tn, если удѣльный вѣсъ морской воды = 1,02, а прѣсной 1,00.

76. Одна из стенок кубического ящика (фиг. 176) исполнена откидной, так что в одном случае она может вращаться около горизонтальной стороны  $ab$ , в другом же около стороны  $cd$ . Посередине стороны  $ac$  и  $bd$  сделаны ушки, к которым прикреплены нити, обвивающая весь ящик в горизонтальной плоскости. Ящик наполнен до краев водою. Показать, что натяжение каждой нити вблизи ушка в первом случае равно  $\frac{1}{3}$  веса воды в ящике, а во втором— $\frac{1}{6}$  того же веса.



Фиг. 176.

77. Подпорная стенка имеет поперечное сечение в форме прямоугольника, горизонтальный размер которого равен  $b$  мтр. Стенка представляет одну из вертикальных стенок резервуара, наполненного до краев водою. Если коэффициент трения для материала стенки есть  $f$ , вес  $1$  мтр<sup>3</sup> этого материала  $\gamma_1$ , а вес  $1$  мтр<sup>3</sup> жидкости  $\gamma_2$ , то какова возможная высота  $z_1$  стенки, определяемая из условия отсутствия сдвига стенки по ее горизонтальному шву? Показать, что „линия давления“ в горизонтальных швах есть парабола. (Линией давления называется место точек пересечения горизонтального шва с равнодействующей всех внешних сил, действующих на часть стенки, лежащую выше этого шва.) При какой высоте  $z_2$  стенки линия давления пересекает шов все ближе к краю, как на  $\frac{1}{n}$  часть толщины стенки?

Отв.  $z_1 = 2f \frac{\gamma_1}{\gamma_2} b$  мтр, при чем размер  $z$  вообще отсчитывается от верхнего края стенки к низу. Буквой  $y$  назовем расстояние от вертикальной линии, проведенной через середину сечения стенки, до точки пересечения линии давления с горизонтальным швом. Линия давления есть парабола, потому что  $y = \frac{z^2}{2b}$ . Наконец искомое  $z_2 = b \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$ .

78. Вопросы предыдущей задачи применить к поперечному сечению стенки имеющему форму прямоугольного треугольника с вертикальным катетом, обращенным к жидкости, и с углом  $\alpha$  при вершине. Показать, что линия давления в этом случае не парабола, а прямая, проходящая через вершину сечения.

Отв. Высота  $z_1$  может быть любая, лишь бы удовлетворялось условие  $f > \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{ctg} \alpha$ . В противном случае нет вообще высоты  $z$ , удовлетворяющей условию отсутствия сдвига — буквой  $y$  называем горизонтальное расстояние от вертикального катета сечения стенки до точки пересечения линии давления с горизонтальным катетом. Линия давления есть прямая, так как  $y = \frac{z}{3} \left( \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{ctg} \alpha \right)$ . — Высота  $z_2$  может быть любая, лишь бы  $\operatorname{ctg} \alpha > \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{n}{2n-3}$ .

79. Решить предыдущую задачу, предполагая, что к жидкости обращена наклонная поверхность стенки, или в поперечном сечении — гипотенуза треугольника.

Отв. Условие отсутствия сдвига более благоприятно, чем в предыдущем случае, его не будет при всяком  $z_1$ , лишь бы удовлетворялось условие  $f > \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \operatorname{ctg} \alpha$ . — Линия давления есть прямая. При том же значении буквы  $y$ , как и в предыдущей задаче, имеем:  $y = \frac{z}{3} \left( \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \operatorname{ctg} \alpha \right)$ . Чтобы высота  $z_2$  была любая, нужно удовлетворить условию  $\operatorname{ctg} \alpha > \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{n}{n-3}}$ .

9. Подпорная стѣнка должна быть высотой  $a$  *m*. Линия давления должна пересѣкать ея нижнее основание, раздѣлая его въ отношеніи 1:2 съ тѣмъ, чтобы не было въ горизонтальныхъ швахъ напряженія разрыва. Считая  $\gamma_1 = 1500$  и  $\gamma_2 = 1000$  (см. обозначенія задачи № 77, сравнить вѣсъ 1 погоннаго метра кладки, выполненный по конструкціи задачъ № 77, 78 и 79.

*Отв.* 1 погонный метръ первой стѣнки вѣситъ  $1,5 a^2$  *tn*, второй стѣнки  $0,8165 1,5 a^2$  *tn*; третьей конструкціей вообще нельзя удовлетворить поставленному условию: вѣсъ ея получается равнымъ со.



## ГЛАВА IV.

### Движеніе воды въ каналахъ.

#### § 30. Уравненіе равномернаго теченія въ каналахъ.

Изученіе законовъ движенія воды въ рѣкахъ и каналахъ составляетъ одинъ изъ важныхъ вопросовъ практической гидравлики, такъ какъ оно необходимо для правильной постановки илотинъ, для расчета отверстій мостовъ, для производства работъ по урегулированію теченія рѣкъ въ цѣляхъ судоходства и другихъ, для осушенія болотъ, для оросительныхъ работъ и т. д. Къ сожалѣнію, это—одинъ изъ наиболѣе слабыхъ отдѣловъ гидравлики. Что касается до каналовъ, —искусственныхъ открытыхъ водоводовъ, съ русломъ болѣе или менѣе правильнымъ, т.-е. прямолинейнымъ, съ постояннымъ уклономъ дна, съ правильнымъ поперечнымъ профилемъ, безъ рѣзкихъ поворотовъ, съ русломъ неразмываемымъ, болѣе или менѣе плотнымъ и чистымъ,—то въ каналахъ можно, въ большей или меньшей степени, довольствоваться простыми теоретическими представленіями и предположеніями и извлекать изъ нихъ полезныя для практики результаты. Въ рѣкахъ же, потокахъ естественныхъ, а потому безусловно не удовлетворяющихъ ни одному изъ названныхъ выше условий, обстоятельства движенія крайне осложняются: достаточно указать, напр., что рѣки съ неразмываемымъ русломъ и не несущія съ собою наносовъ представляютъ рѣдкое исключеніе; прямолинейныхъ участковъ на рѣкахъ вообще не бываетъ и т. п. Понятно, что примѣненіе гипотезы параллельныхъ струй, мало дающее для объясненія явленія теченій въ каналахъ, совершенно ничего не объясняетъ въ потокахъ естественныхъ. Попытка Буссиньека<sup>\*)</sup>, построить теорію теченія въ открытыхъ руслахъ на иныхъ началахъ достаточно сложна, чтобы приводить ее въ этомъ краткомъ курсѣ гидравлики, предвѣщенной при томъ не для строителей. Въ силу этого мы принуждены ограничиться изложеніемъ важнѣйшихъ фактовъ о движеніи воды въ каналахъ, и если иногда и будемъ говорить о рѣкахъ, то будемъ надѣяться ихъ свойствами, имъ неприеущими, приближая представленіе о рѣкѣ къ представленію о каналѣ.

<sup>\*)</sup> M. J. Boussinesq „L'essai sur la theorie des eaux courantes“ Въ полномъ видѣ появилась въ 1872 году среди „Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'Institut national de France“. На русскомъ языкѣ эта работа сокращенно изложена проф. Д. Бобылевымъ подъ заглавіемъ „Очеркъ теоріи водныхъ теченій, выра-

Выяснимъ сначала термины, съ которыми придется имѣть дѣло.

*Продольнымъ профилемъ* канала называется линия *MN* (фиг. 177) пересѣченія свободной поверхности съ вертикальной плоскостью *PQ*, содержащей направленіе теченія. Иногда различаютъ продольный профиль свободной поверхности отъ продольнаго профиля дна, — линіи *RS*, которую обыкновенно считаютъ прямой.

*Поперечнымъ профилемъ* называются линіи *DACBE* (та же фиг. 177) пересѣченія канала съ плоскостью, перпендикулярною къ направлению теченія, хотя обыкновенно плоскость эту считаютъ вертикальной (напр., *MR, NS*). Часть *ACB* этого профиля, находящаяся подъ водою, называется *смачиваемымъ* (также *подводнымъ*) *периметромъ*. Его длину будемъ обозначать буквою *O*.



Фиг. 177.

Площадь *ABC*, занятая водою, называется *живымъ сѣченіемъ* канала.

Мы будемъ называть его буквою *F*. Отношеніе  $\frac{F}{O}$  называется *среднимъ гидравлическимъ* (или просто *среднимъ*) *радіусомъ сѣченія*.

Вертикальное превышеніе *h* двухъ точекъ *M* и *N* продольнаго профиля называется *падениемъ* канала на длину *L*, равной разстоянію между точками *M* и *N*, считая его по свободной поверхности. Отношеніе  $\frac{h}{L} \sin i \approx i$  называется *падениемъ* (на единицу длины), также *уклономъ* канала. Обыкновенно уголъ *i* такъ малъ, что  $\sin i$  его можно считать равнымъ углу. Въ силу малости этого угла является безразличнымъ, считать ли длину *L* по свободной поверхности, или въ горизонтальной плоскости (тогда  $\frac{h}{L} \approx (g i)$ ), или, даже, по дну канала. Впрочемъ, иногда бываетъ важно различить паденіе свободной поверхности отъ паденія дна канала. Паденіе выражаютъ обыкновенно въ промилляхъ ( $\frac{1}{1000}$ ), обозначая его знакомъ  $\frac{0}{1000}$ ; за единицу длины принимаютъ километръ. Въ естественныхъ рѣкахъ паденіе въ 1 и болѣе промили встрѣчается только въ верховьяхъ рѣкъ, въ стремнинахъ и порогахъ, а также въ горныхъ потокахъ. Низовья части рѣкъ, а также всѣ равнинныя рѣки имѣютъ обыкновенно паденія, меньшія  $1\frac{0}{1000}$ . Само собою разумѣется, что на всемъ протяженіи рѣки паденіе не остается постояннымъ, но, болѣе или менѣе значительно,

ботанной Буссинекомъ". Сиб. 1898. Еще болѣе кратко изложены основныя положенія этой теории инженеромъ В. Вислюдкимъ въ статьѣ „О неудовлетворительности гидравлическихъ формулъ, принятыхъ нынѣ для расчета отверстій малыхъ мостиковъ... и т. д.“ См. Журналъ Министерства Путей Сообщенія, кн. 3, 4 и 5, 1901 г.

мѣняется. Въ искусственныхъ каналахъ падение выбирается въ зависимости отъ назначенія канала. Такъ, въ *судоходныхъ* каналахъ избѣгаютъ дѣлать паденія больше  $0,2^{\circ}_{\infty}$ , чтобы не увеличивать усилія, необходимаго для движенія судовъ противъ теченія. Въ *оросительныхъ* каналахъ, распредѣляющихъ воду по участку, падение дѣлають обычно не болѣе  $0,05^{\circ}_{\infty}$ ; въ каналахъ же, подводящихъ воду для цѣлей орошенія, падение достигаетъ  $0,25$  и болѣе промили. Въ каналахъ, *отводящихъ воду для цѣлей утилизацїи ея энергїи*, падение обыкновенно не болѣе  $0,4-0,6^{\circ}_{\infty}$ ; однако, при значительныхъ количествахъ воды, и, особенно, при большихъ располагаемыхъ напорахъ, встрѣчаются, и въ послѣднее время довольно часто, паденія въ  $0,75$ ,  $1$ ,  $1,5$  и даже, какъ исключеніе, въ  $7^{\circ}_{\infty}$ .

Въ качествѣ примѣровъ укажемъ нѣкоторыя данныя, относящяся къ русскимъ и европейскимъ рѣкамъ \*).

Р. *Москва*, между Бабьегородской плотины и Москворѣцкимъ мостомъ, въ межень имѣетъ падение  $0,6^{\circ}_{\infty}$ ; при томъ же стоянїи воды, на всемъ теченїи въ предѣлахъ города, ея среднее падение равно  $0,19^{\circ}_{\infty}$ .

Среднее падение *Днѣпра*, на всей его длинѣ въ 2117 верстъ, равно  $0,11^{\circ}_{\infty}$ . На частикѣ отъ Кіева до Екатеринослава (181 вер.) оно равно  $0,171^{\circ}_{\infty}$ ; среднее падение его на порожнистомъ участкѣ отъ Екатеринослава до Александровска (96 верстъ) равно  $0,31^{\circ}_{\infty}$ . Наконецъ, среднее падение самого большого и крутого его порога Пенаситецъ (длиною 408 саж.) достигаетъ  $5,5^{\circ}_{\infty}$ .

Среднее падение на рѣкѣ *Днѣстрѣ* измѣняется слѣдующимъ образомъ: отъ австрійской границы до г. Мошалева-Вознянскаго (18 вер.) оно равно  $0,3^{\circ}_{\infty}$ ; далѣе до мѣстечка Выхватинецъ (205 вер.) оно уменьшается до  $0,18^{\circ}_{\infty}$ , далѣе до Бендеръ (190 вер.) оно равно лишь  $0,09^{\circ}_{\infty}$ , и, наконецъ, далѣе до устья (195 вер.) оно падаетъ до  $0,026^{\circ}_{\infty}$ . При томъ, на участкѣ отъ Могилева до Выхватинецъ, на многочисленныхъ перекатахъ, среднее падение въ межень равно  $0,15^{\circ}_{\infty}$ , а въ плесахъ — лишь  $0,09^{\circ}_{\infty}$ .

Среднее падение рѣки *Моты*, на всемъ ея протяженїи въ 412 п., равно  $0,31^{\circ}_{\infty}$ , на порожнистыхъ порогахъ, длиною въ 22 версты, среднее падение составляетъ  $2,7^{\circ}_{\infty}$ .

Падение на р. *Нить* на протяженїи 54 верстъ отъ Ладъжскаго озера до Рожковской пристани по нивелировкѣ 1904—1905 годовъ составляло всего  $2,5$  саж., или въ среднемъ  $0,093^{\circ}_{\infty}$ .

Для рѣки *Волгоны*, имѣющей длину въ 185 верстъ, разница уровней озеръ Ильмень и Ладожское въ 6,86 саж. даетъ среднее падение  $0,074^{\circ}_{\infty}$ ; эта разница уровней въ значительной мѣрѣ сосредоточена на Ладъжскихъ порогахъ, имѣющихъ длину 10 верстъ и падение 4,43 саж., такъ что средний уклонъ этихъ пороговъ =  $0,885^{\circ}_{\infty}$ , а средний уклонъ остального теченія =  $0,028^{\circ}_{\infty}$ .

На *Западной Двинѣ* встрѣчаются мѣстные уклоны на большихъ протяженїяхъ въ 1 и болѣе верстъ въ  $1,581^{\circ}_{\infty}$  и въ  $0,974^{\circ}_{\infty}$ ; таковы паденія на порогахъ близъ Крейсбургъ. Среднїй уклонъ несравненно меньше.

На *Сѣверной Двинѣ*, около Архангельска, т.-е. уже близъ устья, наоборотъ, замѣрены уклоны въ  $0,001^{\circ}_{\infty}$  и даже меньше того, на 1065—1085 верстахъ своего теченія эта рѣка имѣла около 1880 года уклонъ  $0,0004^{\circ}_{\infty}$ .

Среднїй уклонъ р. *Камы* отъ с. Дедюхино до р. Чусовой, на длинѣ въ 210 верстъ составляетъ  $0,063^{\circ}_{\infty}$ ; на дальнѣйшемъ протяженїи до Волги среднїй уклонъ равенъ  $0,054$ .

На *Терекѣ*, отъ ст. Казбекъ до ст. Ларсъ (14½ верстъ, разность уровней достигаетъ 286 саж., что даетъ  $i = 39,5^{\circ}_{\infty}$ . Отъ ст. Ларсъ до Владикавказъ (41 вер.) разность уровней равна 188 саж., такъ что  $i = 9,15^{\circ}_{\infty}$ .

\*) Эти свѣдѣнїя для русскихъ рѣкъ замѣствуемъ главнымъ образомъ въ изданїяхъ М-ва Путей Сообщенія, въ такъ называемыхъ „Отчетахъ описанныхъ партїи“. Эти партїи начали работать въ 70-хъ годахъ прошлаго столѣтїя. Ихъ работы продолжаются и изданїя выходятъ въ свѣтъ и до сихъ поръ.

Оба истока *Рейна* до своего слияния имеют среднее падение около 24 ‰. От этого места до Боденского озера оно равно 1,83 ‰. Далее у Базеля  $i = 1 ‰$ ; у Страсбурга  $i = 0,59 ‰$ , около Шпейера оно падает до 0,18 ‰. Затѣмъ, отъ Майнца до Кельна падение измѣняется въ предѣлахъ отъ 0,5 до 0,125 ‰; подъ Кельномъ  $i = 0,2 ‰$ . Наконецъ, въ нижней части Рейна въ среднемъ  $i = 0,0835 ‰$ .

На рѣкѣ *Эльбѣ* течение въ австрійскихъ предѣлахъ происходитъ при среднемъ  $i = 3,125 ‰$ . Около Дрездена  $i = 0,25 ‰$ , около Магдебурга  $i = 0,2 ‰$ ; въ нижнемъ течении  $i = 0,11 ‰$ .

На нижнемъ течении р. *Вислы*, въ предѣлахъ Пруссіи, среднее падение равно 0,175 ‰.

Среднее падение на всемъ протяженіи *Дунай* въ 2780 *kmtr* равно 0,36 ‰.

Среднее падение на всемъ протяженіи р. *По* въ 672 *kmtr* равно 2,9 ‰, при чемъ въ верховьяхъ  $i = 34,5 ‰$ , въ среднемъ течении  $i = 2,86 ‰$ , и, наконецъ, въ низовьяхъ частяхъ среднее  $i = 0,2 ‰$ . Подобнымъ же образомъ:

Рѣка.	Среднее паденіе въ ‰			
	верхнее теченіе.	среднее теченіе.	нижнее теченіе	на всей длинѣ
<i>Тибръ</i> . . . . .	5,56	3,68	0,61	2,97
<i>Тичино</i> . . . . .	48,72	2,54	1,96	9,27
<i>Минчио</i> . . . . .	65,13	16,00	0,79	1,7

Чтобы имѣть возможность примѣнять здѣсь уравненіе Д. Бернулли, подобно тому, какъ и въ трубахъ, считавъ, что жидкость течетъ въ каналѣ параллельными струйками съ одною, общою для всѣхъ точекъ сѣченія, *среднею скоростью*  $v$ , которая опредѣляется по расходу  $Q$  или по действительной скорости  $u$ , въ каждомъ элементѣ  $df$  живого сѣченія, формулой:

$$Q = \frac{Q}{F} = \frac{\sum df \cdot u}{F} \dots \dots \dots (1)$$

Ошибки, связанныя съ введеніемъ средней скорости, очевидно, остаются тѣ же самыя, какія были указаны въ главѣ III.

Начнемъ съ разсмотрѣнія равномернаго установившагося движенія въ каналѣ, т.-е. такого движенія, для котораго скорость каждой точки, а, слѣдовательно, и средняя скорость, не зависятъ ни отъ времени, ни отъ пространства, а есть величина постоянная. Изъ уравненія неразрывности  $Q = Fv$  видно, что въ этомъ случаѣ живыя сѣченія вездѣ между собою равны. Примѣняя уравненіе Д. Бернулли для движенія отъ сѣченія *M* до сѣченія *N* (фиг. 178), получимъ:



Фиг. 178.

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z_2 + \eta \dots \dots \dots (2)$$

Понятно, что при предположенной параллельности струй давления въ центрахъ тяжести сѣченій можно выразить черезъ:

$$\frac{p_1}{\gamma} = x_1 + b,$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = x_2 + b,$$

гдѣ  $b$  есть высота, соответствующая атмосферному давленію.

Внося въ ур-е (2) эти значенія  $p_1$  и  $p_2$ , получаемъ:

$$v = x_1 + b - z_1 - v_2 = b - z_2 = (x_1 + z_1) - (x_2 + z_2) = h \quad \dots (3)$$

т.-е. все паденіе  $h$ , весь располагаемый напоръ тратится въ этомъ случаѣ на преодолѣніе вредныхъ сопротивленій ( $v_2$ ), главнымъ образомъ, на преодолѣніе тренія о стѣнку, подобно тому, какъ въ трубѣ постояннаго диаметра. Этого конечно, и слѣдовало ожидать, такъ какъ при равномерномъ движеніи работа движущей силы всегда равна работѣ сопротивленій.

Законы тренія въ жидкости были уже нами рассмотрѣны; мы приняли, что сила тренія прямо пропорциональна поверхности соприкосновенія жидкости со стѣнкой и зависитъ отъ скорости, а потому работа тренія на длинѣ потока  $L$ , отнесенная къ 1  $kg$  протекающей воды, выражается такъ

$$v_2 = h = \frac{\gamma \cdot O \cdot L \cdot f(v)}{\gamma \cdot F \cdot v} = \frac{O}{F} \cdot L \cdot f(v)$$

Группируя члены иначе, пишемъ:

$$\frac{h}{L} = \frac{F}{O} \cdot iR = f(v).$$

Такъ какъ, по экспериментальнымъ даннымъ, зависимость силы тренія отъ скорости очень близка къ пропорціональности второй степени скорости и такъ какъ по смыслу ур-ія функция  $f(v)$  должна быть линейной величиной, то удобно представить ее въ видѣ:

$$iR = f(v) = B \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (4)$$

гдѣ  $B$  есть нѣкоторый числовой коэффициентъ, который нужно опредѣлить изъ опыта. Опредѣляя  $v$  изъ (4), находимъ, что

$$v = c \sqrt{Ri} \dots \dots \dots (5)$$

гдѣ  $c$  есть нѣкоторый коэффициентъ, опредѣляемый изъ условия.

$$c = \sqrt{\frac{2g}{B}}$$

Уравнение (5), дающее связь между падением, средним радиусом и средней скоростью при равномерном движении, можно назвать *уравнением равномерного течения в каналах*. Оно называется также формулой *Шези*, так как этот автор первый предложил ее, еще в 1755 году. В формуле (5) легко узнаем ур-е (13) § 21 предыдущей главы.

Прежде чем излагать более точные сведения о значениях коэф-тов *B* и *c* в формуле Шези, отметим, что для *рѣкъ съ спокойнымъ течениемъ* и съ довольно большимъ среднимъ гидравлическимъ радиусомъ ( $R \sim 3 \text{ mtr}$ ) можно принять для коэф-та *c*, какъ первое приближеніе, значеніе, предложенное италянскимъ инженеромъ *Тадони*.  $c = 50$ . При малыхъ средних радиусахъ ( $R \sim 1 \text{ mtr}$ ) и также при покойномъ течени, лучше уменьшить *c* до 40 и меньше; наоборотъ, для большихъ рѣкъ ( $R \sim 10 \text{ mtr}$ ) надо увеличивать *c* до 56. Такъ, на рукавахъ Рейна въ Голландіи получено  $c = 50$ , на Дунаѣ подь Вѣной опредѣлилось  $c = 45$ ; на Миссури *c* доходить до 57. На Волгѣ наблюдения Самарской и Дубовской гидрометрическихъ станцій \*) (въ 1884—1890 годахъ) давали разныя значенія *c*, чаще всего въ предѣлахъ 52—54. Здѣсь приходилось имѣть дѣло съ живыми сѣченіями отъ 6 до 20 тысячъ квадратныхъ метровъ, съ ширинами рѣкъ отъ 1000 до 2500 *mtr*, со средними радиусами отъ 5 до 9 *mtr* и съ очень малыми уклонами, выражающимися 3-мя—4-мя сотыми долями промля. На Волговѣ находили также *c* отъ 46 до 54. Для быстрыхъ потоковъ въ каменистомъ ложѣ, съ большимъ падениемъ, а также въ сильно заросшихъ потокахъ значеніе *c* измѣняется въ предѣлахъ отъ 40 до 30. Такъ, на Рейнѣ подь Базелемъ найдено  $c = 41$ ; на Рейнѣ въ предѣлахъ Швейцаріи (до Боденскаго озера)  $c = 38$ ; на притокахъ верхней Луары  $c = 36$ ; на р. Аа, при среднемъ радиусѣ  $R = 0,594 \text{ mtr}$ , нашли  $c = 31,5$ ; наконецъ, на плохо содержимыхъ небольшихъ мельничныхъ подводящихъ каналахъ находили *c* даже до 19.

Приводимъ далѣе результаты болѣе точныхъ изслѣдованій. Многочисленныя наблюденія французскихъ инженеровъ *Дарси* (*Darcy*) и *Базена* (*Bazin*), произведенныя ими на оросительныхъ каналахъ въ Бургундіи, привели Базена къ выводу, что формула Дарси, данная имъ для трубъ (см ур-е 10 въ § 21), пригодна и для каналовъ. Именно, для коэф-та *B* въ ур-яхъ (4) и (5) Базенъ даетъ выраженіе:

$$B = 2g \left( \alpha + \frac{\beta}{R} \right) \dots \dots \dots (6)$$

такъ что коэф-тъ *c* въ формулѣ Шези выражается при формулѣ Базена такъ:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta}{R}}} \dots \dots \dots (6')$$

Главные наблюденія, лежащая въ основѣ этой формулы, относятся къ каналу 2 *mtr* шириною и въ 1 *mtr* глубиною, при паденіяхъ, измѣняющихся

\*) См. изданіе Министерствомъ Путей Сообщенія подъ редакціей Н. Коломйцева „Результаты наблюденій“ этихъ двухъ станцій. Самарской—въ 1899 году и Дубовской—1902 году.

въ пределахъ отъ 1 до 9‰. Существенный фактъ, впервые установленный этими наблюдениями \*), кромѣ предыдущей формулы, заключается въ томъ, что коэф-ты  $\alpha$  и  $\beta$  зависятъ отъ матеріала, изъ котораго выполнены стѣнки и дно канала, при чемъ большое влияние оказываетъ степень шероховатости стѣнокъ. Базель различаетъ четыре категории стѣнокъ; швейцарскіе инженеры Гангилье и Куттеръ, на основаніи наблюдений надъ швейцарскими рѣками, добавили еще пятую категорию наибольшей шероховатости. Значенія коэф-товъ  $\alpha$  и  $\beta$  для разныхъ категорий приведены въ слѣдующей таблицѣ 41:

Таблица 41 \*\*)   
 къ формулѣ Базеля (6).

№	Характеръ стѣнки.	$\alpha$	$\beta$
1	Очень гладкія стѣнки (строганыя доски, цементная штукатурка) . . . . .	0,00015	0,0000045
2	Гладкія стѣнки (нестроганыя доски, кирпичная кладка, кладка изъ тесанаго камня) . . . . .	0,00019	0,0000133
3	Негладкія стѣнки (бутовая кладка) . . . . .	0,00024	0,00006
4	Земляныя стѣнки . . . . .	0,00028	0,00035
5	Каменистое русло . . . . .	0,0004	0,0007

Вычисленные согласно съ этимъ значенія коэф-та  $c$  въ формулѣ Шези приведены въ таблицѣ 42.

Таблица 42.   
 Значенія коэф-та  $c$  по Базелю.

Средній радиусъ $R$ въ <i>mtr</i>	№№ категорий по таблицѣ 41.				
	1	2	3	4	5
0,05	65	47	26	—	—
0,10	72	56	35	16	12
0,15	75	60	40	20	15
0,20	76	62	43	22	17
0,25	77	64	46	24	19
0,30	78	65	48	26	20
0,35	78	66	49	28	21
0,40	79	67	51	29	22
0,50	79	68	53	32	24
0,60	80	69	54	34	25

\*) Работа Базеля, одобренная французской Академіей Наукъ, появилась въ 1865 году подъ заглавіемъ „Recherches hydrauliques, entreprises par M. H. Darcy, continuées par M. H. Bazin“.

\*\*) При опредѣленія отверстій для желѣзнодорожныхъ мостовъ на нашихъ дорогахъ приняты коэффициенты  $\alpha = 0,0005974$  и  $\beta = 0,00035$ . См. по этому поводу мою замѣтку „Новыя уравненія Базеля“ въ Бюллетеняхъ Политехническаго Общества за 1900 годъ № 4. Оказывается, что эти коэф-ты, избыточно надежныя для отверстій со среднимъ радиусомъ больше 1,2 *mtr*, уже недостаточны для меньшихъ радиусовъ, приводя къ большимъ скоростямъ, нежели наблюдавшимся въ соответствующихъ условияхъ.

**Таблица 42 (продолженіе).**

Значенія коэф-та *c* по Базену.

Средній радіусъ <i>R</i> въ <i>mts</i>	№№ категорій по таблицѣ 41.				
	1	2	3	4	5
0,70	80	69	55	36	27
0,80	80	70	56	37	28
1,00	80	70	58	40	30
1,50	81	71	60	44	34
2,00	81	71	61	47	37
2,50	81	72	61	49	39
3,00	81	72	62	50	40
4,00	81	72	63	52	42
5,00	81	72	63	54	43
10,00	81	72	64	56	46

Изъ этой таблицы видно, какое существенное значеніе имѣеть степень шероховатости. Напримѣръ при *R* = 0,5 *mts* коэф-тъ *c* измѣняется отъ 79 до 24.

Вторая очень распространенная формула дана въ 1869 году уже упомянутыми инженерами *Ganquillet* и *Kutter*.

Они сочли нужнымъ поставить коэффициентъ *c* въ уравненіи (5) въ зависимость не только отъ *R* и отъ степени шероховатости, но и отъ паденія *i*; именно, формулу Шези они дополняютъ ур-немъ.

$$c = \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \sqrt{R}} \quad (7)$$

Коэффициентамъ  $\alpha$  и  $\beta$  они даютъ постоянныя значенія, именно  $\alpha = 23$ ,  $\beta = 0,00155$ ; коэффициенту же  $n$ , характеризующему степень шероховатости, даютъ одно изъ слѣдующихъ значеній:

№	Характеръ стѣнки.	$n$	$i$
1	Очень гладкія стѣнки каналовъ (строганыя доски, цементная штукатурка) . . . . .	0,010	100
2	Гладкія стѣнки каналовъ (тесовая кладка, кирпичь, нестроганыя доски и т. п.) . . . . .	0,013	77
3	Неглазкія стѣнки (бутовая кладка) . . . . .	0,017	58
4	Очень грубая бутовая кладка . . . . .	0,020	50
5	Рѣки и каналы съ земляными стѣнками . . . . .	0,025	40
6	Тоже съ булыжникомъ или водорослями . . . . .	0,030	33
7	Тоже съ неперпендикулярными стѣнками и въ плохомъ состояніи . . . . .	0,035	25
8	Тоже въ очень плохомъ состояніи . . . . .	0,040	20

Пользованіе формулами Гангилье и Куттера облегчается таблицей 43, дающей значенія *c* для разныхъ  $n$ ,  $i$  и *R*.



Таблица 43 (Ganguillet et Kutler).

Значения коэф-та  $c$  въ формулѣ  $c = c_1 R_1$ .

Значения коэф-та $c$	Средній радіусъ $R$ въ <i>mt</i> r	Угловы $\alpha$ въ промѣяхъ.						
		0,05	0,05	0,1	0,2	0,4	1,0	10
0,10 Очень гладкія стѣнки.	0,5	38	44	51	54	66	77	85
	0,10	41	56	61	65	68	70	71
	0,20	61	70	74	77	78	79	80
	0,30	72	77	81	84	85	86	86
	0,50	83	86	88	90	91	91	91
	1,00	100	100	100	100	100	100	100
	2,00	115	111	109	107	106	105	105
	3,00	124	117	115	111	110	109	108
	5,00	134	123	118	114	113	112	111
	15,00	151	135	125	121	118	117	116
0,013 Гладкая стѣнка	0,05	28	31	35	38	40	41	42
	0,10	36	40	44	47	49	50	51
	0,20	46	50	55	56	58	59	59
	0,30	55	57	60	63	64	64	65
	0,50	62	65	67	69	69	70	70
	1,00	77	77	77	77	77	77	77
	2,00	90	87	85	84	83	82	82
	3,00	99	94	91	88	87	86	85
	5,00	108	100	93	91	90	89	88
	15,00	125	114	102	98	96	94	92
0,017 Шероховатая стѣнка.	0,05	19	22	24	26	28	29	29
	0,10	25	29	32	34	35	36	36
	0,20	34	37	39	41	42	42	43
	0,30	40	45	48	46	47	47	48
	0,50	47	49	50	51	51	52	52
	1,00	58	58	58	58	58	58	58
	2,00	71	69	67	66	65	64	64
	3,00	78	74	71	70	69	68	68
	5,00	87	79	75	73	72	71	71
	15,00	105	90	84	79	77	76	75
0,020 Болѣе шерохо- ватая стѣнка	0,05	15	18	20	21	23	23	24
	0,10	21	23	25	28	29	29	30
	0,20	28	30	32	34	35	36	36
	0,30	33	35	37	38	39	40	40
	0,50	40	41	42	43	43	44	44
	1,00	50	50	50	50	50	50	50
	2,00	61	59	57	56	55	55	55
	3,00	69	64	61	60	59	58	58
	5,00	76	70	66	63	62	61	61
	15,00	94	81	74	70	68	67	66

**Таблица 43 (Ganguillet et Kutter).**

Значения коэф-та  $c$  въ формулѣ  $v = c\sqrt{Ri}$ .

(Продолженіе).

Значенія коэф-та »	Средній радіусъ <i>R</i> въ <i>mtr</i>	Уклоны $i$ въ промилляхъ						
		0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	1,0	10
Земляныя стѣнки	0,05	12	13	15	16	17	18	18
	0,10	17	18	19	20	21	22	22
	0,20	22	23	24	25	26	27	27
	0,30	26	28	29	30	30	31	31
	0,50	31	32	33	34	34	35	35
	1,00	40	40	40	40	40	40	40
	2,00	50	48	47	46	45	45	45
	3,00	56	53	51	49	48	48	47
	5,00	64	59	54	53	52	51	50
	15,00	81	71	63	59	57	56	55
Каменистое русло.	0,05	10	11	12	13	13	14	14
	0,10	13	14	15	16	17	18	18
	0,20	18	19	19	20	21	22	22
	0,30	21	22	23	24	24	25	25
	0,50	25	26	27	27	28	29	29
	1,00	33	33	33	33	33	33	33
	2,00	42	41	40	40	39	38	38
	3,00	48	45	43	42	42	41	41
	5,00	56	51	47	45	44	43	43
	15,00	72	62	55	52	51	49	48
Неправильныя стѣнки	0,05	8	9	9	10	10	11	11
	0,10	11	12	12	13	13	14	14
	0,20	15	16	16	17	17	18	18
	0,30	18	19	19	20	20	21	21
	0,50	22	23	23	23	24	24	24
	1,00	29	29	29	29	29	29	29
	2,00	36	35	34	34	33	33	33
	3,00	42	40	38	37	36	36	36
	5,00	49	45	43	42	41	40	39
	15,00	65	56	51	47	45	44	43
Очень неправильныя стѣнки.	0,05	6	7	7	8	8	9	9
	0,10	9	10	11	11	12	12	12
	0,20	13	14	14	15	15	16	16
	0,30	15	16	17	18	18	18	18
	0,50	19	19	20	20	21	21	21
	1,00	25	25	25	25	25	25	25
	2,00	32	31	31	30	30	29	29
	3,00	37	35	34	33	33	32	32
	5,00	44	41	39	38	37	36	35
	15,00	59	52	46	43	42	41	40

Нельзя сказать, чтобы объ эти формулы не оставили желать лучшего. По отношению къ формулѣ Базена (6) можно поставить слѣдующія возраженія: 1) для разныхъ степеней шероховатости коэффициентъ  $B$  изменяется влѣдствие измѣненія коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ ; но эти послѣдніе измѣняются не одинаково и, повидимому, совершенно произвольно: переходя отъ 1-й категории къ 5-й, мы видимъ, что  $\alpha$  увеличивается въ  $0,00040 : 0,00015 = 2,66$  раза, тогда какъ  $\beta$  увеличивается въ  $0,0007000 : 0,0000045 = 155$  разъ. 2) При очень большихъ среднихъ радиусахъ  $R$ , когда, казалось бы, состояние стѣнки можно влечь мало, коэффициентъ  $B$  стремится къ разнымъ значеніямъ при  $R \rightarrow \infty$  имѣемъ  $B \rightarrow \alpha$ , которое измѣняется со степенью шероховатости).

Формулѣ (7) Ganguillet и Kutter'a слѣдуетъ поставить слѣдующія возраженія; предварительно, однако, ради удобства выводовъ, напишемъ ее въ иной формѣ. Обозначимъ въ уравненіи (7) буквою  $K$  сумму членовъ

$$K = \alpha + \frac{\beta}{i};$$

очевидно, съ увеличеніемъ уклона величина  $K$  уменьшается. Тогда уравненіе (7) принимаетъ видъ:

$$c = \frac{K}{1 - \frac{1}{R}}$$

Отсюда получаемъ:

$$\frac{1}{nc} = \frac{1}{1 - \frac{1}{R}} \cdot \frac{Kn}{K}$$

и окончательно

$$\frac{1}{nc} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{R}} \left( \frac{1}{K} - 1 \right) \dots \dots \dots (7')$$

Отсюда видно, что 1) съ увеличеніемъ  $R$  коэффициентъ  $c$  стремится къ разнымъ значеніямъ (при  $R \rightarrow \infty$  получимъ  $c = \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{1}{K} \right)$  въ зависимости отъ степени шероховатости, 2) при  $R < 1 \text{ mtr}$  вторая часть положительна, а такъ какъ съ увеличеніемъ  $i$  величина  $K$  уменьшается, то уменьшается и вся вторая часть, оставаясь положительной: это вызоветъ увеличение  $c$ . Наоборотъ, увеличение  $i$ , при  $R > 1 \text{ mtr}$ , вызоветъ уменьшеніе абсолютной величины отрицательной второй части, отчего  $c$  уменьшается. Наконецъ, при  $R = 1 \text{ mtr}$ , величина  $c$  перестаетъ зависеть отъ уклона. Эту зависимость удобно также прослѣдить по таблицѣ 43. Это показываетъ, что влияние уклона на величину  $c$  оценено, по крайней мѣрѣ, странно.

Въ 1897 году Базенъ предложилъ новую формулу, въ которой онъ стремится устранить эти недостатки, сохраняя за формулой возможно простей видъ. Именно, коэф-тъ  $c$  въ формулѣ Шези онъ опредѣляетъ ур-іемъ.

$$\frac{1}{c} = 0,0115 \left( 1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}} \right) \dots \dots \dots (8)$$

Со степенью шероховатости здѣсь мѣняется только одинъ коэффициентъ  $\gamma$ , уклонъ же признается вовсе не влияющимъ на величину  $c$ . При увеличеніи  $R$  коэффициентъ  $c$  стремится къ значенію  $c = 87$  независимо отъ степени шероховатости. Значенія коэффициента  $\gamma$  слѣдующія:

№	Характеръ стѣнки.	Значенія $\gamma$
1	Гладкая цементная штукатурка, строганная доска и т. п.,—вообще, <i>очень гладкія стѣнки</i> . . . . .	0,06
2	Нестроганная доска, кладка изъ теснаго камня, изъ кирпича и т. п.—вообще, <i>гладкія стѣнки</i> . . . . .	0,16
3	<i>Бутовая кладка</i> . . . . .	0,46
4	<i>Промежуточная камерная</i> : стѣнки въ очень плотномъ и чисто осыпномъ земляномъ грунтѣ; стѣнки, вымощенныя мелкимъ булыжникомъ, стѣнки, болѣе или менѣе чисто выстѣпаны въ скалы и т. п. . . . .	0,85
5	<i>Земляныя стѣнки</i> въ обычномъ состояніи, мало зарѣсши, вымощены некрупнымъ булыжникомъ и т. п. . . . .	1,30
6	Стѣнки, <i>окаймляющія особенно сильно сопряженіе</i> (обильныя водоросли, крупная глина, на хая кладка скалистыя цѣп. и т. п.) . . . . .	1,75

При составленіи этой формулы Базенъ пользовался болѣе обширнымъ экспериментальнымъ матеріаломъ, нежели Гангилье и Куттеръ: онъ пользовался 430 наблюденіями, изъ которыхъ болѣе половины (260) были сдѣланы послѣ 1870 года въ разныхъ мѣстахъ земного шара надъ каналами и рѣками

Формулу Базена (8), равно какъ и формулу Гангилье и Куттера, удобно представить графически, если за независимое переменное  $x$  принять въ обѣихъ формулахъ величину  $\frac{1}{R}$ , а за зависимое переменное  $y$  принять величину  $\frac{1}{c}$ . Тогда уравненіе Базена будетъ имѣть видъ:

$$y = 0,0115(1 - \gamma r) \dots \dots \dots (8')$$

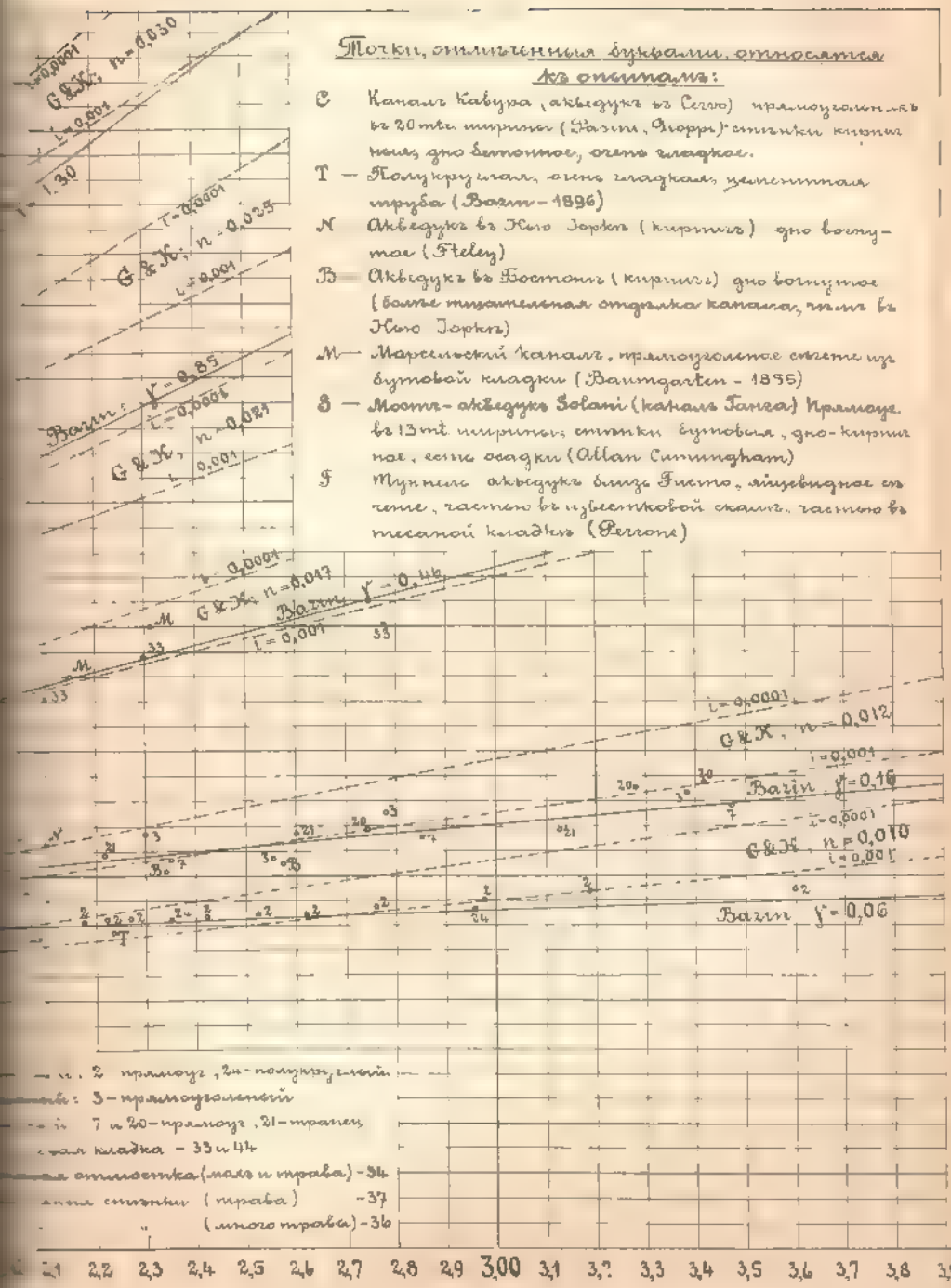
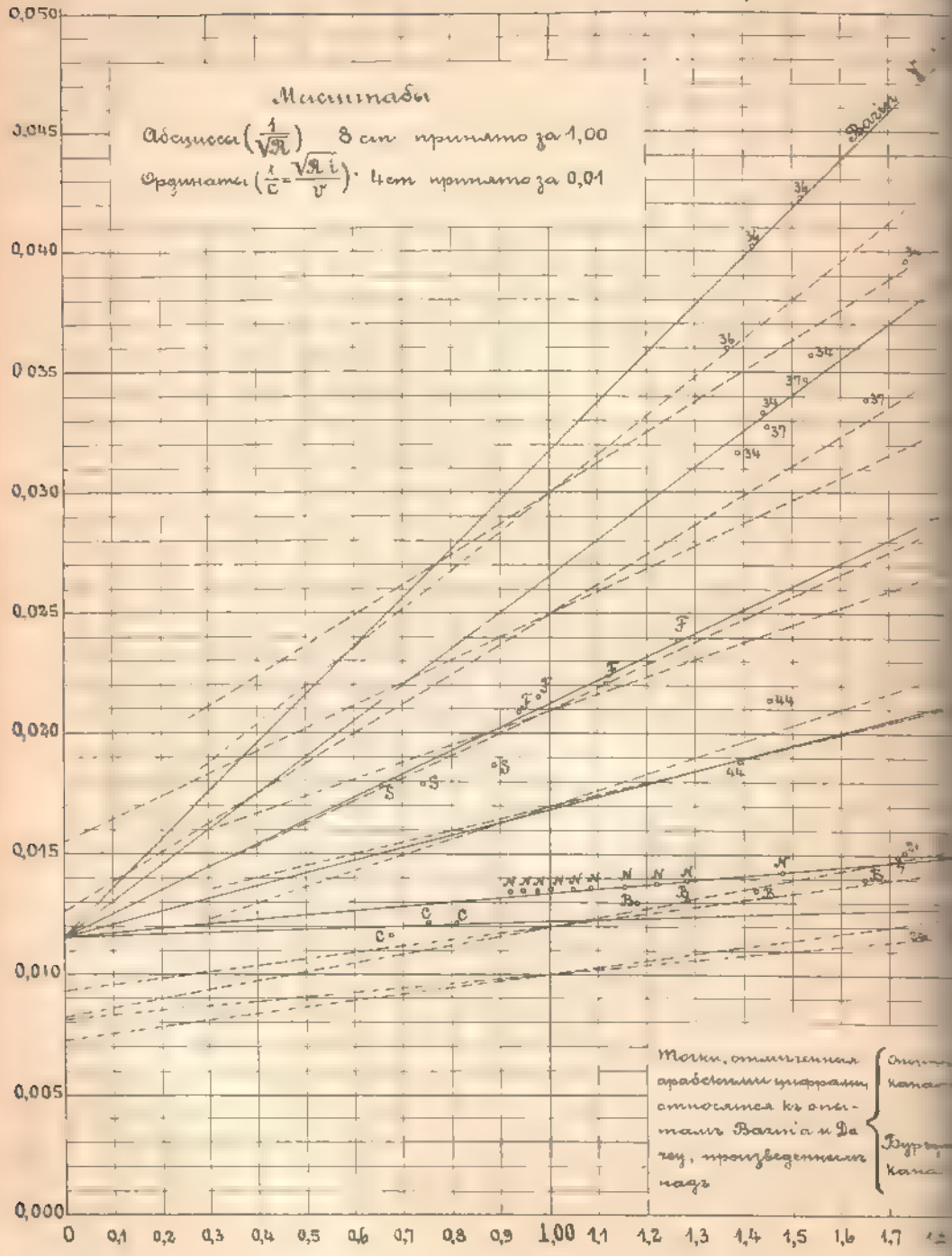
а уравненіе Гангилье и Куттера:

$$y = n + \frac{Kn^2}{1 + Kn}(x - 1) \dots \dots \dots (7'')$$

Очевидно, что уравненіе (8') есть уравненіе пучка прямыхъ, пересекающихся въ одной точкѣ (назовемъ ее центромъ пучка) и различно наклоненныхъ къ оси  $c$ -овъ, въ зависимости отъ величины  $\gamma$ , угла наклона ихъ  $\varphi$  опредѣляется уравненіемъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = 0,0115 \gamma.$$

# Формулы Гангиле и Куттера и новая



Центръ этого пучка лежитъ въ точкѣ  $x_0 = 0; y_0 = 0,0115$  (см. табл. VII).

Ур-е (7'') для каждаго отдельнаго значенія  $n$  также представляетъ собою ур-е пучка прямыхъ (угловъ отдельныхъ прямыхъ зависятъ здѣсь отъ множителя  $K$ ); центръ каждаго пучка находится въ точкѣ  $(x_0 - 1; y_0 - n)$ . Очевидно, что центры всѣхъ пучковъ расположены на одной и той же ординатѣ  $(x_0 - 1)$ , но значенія ординатъ этихъ центровъ различны въ зависимости отъ разныхъ степеней шероховатости. На табл. VII изъ этихъ пучковъ для каждаго  $n$  нанесены пунктирными линиями только прямыя, соответствующія значеніямъ  $i = 1''$ , и  $i = 0,1''$ . Каждый такой пучокъ отмѣченъ на чертежѣ буквами **G & K**. Легко, конечно, провести прямую, соответствующую всякому другому значенію  $n$  и  $i$ .

Одного взгляда на чертежъ достаточно, чтобы видѣть, что обѣ формулы даютъ разные значенія  $c$ . Разница мѣньше всего для третьей категории Базена. Эта прямая почти цѣликомъ лежитъ внутри пучка **G & K**, соответствующаго  $n = 0,017$ .

Для сравненія съ экспериментальными данными на таблицѣ нанесено нѣсколько точекъ, представляющихъ своею абсциссою величину  $\frac{1}{R}$ , а ординатой — величину  $\frac{1}{c} = \frac{1}{R}$ , полученные изъ опыта. Нельзя, конечно, ожидать, чтобы такія точки лежали какъ разъ на соответствующихъ прямыхъ Базена, такъ какъ  $\gamma$  для всякой прямой есть величина вполне определенная, тогда какъ степень шероховатости даже въ одномъ и томъ же каналѣ измѣняется со временемъ (осадки, водоросли) и сильно зависитъ отъ качества работы. Хорошимъ тому примѣромъ могутъ служить акведуки Бостона и Нью-Йорка, имѣющие почти одинаковые размѣры, выполненные по проекту одного и того же инженера и испытанные тоже однимъ и тѣмъ же щитомъ. Точки перваго (**B**) лежатъ ниже прямой  $\gamma = 0,16$ , а точки втораго (**N**) нѣсколько выше ея. Испытатель объясняетъ это только тѣмъ, что въ Бостонѣ швы кладки канала были тщательно расшиты, тогда какъ въ Нью-Йоркѣ даже не были смыты потоки раствора поверхностной промывкой помощью щетки онъ получалъ въ Нью-Йоркѣ увеличение расхода на  $2\frac{1}{2}\%$ .

Если въ каналахъ такъ велико влияние состоянія стѣнокъ изъ твердыхъ строительныхъ материаловъ, то тѣмъ болѣе легко понять причину того, почему точки 34, 36, 37 уже такъ рѣзко отступаютъ отъ прямыхъ Базена. Вообще, можно сказать, что никакая формула не можетъ дать точнаго результата, такъ какъ, конечно, разнообразіе состояній бесконечно. Мы получили бы особенно большое разногласіе формулы съ дѣйствительностью, если бы нанесли на таблицу наблюдения надъ рѣками: часть таблицы, заключенная между абсциссами 0,2 и 1,0 и ординатами 0,015 и 0,025, покрылась бы совершенно безпорядочной массой точекъ, не подходящихъ ни къ прямымъ Базена, ни къ прямымъ **G & K**.

Не безъ влияния на величину  $c$  остается и видъ профиля, что особенно ясно въ точкахъ 24 и *Td*, которые относятся къ полукруглымъ сѣченіямъ: почти всѣ онѣ лежатъ ниже прямой Базена, такъ что можно думать, что

круглый профиль менее стѣсняетъ истечение, чѣмъ всякій другой. Для полукруглыхъ каналовъ съ очень гладкими стѣнками можно пользоваться конечно также таблицей Н. Smith'a, приведенной въ главѣ о трубахъ, его графикомъ табл. V, формулой Кристиана и вообще данными о сопротивленіи тренія въ трубахъ.

Приведенной графической таблицей Базена (табл. VII) можно пользоваться на ряду съ нижеприводимой числовой таблицей 44, вычисленной по формулѣ (8). (См. табл. 44 на стр. 345—346.)

Въ заключеніе этого параграфа отмѣтимъ еще разъ, что ни величина  $u$  въ формулѣ Базена, ни величина  $n$  въ формулѣ Ganguillet и Kutter'a не представляются опредѣленными вполне; во всякомъ частномъ случаѣ ихъ нужно оцѣнивать съ большей или меньшей степенью вѣроятности въ зависимости отъ мѣстныхъ условій.

### § 31. Распредѣленіе скоростей въ сѣченіи канала.

Знать среднюю скорость потока, вообще, весьма важно. При малыхъ потокахъ ее можно опредѣлить непосредственнымъ измѣреніемъ расхода, напр., помощью водослива, и живого сѣченія. При большихъ потокахъ можно измѣрять живое сѣченіе и скорости въ отдѣльныхъ его точкахъ помощью особыхъ приборовъ, о которыхъ будетъ сказано ниже; это составляетъ весьма кропотливую и дорогую работу. Поэтому желательно имѣть простую связь между среднею скоростью и какою-нибудь скоростью, которую удобно измѣрять, или, вообще говоря, желательно знать, какъ распредѣляются скорости по сѣченію.

Вообще естественно предположить, что съ наибольшею скоростью должна идти струйка на поверхности воды надъ наиболѣе глубокимъ мѣстомъ, такъ какъ такая струйка наименѣе испытываетъ замедляющее дѣйствіе стѣнокъ. Между тѣмъ въ дѣйствительности этого не наблюдается: изъ массы наблюдений только очень немногія подтверждаютъ это предположеніе; и, наоборотъ, максимальную скорость  $U_{max}$  находили обыкновенно у струйки, идущей на нѣкоторой глубинѣ подъ свободной поверхностью (приблизительно на  $\frac{1}{3}$  глубины). Несомнѣнно, что въ этомъ явленіи треніе о воздухъ, могущее оказывать извѣстное вліяніе, играетъ лишь второстепенную роль, ибо въ противномъ случаѣ при вѣтрѣ, дующемъ по теченію со скоростью, хотя бы равной скорости движенія воды, наибольшая скорость  $U_{max}$  должна бы наблюдаться на поверхности, а между тѣмъ этого вѣтъ даже и при большихъ скоростяхъ вѣтра. Правильнѣе всего это обстоятельство приписать отсутствію твердой направляющей стѣнки, вслѣдствіе чего живое сѣченіе не сохраняетъ постоянной величины и вида, и такимъ образомъ представляется полная возможность развиться разнымъ случайнымъ неправильнымъ теченіямъ; на нихъ тратится, конечно, извѣстный запасъ живой силы, отчего скорость поступательнаго движенія замедляется.

Вопросомъ о распредѣленіи скоростей больше всего занимался Базенъ; заключенія, къ которымъ онъ пришелъ, подтверждаются изслѣдованіями ряда другихъ наблюдателей, изъ которыхъ особенно надо отмѣтить, въ виду вы-

Таблица 44.

Значения коэф-та  $\sigma = \frac{v}{1.4K}$  в новой формуле Базена (8).

Средний радиус <i>R</i> вь <i>мтр</i>	П р и ; равномь					
	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,05	68,5	50,7	28,4	18,1	12,8	9,9
0,06	69,8	52,6	30,2	19,4	13,8	10,7
0,07	70,9	54,2	31,7	20,6	14,7	11,4
0,08	71,8	55,6	33,1	21,7	15,5	12,1
0,09	72,5	56,7	34,4	22,7	16,3	12,7
0,10	73,1	57,7	35,5	23,6	17,0	13,3
0,11	73,6	58,7	36,5	24,4	17,7	13,9
0,12	74,1	59,5	37,4	25,2	18,3	14,4
0,13	74,6	60,2	38,2	25,9	18,9	14,9
0,14	75,0	60,9	39,0	26,7	19,4	15,3
0,15	75,3	61,5	39,7	27,2	19,9	15,8
0,16	75,6	62,1	40,3	27,8	20,4	16,2
0,17	75,9	62,7	41,2	28,4	20,9	16,6
0,18	76,2	63,2	41,8	29,0	21,4	17,0
0,19	76,5	63,6	42,4	29,5	21,8	17,3
0,20	76,7	64,1	42,9	30,0	22,3	17,7
0,21	76,9	64,5	43,5	30,5	22,7	18,1
0,22	77,1	64,9	44,0	30,9	23,1	18,4
0,23	77,3	65,2	44,4	31,4	23,4	18,7
0,24	77,5	65,5	44,8	31,8	23,8	19,0
0,25	77,6	65,9	45,3	32,2	24,2	19,3
0,26	77,8	66,2	45,7	32,6	24,5	19,6
0,27	78,0	66,5	46,1	33,0	24,8	19,9
0,28	78,1	66,8	46,5	33,4	25,2	20,2
0,29	78,3	67,0	46,9	33,7	25,5	20,5
0,30	78,4	67,3	47,3	34,1	25,8	20,7
0,31	78,5	67,6	47,6	34,3	26,1	21,0
0,32	78,6	67,8	47,9	34,7	26,4	21,2
0,33	78,8	68,0	48,2	35,1	26,7	21,5
0,34	78,9	68,2	48,5	35,4	26,9	21,7
0,35	79,0	68,4	48,8	35,7	27,2	22,0
0,36	79,1	68,6	49,2	36,0	27,5	22,2
0,37	79,2	68,8	49,5	36,3	27,7	22,4
0,38	79,2	69,0	49,8	36,6	28,0	22,7
0,39	79,3	69,2	50,1	36,8	28,2	22,9
0,40	79,4	69,4	50,4	37,1	28,5	23,1
0,41	79,5	69,6	50,6	37,4	28,7	23,4
0,42	79,6	69,7	50,9	37,6	28,9	23,6
0,43	79,7	69,9	51,1	37,9	29,2	23,7
0,44	79,7	70,1	51,4	38,1	29,4	23,9
0,45	79,8	70,2	51,6	38,4	29,6	24,1
0,46	79,9	70,4	51,8	38,6	29,8	24,3
0,47	80,0	70,5	52,0	38,8	30,0	24,5
0,48	80,0	70,6	52,3	39,1	30,2	24,7
0,49	80,1	70,8	52,5	39,3	30,4	24,8

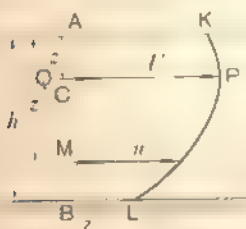


Таблица 44 (продолжение).

Средний радиус <i>R</i> в мтр	П р и у равнокъ					
	0,06	0,16	0,46	0,85	1,30	1,75
0,50	50,9	70,9	52,7	39,5	30,6	25,0
0,55	50,4	71,1	53,7	40,5	31,6	25,9
0,60	50,7	72,1	54,6	41,4	32,5	26,7
0,65	50,9	72,9	55,4	42,3	33,3	27,4
0,70	51,1	73,0	56,1	43,1	34,1	28,1
0,75	51,3	73,4	56,8	43,9	34,8	28,8
0,80	51,5	73,8	57,4	44,6	35,5	29,4
0,85	51,7	74,1	58,0	45,2	36,1	30,0
0,90	51,8	74,4	58,6	45,9	36,7	30,6
0,95	51,9	74,7	59,1	46,5	37,3	31,1
1,00	52,0	75,0	59,6	47,0	37,8	31,6
1,10	52,2	75,4	60,5	48,0	38,8	32,6
1,20	52,4	75,9	61,3	48,9	39,7	33,5
1,30	52,6	76,3	62,0	49,8	40,6	34,3
1,40	52,8	76,7	62,6	50,6	41,4	35,1
1,50	52,9	76,9	63,2	51,3	42,2	35,8
1,60	53,0	77,1	63,8	52,0	42,9	36,5
1,70	53,1	77,5	64,3	52,6	43,6	37,1
1,80	53,2	77,7	64,8	53,2	44,2	37,7
1,90	53,3	77,9	65,2	53,8	44,8	38,3
2,00	53,4	78,1	65,6	54,3	45,3	38,9
2,20	53,5	78,5	66,4	55,3	46,4	39,9
2,40	53,7	78,8	67,1	56,2	47,3	40,8
2,60	53,8	79,1	67,7	57,0	48,1	41,7
2,80	53,9	79,4	68,2	57,7	48,9	42,5
3,00	54,0	79,6	68,7	58,3	49,7	43,3
3,20	54,1	79,8	69,2	58,9	50,4	44,0
3,40	54,2	80,0	69,6	59,5	51,0	44,6
3,60	54,3	80,1	70,0	60,1	51,6	45,2
3,80	54,4	80,4	70,4	60,6	52,2	45,8
4,00	54,4	80,5	70,7	61,0	52,7	46,4
4,50	54,5	80,9	71,5	62,1	53,9	47,6
5,00	54,7	81,1	72,1	63,0	55,0	48,8
5,50	54,7	81,4	72,7	63,8	56,0	49,8
6,00	54,9	81,6	73,2	64,6	56,8	50,7
6,50	55,0	81,8	73,7	65,2	57,6	51,6
7,00	55,0	82,0	74,1	65,8	58,3	52,3
7,50	55,1	82,2	74,5	66,4	58,9	53,0
8,00	55,2	82,3	74,8	66,9	59,5	53,7
8,50	55,2	82,4	75,1	67,4	60,1	54,3
9,00	55,3	82,6	75,4	67,8	60,7	54,9
9,50	55,3	82,7	75,7	68,2	61,2	55,6
10,00	55,4	82,8	75,9	68,5	61,6	56,0
11,00	55,4	83,0	76,4	69,2	62,5	57,0
12,00	55,5	83,1	76,8	69,9	63,3	57,8
13,00	55,5	83,3	77,1	70,4	63,9	58,6
14,00	55,6	83,4	77,4	70,9	64,5	59,3
15,00	55,6	83,5	77,7	71,3	65,1	59,9
16,00	55,7	83,6	78,0	71,7	65,6	60,5
17,00	55,7	83,7	78,3	72,1	66,1	61,1
18,00	55,7	83,8	78,5	72,5	66,6	61,6
19,00	55,8	83,9	78,7	72,8	67,0	62,1
20,00	55,8	84,0	78,8	73,0	67,3	62,5

данных размеров исследованных ими потоковъ. *Humphrey* и *Abbot* (Мясепини) и *Allan Cunningham* (каналъ Ганга шириною въ 43 *mts* при *R* до 2,85 *mts*), и мы изложимъ теперь главнѣйше результаты наблюдений *Базена* и *Cunningham*'а.

Остановимся сперва на случаѣ широкаго канала съ прямоугольнымъ сѣченіемъ, при чемъ предположимъ, что ширина его *b* во много разъ больше глубины *h*. Законъ распределения скорости по вертикали *AB* въ такомъ каналѣ, можетъ быть, по *Базену*, представленъ пѣкоторой параболой *KL* (фиг. 179),



Фиг. 179.

при чемъ скорость *u* въ какой-нибудь точкѣ *M* на глубинѣ *z* отъ свободной поверхности выражается уравненіемъ:

$$u = U - \varphi(z - z_1)^2 \dots \dots \dots (9)$$

Гдѣ *U* есть максимальная скорость, принадлежащая частицѣ *C*, идущей на глубинѣ *z*. Уравненіе (9) есть уравненіе параболы съ осью *PQ*, параллельной свободной поверхности и лежащей на разстояніи *z = z<sub>1</sub>* отъ нея.

Дифференцируя по *z*, получаемъ,

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = 2\varphi(z - z_1) \dots \dots \dots (10)$$

На основаніи опытовъ *Базена*, можно принять

$$\varphi = \frac{l}{R^2} | R | \dots \dots \dots (11)$$

гдѣ *l* есть величина постоянная, равная, по *Базену*, 20. Если каналъ очень широкъ (размѣръ *b* великъ) по сравненію съ глубиною *h*, то въ выраженіи средняго радиуса  $R = \frac{bh}{b + 2h}$  можно въ знаменателѣ пренебречь величиной *b* передъ *b*; тогда получимъ приблизительно  $R \sim h$ , и въ этомъ случаѣ выраженіе (11) принимаетъ видъ:

$$\varphi = \frac{l}{h^2} | h | \dots \dots \dots (12)$$

Теперь формула *Базена* (9) принимаетъ видъ:

$$u = U - \frac{l}{h^2} | h | (z - z_1)^2 \dots \dots \dots (9')$$

Вообразимъ въ очень широкомъ каналѣ параллелепипедъ съ длиною (по теченію), равную единицѣ, и шириною (горизонтально поперекъ теченія), также равную единицѣ; высота же его по глубинѣ, пусть заключается между двумя горизонтальными плоскостями: одна изъ нихъ пусть лежитъ на глубинѣ

наибольшей скорости  $z_1$ , а другая—на какой-нибудь глубинѣ  $z$ . Легко подсчитать, что при этихъ данныхъ слагающая по движению отъ вѣса этого параллелепипеда есть  $\gamma i(z - z_1)$ , и эта сила будетъ единственной движущей силой для взятаго жидкаго элемента. Подсчитаемъ теперь силы сопротивлений, состоящая только изъ внутреннихъ треній, которыя могутъ проявить свое дѣйствіе на граняхъ, ограничивающихъ элементъ. Очевидно, что тренія на вертикальныхъ боковыхъ граняхъ и на верхней грани—нѣтъ, ибо, если сѣчение очень широко, то относительнаго перемѣщенія въ этихъ граняхъ нѣтъ; оно имѣется только на нижней грани, величина же его опредѣлится на основаніи того соображенія, что разъ движеніе въ каналѣ происходитъ равномерно, то между силами движущими и силами сопротивленія (въ данномъ случаѣ, силою тренія) должно существовать равенство. Потому сила тренія количественно выражается черезъ  $\gamma i(z - z_1)$ . Этому выраженію можно дать другой видъ, подставивъ сюда значеніе  $(z - z_1)$ , взятое изъ (10), и значеніе  $\varphi$ , взятое изъ (12). Послѣ этихъ подстановокъ найдемъ, что сила внутренняго тренія, приходящаяся на единицу площади соприкосновенія, равна:

$$\gamma i(z - z_1) = - \frac{\gamma}{2k} h \gamma h i \frac{du}{dz}.$$

При установившемся равномерномъ движениіи мы имѣемъ формулу Шези:

$$c = c\sqrt{Ri} \propto c\sqrt{hi};$$

въ такомъ случаѣ предыдущее выраженіе принимаетъ видъ:

$$- \frac{\gamma}{2k} h c \frac{\partial u}{\partial z} \dots \dots \dots (13)$$

Таково выраженіе силы внутренняго тренія въ очень широкомъ прямоугольномъ каналѣ, отнесенной къ единицѣ площади соприкосновенія.

(ъ другой стороны, если къ такому сѣченію (очень широкому прямоугольнику) примѣнить тѣ же соображенія, которыя были приведены на стр. 215 по поводу выраженія силы внутренняго тренія въ круглой трубѣ, то нужно признать, что: 1) она пропорціональна относительной скорости  $\frac{du}{dz}$ , 2) скорости  $u$  два  $u_0$ , 3)—среднему радиусу или, въ нашемъ случаѣ, глубинѣ  $h$ , 4) такъ какъ замедляющимъ дѣйствіемъ боковыхъ стѣнокъ мы пренебрегаемъ, то множителя, подобнаго  $\frac{R}{i}$  (вліяніе того, что толчки отъ стѣнки передаются все меньшимъ слоямъ) здѣсь не будетъ (всѣ слои предполагаются одинаковыми). Такимъ образомъ, сила внутренняго тренія можетъ быть выражена также черезъ:

$$Ahu_0 \frac{du}{dz}.$$

Сравнивая это выражение съ выраженіемъ (13), видимъ, что если положить  $A = \frac{\gamma}{2ck}$ , то оба выраженія по вѣшнему виду будутъ тождественны, съ тою лишь разницей, что вмѣсто скорости  $u_0$  у дна въ выраженіи (13) стоять средняя скорость по вертикали  $v$ . Изъ этого можно заключить, что ур-ня Базена (9) и (11) имѣютъ за собой и нѣкоторое теоретическое обоснованіе.

Перепишемъ формулу Базена (9) такъ:

$$u = U - \frac{k}{h^2} \int_0^z h(z - z_1)^2 dz = U - k \int_0^z \left( \frac{z}{h} - \frac{z_1}{h} \right)^2 dz = U - M(z - s_1)^2, \quad (9')$$

гдѣ коэффициентъ  $M$ , равный  $k \int_0^h h(z - z_1)^2 dz$ , есть, вообще, нѣкоторая скорость съ коэффициентомъ  $c$ , равнымъ  $h$  (это заключаемъ изъ сравненія выраженія  $k \int_0^z h(z - z_1)^2 dz$  съ правой частью ур-ня  $v = c \int_0^z h(z - z_1)^2 dz$ ), а  $z = \frac{z}{h}$  и  $s_1 = \frac{z_1}{h}$  суть относительныя глубины струекъ, текущихъ со скоростью  $u$  (которой соответствуетъ  $z$ ) и съ наибольшей скоростью  $U$  (ей соответствуетъ  $z_1$ ).

Очевидно, что средняя скорость по вертикали (а также и для всего вѣченія, если оно очень широко) выразится такъ:

$$v = \int_0^1 u dz = U - M \left[ \frac{1}{3} z^3 - z_1 z^2 - \frac{z_1^2 z}{2} \right]_0^1 = U - M \left( \frac{1}{3} - s_1(1 - 2s_1) - s_1^2 \right).$$

Исключая изъ этого ур-ня и ур-ня (9') величину  $U$ , найдемъ выраженіе скорости  $u$  любой точки по средней скорости  $v$ :

$$u = v + M \left( \frac{1}{3} - s_1(1 - 2s_1) - s_1^2 \right) - M(z^3 - 2z_1 z^2 + z_1^2 z) = v + M \left[ \frac{1}{3} - s_1(1 - 2s_1) - s_1^2 - z^3 + 2z_1 z^2 - z_1^2 z \right].$$

Положимъ  $z = \frac{3}{5}$ ; тогда скорость  $u_{\frac{3}{5}}$ , взятая на глубинѣ  $\frac{3}{5} h$  отъ свободной поверхности, выражается по средней скорости такъ:

$$u_{\frac{3}{5}} = v + M \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} s_1 - \frac{9}{25} \right) = v + \frac{1}{5} M \left( \frac{2}{15} + s_1 \right).$$

Относительно величины  $s_1$ , можно, вообще, на основаніи многихъ наблюдений, сказать, что она не больше  $\frac{1}{3}$ , часто меньше, т.е. наибольшая скорость въ очень широкихъ прямоугольныхъ каналахъ лежитъ примѣрно на одной трети глубины, считая отъ поверхности. Поэтому, считая  $s_1 = \frac{1}{3}$ ,

\* Это интегрированіе правильно постольку, поскольку для равныхъ вертикалей можно считать  $k = const$ . Допустимо это только при очень широкихъ каналахъ.

найдемъ, что скорость на  $\frac{3}{5}$  глубины,  $u_3$ , отличается отъ средней скорости  $v$  не больше, какъ на

$$-\frac{1}{5} \left( \frac{2}{15} - \frac{5}{15} \right) M = -\frac{M}{25}.$$

Такимъ образомъ, получаемъ, что  $u_3$  лишь немногимъ больше  $v$ . Поэтому, съ достаточной для практики точностью, можно считать, что въ сѣченіяхъ, очень широкихъ сравнительно съ глубиной, скорость на глубинѣ  $\frac{3}{5}$ , или 0,6 отъ свободной поверхности есть средняя. Спиннингхамъ, на основаніи своихъ наблюденій, для этой же глубины даетъ цифру  $\frac{1}{4}$ , или 0,25. Вообще, по Спиннингхаму, средняя скорость  $v$  на вертикали выражается такъ:

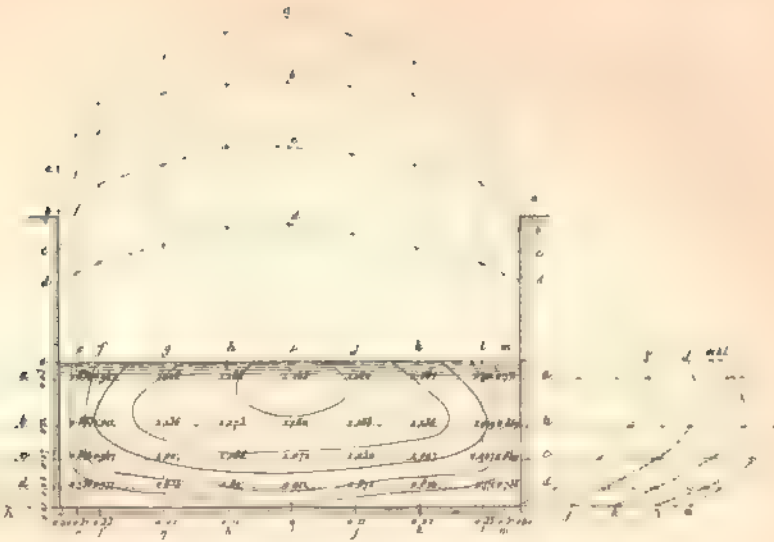
$$v = \frac{1}{4} (v_0 + 3v_1) = \frac{1}{6} (v_0 + 4v_1 + v_2) \dots \text{и т. д.}$$

гдѣ  $v_0$  есть скорость на поверхности,  $v_1$ —скорость у дна,  $v_2$ —скорость на серединѣ глубины и т. д.

Въ очень широкомъ прямоугольномъ каналѣ скорости на одной вертикали можно считать не отличающимися отъ соответствующихъ скоростей на всякой другой вертикали, взятой не слишкомъ близко къ боковой стѣнкѣ. Что же касается до каналовъ обыкновенныхъ размѣровъ, то картина измѣняется: распределеіе и величины скоростей на разныхъ вертикаляхъ различны, и возникаетъ вопросъ, какъ распределены скорости вдоль по горизонтальнымъ линіямъ сѣченія.

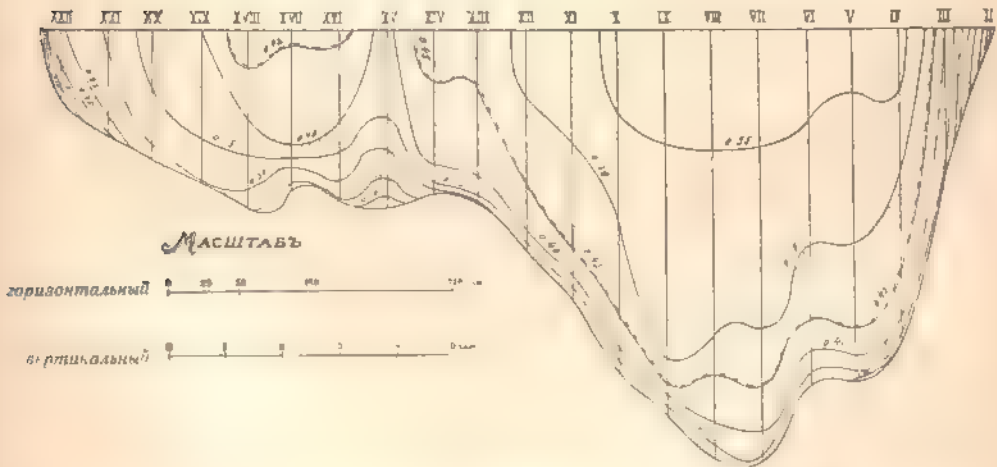
На табл. VIII представлено сѣченіе прямоугольнаго канала, изслѣдованнаго Базеномъ. Живое сѣченіе канала имѣло 0,8 0,25 *m/l*. Кривыя *aaa*, . . . , *ddd* представляютъ измѣненіе скоростей соответственно по горизонтальнымъ прямымъ *aa*, . . . , *dd*, взятымъ на разныхъ глубинахъ: онѣ построены такъ, что для кривой *aaa* осью абсциссъ служить горизонталь *aa*; для кривой *bbb*—горизонталь *bb* и т. д. Кривыя *ee*, *ff*, . . . , *mm* представляютъ измѣненіе скоростей по вертикалямъ *e*, *f*, . . . , *m*, при чемъ эти самыя вертикали служатъ осями для соответствующихъ кривыхъ. Плюсными линіями внутри профиля представлены кривыя, соединяющія точки, идущія съ одинаковыми скоростями; это такъ называемыя изотакхи или изодромы. Оказывается, что кривыя скоростей по горизонтали обращены всегда выпуклостью по теченію. Максимумъ скорости лежитъ около середины русла, минимумъ—у береговъ. По мѣрѣ приближенія къ берегамъ уменьшеніе скорости идетъ сначала медленно, потомъ быстро. На глубокихъ горизонталяхъ (*dd*) это сказывается менѣе рѣзко, чѣмъ вблизи поверхности. Форму этихъ кривыхъ распределеіи скоростей по горизонтали часто уподобляютъ параболамъ, оси которыхъ совпадаютъ съ направлениемъ теченія и лежатъ посрединѣ ширины канала.

Въ качествѣ примѣра распределеіи скорости въ сѣченіи рѣчки приводимъ на табл. VIII изотакхи, полученныя на Самарской гидрометриче-



Изотакси въ каналѣ прямоугольнаго сѣченія по наблюденіямъ  
Базена 17 марта 1858 года.

См. Recherches hydrauliques, entreprises par M. Darcy, continuées par M. Bazin.  
Paris, 1865, стр. 178 и таблица XVIII.



Живое сѣченіе Волги на Самарской гидрометрической станціи  
по опредѣленію 25 іюня 1888 года.

Отмѣтка уровня воды надъ уровнемъ Балтійскаго моря 9.28 саж.

Мѣстный уклонъ  $i = 0.000043$ .

Площадь живого сѣченія  $F' = 2240$  кв. саж. = 10191 *mt*<sup>2</sup>

Средній гидравлическій радіусъ  $R = 3.65$  саж. 7.775 *mt*

Наибольшая скорость въ сѣченіи  $V_{max} = 0.556$  саж сек. 1.184 *mt* sec.

Средняя скорость въ сѣченіи  $V = 0.451$  саж сек 0.960 *mt* sec.

Расходъ  $Q = 1009.9$  куб. саж./сек. = 9800 *mt*<sup>3</sup>/sec.

Коэффициентъ  $c = \frac{V}{\sqrt{Ri}} = \frac{0.451}{\sqrt{7.775 \cdot 0.000043}} = 52.3$ .

ской станции для расхода № 4, определеннаго 25 июня 1888 г. \*). Скорости измѣрялись на 21 вертикали. Изотакен проведены через каждыя 0,05 сажени. Точечнымъ пунктиромъ соединены точки, гдѣ наблюдались средня скорости для каждой отдѣльной вертикали. Пунктиромъ (черта съ точкой) обозначено геометрическое мѣсто точекъ съ скоростью, равной средней скорости всего сѣченія. По чертежу видно, что мѣстный перепадъ ливни дна примѣрно по серединѣ сѣченія вызвалъ какъ бы образование двухъ независимыхъ сѣченій, съ мѣстными значениями наибольшихъ скоростей. При профиляхъ такого характера это наблюдается не рѣдко, особенно при малой глубинѣ одной изъ частей профиля.

Если русло неправильное, то всякое мѣстное возвышеніе дна сказывается мѣстной вогнутостью на кривой скоростей, и, наоборотъ, углубленіе въ днѣ даетъ мѣстную выпуклость на этой кривой. Это нарушение плавности течения кривой становится тѣмъ рѣзче, чѣмъ меньше общая глубина живого сѣченія. Поэтому уравненія (9) и (11) можно примѣнить къ средней скорости всего сѣченія только тогда, когда каналъ очень широкъ; для каналовъ же обыкновенныхъ размѣровъ и тѣмъ болѣе для естественныхъ потоковъ, съ совершенно неправильнымъ русломъ, приведенныя формулы являются лишь грубо приближительными \*\*).

Если допустить, что въ прямоугольномъ каналѣ законъ распределенія скоростей по вертикали представляется ур-емъ (9) и что по горизонтали скорости измѣняются также по закону параболы, то можно поставить себѣ вопросъ, въ какихъ точкахъ живого сѣченія канала должны быть измѣрены скорости теченія съ тѣмъ, чтобы среднее арифметическое изъ этихъ измѣреній дало значение именно средней скорости всего сѣченія?

Рѣшимъ этотъ вопросъ сначала для весьма узкой вертикальной полосы, выдѣленной изъ живого сѣченія вдоль какой-нибудь его вертикали *OP* (фиг. 180). Кривая скорости пусть представляется въ данномъ случаѣ кривой *AB* и ур-емъ (9). Если ширина полосы есть *Ab*, то расходъ черезъ этотъ элементъ можно представить такъ:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta b \int_0^h u dz = \Delta b \int_0^h [U - \varphi(z - z_1)^2] dz \\ &= \Delta b \cdot b \left[ U - \varphi z_1^2 - 2\varphi \frac{h}{2} + \varphi \frac{h^2}{3} \right] \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

\*) Заимствуемъ чертень изъ „Результатовъ наблюдений гидрометрическихъ станцій на Волгѣ, Самарская станція“. Издано подъ редакціей Коломъцева. Москва, 1899 г.

\*\*\*) Необходимо добавить, что всѣ приведенныя данныя относятся къ открытому руслу и совершенно не примѣнимы къ каналамъ съ ледянымъ покровомъ. При послѣднемъ живое сѣченіе канала обращается изъ открытаго русла въ трубу съ разной степенью шероховатости стѣнокъ частей ея периметра. Распределеніе скорости видоизмѣняется и осложняется не только этимъ обстоятельствомъ, но также явленіями *оттока дна*, вымываемаго на Западной волгѣ *жульгой*, на Невѣ — *шорогомъ* и т. д., т. е. отдѣльными зацементированными частицами.

При этомъ ясно, что выраженіе  $\int_a^b u dz$  есть площадь, ограниченная дугой параболы  $AbdV$  и прямыми  $OA$ ,  $OP$  и  $PB$ . Какъ известно, такая площадь равна площади трапеции  $OMNP$ , сторона которой  $MN$  параллельна хордѣ  $AB$ , а разстояніе  $AM$  равно двумъ третямъ наибольшей стрѣлки разсматриваемой дуги, взятой въ направленія оси  $u$ . Пусть эта прямая  $MN$  пересѣкаетъ параболу въ точкахъ  $d$  и  $b$ , при этомъ отрезки оси ординатъ  $cP$  и  $aO$ , по свойству параболы, между собою равны; поэтому средняя линия трапеции равна полусуммѣ абсциссъ  $ab$  и  $cd$ , такъ что площадь  $OABP$  параболы можетъ быть представлена формулой:

$$S = h \frac{ab + cd}{2}.$$

Если назовемъ  $Oa = cP = ah$ , то соответствующія абсциссы по ур-ню (9) выразятся такъ:

$$\begin{aligned} ab &= U - \varphi(ah - z_1)^2, \\ cd &= U - \varphi(h - ah - z_1)^2. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, элементарный расходъ можно выразить формулой:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta b \int_a^b u dz = \Delta b \cdot S_{OABP} = \Delta b \cdot h \frac{ab + cd}{2} = \\ &= \Delta b \cdot \frac{h}{2} [2U - \varphi(ah - z_1)^2 - \varphi(h - ah - z_1)^2] = \\ &= \Delta b \cdot h [U - 0,5 \varphi h^2 - \varphi a^2 h^2 + \varphi ah^2 - \varphi z_1 h - \varphi z_1^2] \dots (B) \end{aligned}$$

Сравнивая выраженія (A) и (B) и производя всѣ сокращенія, получаемъ ур-іе:

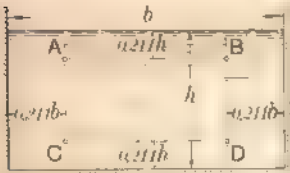
$$a^2 = \dots \frac{1}{6} \dots 0 \dots \dots \dots (C)$$

или да образующія большія скопления, которая текутъ выѣтъ съ водою, но, конечно, далеко не такъ же, какъ ола. Эти явленія еще мало изслѣдованы. См по этому поводу въ журналѣ „Zeitschrift für Bauwesen“ за 1897 г статью Jasmund Die Veränderung der Geschwindigkeiten im Querschnitt eines Stromes, insbesondere bei Behinderung an der Oberfläche und bei Eisstand, стр. 607. Вопросу дошнего льда посвященъ X выпускъ издаваемыхъ Министерствомъ Путей Сообщенія „Материаловъ для описанія русскихъ рѣкъ“, содержащій работу В. Ляхтина: Ледяной наносъ и зимніе заторы на р. Невѣ. С.-Петербургъ, 1906 г. Тому же вопросу посвященъ книга G. Luschner—Das Grundels Argal, 1906 годъ. Рае предѣленіе скоростей въ рѣкѣ, покрытой ледянымъ покровомъ, внимательно изслѣдовалось въ 1907-1909 годахъ инженеромъ С. Максимовымъ на Крейфбургской гидрометрической станицѣ на Западной Двинѣ. Эти наблюденія еще не опубликованы.



То обстоятельство, что въ составъ коэффициентовъ этого ур-я не входят ни параметръ параболы, ни ея постоянное, зависитъ отъ выше упомянутаго расположенія точекъ *b* и *d* на параболѣ. Рѣшая ур-е (С), находимъ ея корни:  $\alpha_1 = 0,211$  и  $\alpha_2 = 0,789$ . Такъ какъ сумма этихъ корней равна 1, то, оказывается, безразлично, отсчитывать ли разстоянiя  $0,211 h$  и  $0,789 h$  отъ свободной поверхности внизъ, или отъ дна вверхъ: опредѣлятся однѣ и тѣ же абсциссы параболы *ab* и *cd*. Итакъ, средняя скорость на вертикали можетъ быть опредѣлена, какъ среднее арифметическое изъ скоростей, измѣренныхъ—одна на разстоянii  $0,211 h$  подъ свободной поверхностью, а другая—на томъ же разстоянii надъ дномъ.

Разсуждая такимъ же образомъ относительно горизонтальныхъ слоевъ, найдемъ, очевидно, что средняя скорость по горизонтали, если законъ измѣненiя скорости можетъ быть представленъ параболой, можетъ быть приравнена среднему арифметическому изъ двухъ скоростей, взятыхъ отъ каждаго берега на разстоянii  $0,211$  полной длины этой горизонтали.



Фиг. 181.

Наконецъ, распространяя эти разсужденiя на все живое сѣченiе прямоугольнаго канала, найдемъ, что его средняя скорость можетъ быть найдена, какъ среднее арифметическое изъ четырехъ измѣренiй скоростей, сдѣланныхъ въ точкахъ *A*, *B*, *C* и *D*, которыя расположены въ сѣченiи, какъ указано на фигурѣ 181. Это обстоятельство было указано проф. *Teichmann*'омъ въ 1883 году.

Приводимъ старинную формулу *Прони* (эмпирическую, конечно), связывающую среднюю скорость сѣченiя *v* съ максимальной скоростью на средней вертикали *U* и скоростью  $\alpha_1$  на  $\alpha_1$  стоке на средней вертикали. Эта формула такова:

$$v = \frac{U + \alpha_1}{2}.$$

Слѣдующая формула того же *Прони* связываетъ среднюю скорость *v* съ максимальной *U*:

$$v = U \frac{2,37 + U}{3,15 + U}.$$

Наконецъ, еще проще выраженiя:

$$v = 0,8 U;$$

$$\alpha_1 = 0,75 v = 0,6 U.$$

Эти послѣднiя 4 формулы даютъ только приближительное соотношенiе между скоростями и могутъ быть употребляемы безъ риска большой ошибки только при не слишкомъ узкихъ каналахъ и при теченii, достаточно покойномъ.

По *Ватеру* среднюю скорость всего сѣченiя *v* по наибольшей скорости въ сѣченiи *U* можно опредѣлить изъ уравненiя:

$$v = 0,705 U + 0,001 U^2.$$

Эта формула соответствуетъ наблюденiямъ на Везерѣ, Эльбѣ, Рейнѣ и т. д. \*.

\* См. von Wagner, Hydrologische Untersuchungen. Braunschweig, 1881.

Наконецъ, нужно замѣтить, что въ каждой точкѣ сѣченія рѣки скорость или, вѣрнѣе, ея слагающая по теченію (эта слагающая и опредѣляется гидрометрическими приборами), все время измѣняется, то увеличиваясь, то уменьшаясь, колеблясь съ нѣкоторой периодической правильностью около средней величины. Такими же периодическими колебаніями по величинѣ и по направленію обладают и другія слагающія скорости, лежащія въ плоскости сѣченія потока. Ни величина этого колебана, ни причины, его вызывающія, до сихъ поръ еще недостаточно изслѣдованы. — констатировано только явленіе, которое называется *пульсацией* потока. Въ немъ можно видѣть подтвержденіе того, что было сказано по поводу внутренняго тренія жидкости: движеніе жидкости въ трубѣ, а тѣмъ болѣе въ открытомъ каналѣ, пельзя уподоблять движенію твердыхъ призмъ, обгоняющихъ другъ друга. неизбежно закручиваніе, отсюда вихри, а отсюда периодическія измѣненія скорости.

### § 32. Замѣчанія о выборѣ профиля, скорости и паденія въ каналахъ. Расчетъ каналовъ.

Изъ уравненій  $Q = F \cdot c$  и  $c = c_1 \sqrt{Ri}$  видно, что при данной площади живого сѣченія  $F$  тотъ каналъ способенъ пропустить больше воды, въ которомъ больше скорость  $c$ , а эта скорость, при данномъ паденіи, тѣмъ больше, чѣмъ больше средний радіусъ  $R$ , если считать  $c$  постояннымъ <sup>\*)</sup>. Такъ какъ съ увеличеніемъ  $R$ , очевидно, увеличивается и стоимость сооруженія, то является вопросъ объ опредѣленіи наивыгоднѣйшаго профиля канала, т.-е. такого профиля, въ которомъ  $R = \frac{F}{O}$  имѣеть наибольшее значеніе при данномъ  $F$ . очевидно, что для этого смачиваемый периметръ  $O$  долженъ имѣть наименьшее значеніе. Отысканіе такихъ профилей составляетъ извѣстную въ варіаціонномъ исчисленіи задачу объ изопериметрахъ. Тамъ доказывается, что изъ всѣхъ многоугольниковъ съ одинаковыми площадями, при данномъ числѣ сторонъ, правильные многоугольники имѣють наименьшіе периметры, а изъ всѣхъ правильныхъ многоугольниковъ тѣ имѣють меньшій периметръ, число сторонъ которыхъ больше. Поэтому кругъ обладаетъ наименьшимъ возможнымъ периметромъ при данной площади.



Фиг. 182.

Примѣняя этотъ результатъ къ каналамъ, заключаемъ, что, вообще, наивыгоднѣйшій профиль канала есть полуокружность (фиг. 182), такъ какъ

<sup>\*)</sup> На основаніи данныхъ § 30 видно, однако, что само  $c$  увеличивается со среднимъ радіусомъ сѣченія, такъ что увеличеніе  $R$  вызываетъ увеличеніе скорости какъ непосредственно, такъ и черезъ коэффициентъ  $c$ .

очевидно, что если, вообще,  $R_{\text{ср.}}$  (средний радиусъ) есть отношеніе площади круга къ длинѣ окружности, то величина  $R_{\text{ср.}}$  не измѣнится, если возьмемъ половину круга и полуокружность. Если горизонтъ воды въ каналѣ не совпадаетъ съ горизонтальнымъ диаметромъ, то выгодность профиля теряется.

Напомнимъ, что для полукруглаго канала средній радиусъ  $R = \frac{1}{2}$ , т.-е., что средній радиусъ равенъ половинѣ наибольшей глубины канала.

Подобнымъ же образомъ заключаемъ, что изъ всѣхъ четырехугольныхъ профилей, которые представляются обыкновенно равнобокими трапеціями, найвыгоднѣйшій профиль есть половина правильнаго шестиугольника, — слѣдовательно, съ угломъ наклона боковъ къ горизонту въ  $60^\circ$ ; менѣе выгоднымъ является прямоугольникъ, какъ половина квадрата, т.-е. съ шириною, равной двойной глубинѣ; но онъ, въ свою очередь, выдѣляется всякой другой прямоугольной фигуры. Легко убѣдиться, что и въ этихъ двухъ случаяхъ средній радиусъ сѣченія равенъ половинѣ глубины канала (если, конечно, уровень воды совпадаетъ съ горизонтальнымъ диаметромъ описаннаго круга).

Понятно, что только въ рѣдкихъ, особо твердыхъ грунтахъ можно примѣнять одинъ изъ этихъ трехъ профилей, не употребляя особыхъ укрѣпленій. Въ обыкновенныхъ же случаяхъ эти профили возможны только при устройствѣ деревянной, каменной, бетонной и, вообще, искусственной одежды береговъ и дна; при этомъ нерѣдко въ профиляхъ въ видѣ половины шестиугольника нижнюю горизонтальную грань дѣлаютъ не плоской, а кривою, обращая ее выпуклостью внизъ. Если же хотѣть обойтись безъ укрѣпленія береговъ, то необходимо, чтобы боковыя грани канала были наклонены не круче естественнаго откоса даннаго грунта, такъ какъ иначе она будетъ осыпаться, независимо отъ размыванія его водою. Поэтому чаще всего профиль каналовъ выполняется въ видѣ трапеции. Въ твердыхъ грунтахъ допускаютъ поэтому для боковыхъ граней полукторный откосъ \*), въ песчаныхъ и, вообще, рыхлыхъ грунтахъ—двойной и т. д. Такимъ образомъ, при выборѣ размѣровъ трапеции, какъ профиля, откосъ боковыхъ стѣнокъ, который мы будемъ обозначать буквою  $m$ , является заданной величиною, въ зависимости отъ рода грунта. Для того, чтобы при этомъ условіи опредѣлить найвыгоднѣйшій профиль, соответствующій данной площади  $F$ , нужно еще установить соотношеніе между двумя его измѣреніями, выражая аналитически условіе полученія наибольшаго средняго радиуса  $R$  сѣченія или, что то же, наименьшаго смачиваемаго периметра  $O$ . Для равнобокой трапеции (фиг. 183) всего проще установить это соотношеніе между шириною по дву  $b$  и глубиною  $h$ . Имѣемъ, очевидно:

$$F = \frac{2b + 2CD}{2} h = (b + mh) h;$$

$$O = b + 2BD = b + 2h\sqrt{1 + m^2}.$$

\*) Откосомъ называется  $\text{ctg}$  угла наклона грани къ горизонту, т.-е. отношеніе  $\frac{m}{DE}$  на фиг. 183. Между прочимъ замѣтимъ, что, на основаніи повятныхъ соображеній, этотъ уголъ, даже при укрѣпленіи береговъ, не дѣлается въ  $60^\circ$ , а берутъ половинный откосъ, что соответствуетъ углу  $\text{arc ctg } \frac{1}{2} = 63^\circ 26'$ .

Исключая отсюда  $b$ , находимъ:

$$O \quad \frac{F}{h} + h[2\sqrt{1+m^2} - m].$$

Такъ какъ  $m$  и  $F$  заданы\*), то  $O_{min}$  получимъ при томъ  $h_0$ , которое удовлетворяетъ уравненію:

$$\frac{\partial O}{\partial h} = 0.$$

Имѣемъ:

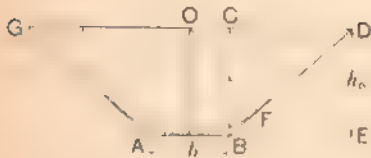
$$\frac{\partial O}{\partial h} = \frac{F}{h_0^2} + 2\sqrt{1+m^2} - m = 0,$$

такъ что

$$h_0^2 = \frac{F}{2\sqrt{1+m^2} - m} = \frac{(b + mh_0)h_0}{2\sqrt{1+m^2} - m} \dots \dots \dots (14)$$

Отсюда

$$\frac{b}{2} = h_0(1 - m^2 - m) \dots \dots \dots (15)$$



Фиг. 183.

Это уравненіе указываетъ намъ самый способъ построения искомой величины  $\frac{b}{2}$ : если изъ  $BD = h_0\sqrt{1+m^2}$  вычесть  $DF$ , сдѣлавъ его равнымъ  $CD = BE = mh_0$ , то отръзокъ  $BF$  и будетъ равенъ  $\frac{b}{2}$ . Все рѣшеніе

вопроса можно выполнить такъ: по уравненію (14) вычисляемъ  $h_0$  по даннымъ  $F$  и  $m$ ; радиусомъ  $OF = h_0$  описываемъ затѣмъ полуокружность и проводимъ къ ней горизонтальную касательную  $AB$ , а также касательную  $OB$ , такъ, чтобы  $\frac{BC}{BC} = m$ ; точка касанія  $F$  и опредѣлить искомый отръзокъ  $BF$ . Легко подсчитать величину средняго гидравлическаго радиуса; онъ равенъ.

$$h_0 = \frac{h_0^2[2\sqrt{1+m^2} - m]}{2h_0[\sqrt{1+m^2} - m] + 2h_0\sqrt{1+m^2}} = \frac{h_0}{2} \dots \dots \dots (16)$$

т.-е. и здѣсь онъ равенъ половинѣ глубины.

\* Если бы  $m$  было произвольно, то невыгоднѣйшій откосъ  $m_0$  мы получили бы, рѣшивъ уравненіе  $\frac{\partial O}{\partial m} = 0$ . Это даетъ:

$$(1 + m_0^2) - \frac{1}{2} 2m_0 - 1 = 0.$$

откуда

$$m_0 = \frac{1}{3}.$$

Замѣчая, что  $\arctg \frac{1}{3} \approx 18^\circ$ , видимъ, что это обстоятельство, въ связи съ рѣшеніемъ уравненія  $\frac{\partial O}{\partial h} = 0$ , подтверждаетъ наше предыдущее заключеніе о выгодности профили, какъ половины правильнаго шестиугольника.

Было уже подчеркнута, что невыгоднѣйшии профиль тогда останется таковымъ, когда онъ наполненъ водою какъ разъ до требуемой глубины. При всѣхъ иныхъ наполненіяхъ, и болѣе, и меньшихъ, выгодность его утрачивается. Возникаетъ такимъ образомъ вопросъ о томъ, какъ мѣняются скорость и расходъ въ каналѣ данного профиля при разныхъ его наполненіяхъ, при условіи, конечно, одинаковаго уклона. Съ помощью данныхъ § 31 этотъ вопросъ разрѣшается просто для простыхъ профилей. Для болѣе сложныхъ профилей подсчеты затрудняются. Вообще если по оси ординатъ откладывать глубины профиля, а по оси абсциссъ—соответствующіе расходы, то получаемая кривая даетъ отвѣтъ на вопросъ объ измѣненіи расхода съ глубиною. Эти кривыя расхода, имѣющія очень важное практическое значеніе для естественныхъ потоковъ, въ общемъ сначала быстро повышаются, а затѣмъ замедляются въ этомъ повышеніи, приближаясь къ пропорциональному увеличенію расхода съ увеличеніемъ глубины. Этотъ ходъ измѣненія часто уподоблялся параболическому закону, хотя есть рядъ эмпирическихъ формулъ и другого типа.

Изъ употребительныхъ эмпирическихъ зависимостей упомянемъ для примѣра слѣдующія. Есть формулы типа

$$Q = kF \sqrt{Ri}.$$

Въ нихъ легко узнать уравненіе Тadini. Буквой  $F$  обозначена площадь живого сѣченія, буквой  $R$  —средній гидравлическій радиусъ, буквой  $i$  — уклонъ; наконецъ,  $k$  — эмпирический коэффициентъ.

Употребляются также формулы вида

$$Q = k_1 h^n,$$

$$Q = k_2 (h + c)^{2.5},$$

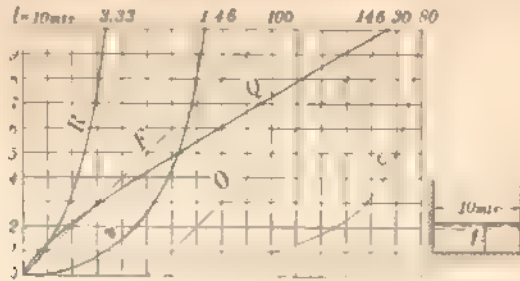
$$Q = k_3 h^{2.5} + k_4 h'^n,$$

$$Q = a + bh + ch^2 + dh^3.$$

Здѣсь буквами  $k_1, k_2, k_3, k_4, a, b, c$  и  $d$  обозначены постоянные коэффициенты, различные для каждой рѣки и для каждаго ея мѣста;  $h$  — средняя глубина профиля. Показателю  $n$  (въ предпоследнемъ уравненіи) даютъ значеніе отъ 2,5 до 5.

Для правильныхъ профилей кривая расхода легко подсчитывается. Такъ на фигурахъ 184, 185 и 186 представленъ въ видѣ кривыхъ ходъ измѣненія съ увеличеніемъ глубины слѣдующихъ величинъ: смачиваемаго периметра (кривая  $O$ ), площади живого сѣченія (кривая  $F$ ), средняго гидравлическаго радиуса (кривая  $R$ ), коэф-та  $c$  въ формулѣ Тadini на основаніи таблицы Базена (N. 44), средней скорости (кривая  $v$ ) и, наконецъ, расхода. Профили были взяты: для фиг. 184 прямоугольный съ постоянной шириною 10 *mt*, степень шероховатости — по 2-й категоріи; для фиг. 185 трапеція съ шириною по двѣ въ 7 *mt* и полукривою откосомъ боковыхъ граней; степень шероховатости — по 1-й категоріи; на фиг. 186 предполо-

жена круглая бетонная труба со степенью шероховатости по 1-й категории; диаметр трубы взять въ 2 м(д). Во всѣхъ трехъ случаяхъ уклонъ былъ принятъ въ 0,1 ‰. Изъ фигуръ 184 и 185 видно, что съ увеличеніемъ глу-



Фиг. 184.

бины расходъ растетъ безпредѣльно и видъ кривой расхода вполне подходитъ подъ выше указанную характеристику. При прямоугольномъ профилѣ, уже начиная съ глубины, равной половинѣ ширины, расходъ становится почти пропорціоналенъ глубинѣ, — такъ мало измѣняется скорость.



Фиг. 185.

Въ кругломъ каналѣ обнаруживается наполненіе съ наибольшей скоростью (при центральномъ углѣ  $2\varphi \sim 257^{\circ} 2'$ ) и другое наполненіе наибольшаго расхода (при центральномъ углѣ  $2\varphi$  около  $308^{\circ}$ ). Эти два наполненія можно найти изъ слѣдующихъ, легко получаемыхъ, уравненій, въ которыхъ буквою  $r$  названъ радиусъ круглаго сѣченія канала:

$$l = 2r,$$

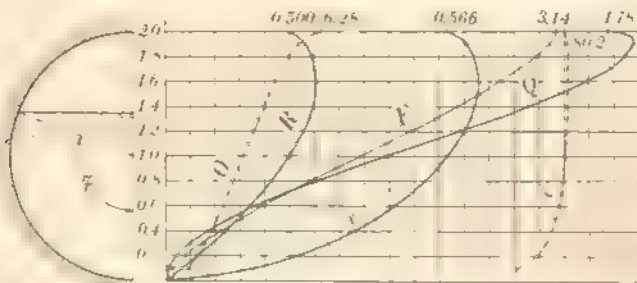
$$F = \frac{r^2}{2} (2\varphi - \sin 2\varphi),$$

$$R = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} \right),$$

$$Q = cV \left( \frac{r}{2} \right)^2 (2\varphi - \sin 2\varphi)^2.$$

Ясно, что для нахождения  $Q_{max}$  надо рѣшить уравненіе  $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0$ , а для разысканія  $R_{min}$  надо рѣшить уравненіе  $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$ . Такимъ путемъ получены приведенныя выше значенія угла  $2\varphi$ . Слѣдуетъ уяснить себѣ отсутствіе противорѣчія въ томъ, что невыгоднѣйшимъ профилемъ является кругъ, но въ

время круглая труба с данным уклоном пропускает наибольший расход при неполном заполнении. Дело в том, что с переменной высотой меняется живое сечение, сравнение же выгодности предполагает равную площадь сечения. Для нашего круглого канала наибольший расход казался около  $1,88 \text{ mtr}^3 \text{ sec}$  при площади живого сечения  $3,082 \text{ mtr}^2$ . Чтобы такую площадь выполнить в виде полукруга, то его диаметр оказался бы равным около  $2,8 \text{ mtr}$ , средний гидравлический радиус  $R = 0,7 \text{ mtr}$ , а что  $c = 81,1$ , а потому  $Q = 2,09 \text{ mtr}^3 \text{ sec}$ , т.е. еще того больше. Следует также внимание на то, что при полном заполнении круглого канала он обращается в трубу. По фиг. 186 следует, что труба дает меньше



Фиг. 186.

расхода, чем канал, при условии одинакового уклона свободной поверхности пьезометрической линии. Само собою понятно, что труба может дать гораздо больший расход, если увеличить начальное давление, не меняя уклона, т.е. если пропускать через нее воду под большим напором. Для этого не нужно, конечно, менять положения самой трубы. Между тем для увеличения расхода в канал, пришлось бы переложить его с тем, чтобы увеличить поверхностный уклон.

Полезно обратить внимание на то, что кривым фиг. 186 можно приписать более общее значение. Именно, хотя они построены для трубы диаметром в  $2 \text{ mtr}$ , однако ясно, что любая абсцисса кривой  $K$  будет давать значение среднего гидравлического радиуса любого крупного сечения при соответствующем заполнении канала, если эту абсциссу умножить на отношение диаметра данного канала к 2. Также абсциссы кривой  $F$  дадут площади живых сечений, после умножения их на отношение квадрата данного диаметра к 4. Если, с некоторой погрешностью, правда не очень большой, допустить, что значения  $c$  не меняются, то кривая  $Q$  даст значения ско-

стей, если их умножить на отношения  $\sqrt{\frac{D}{2} \cdot \frac{i}{0,1}}$ , где  $D$  и  $i$  суть диаметр и уклон данной трубы. Наконец, при том же условии кривая  $Q$  будет давать все расходы, если ее абсциссы умножить на отношения  $\left(\frac{D}{2}\right)^{3/2} \left(\frac{i}{0,1}\right)^{3/2}$ . Само собою понятно, что это же замечание справедливо и для всех профилей, которые геометрически подобны профилям фигурь 184 и 185 и имеют стѣнки тѣх же степеней шероховатости, что и по-

слѣдніе. Въ обоихъ случаяхъ необходимо разыскать то наполненіе / канала фигуръ 184 или 185, которое обращало бы ихъ въ фигуры, подобныя заданному живому сѣченію, и прочесть значенія абсциссъ всѣхъ кривыхъ, соответствующихъ этому наполненію /; эти абсциссы придется умножать на такія же отношенія, какія были указаны для круглаго сѣченія, только роль отношенія диаметра къ  $\gamma$  всякій разъ будетъ играть отношеніе размѣровъ ширины по дну для даннаго профиля и для того, который взять въ основу фигуръ 184 и 185. Съ этой точки зрѣнія можно назвать кривыя фигуръ 184—186 *характеристиками* геометрической формы поперечныхъ профилей каналовъ и ими удобно пользоваться при рѣшеніи практическихъ вопросовъ. Такъ, напримѣръ, рассмотримъ трапециoidalный профиль съ откосомъ  $33^{\circ}40'$  и шириною по дну въ 5 *mtr*, имѣющій уклонъ 0,0005 и наполненный на глубину 3 *mtr*. Соответствующая глубина на профилѣ фиг. 185 опредѣляется въ  $3 \frac{7}{5} = 4,2$  *mtr*. Читая соответствующія абсциссы отдѣльныхъ кривыхъ въ надлежащихъ масштабахъ (надписанныя значенія конечныхъ абсциссъ позволяютъ установить эти масштабы), найдемъ, что средний радіусъ нашего сѣченія будетъ  $R = 2,5 \frac{5}{7} = 1,78$  *mtr*; живое сѣченіе  $F = 55 \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 28,5$  *mtr*<sup>2</sup>. Считая  $c$  неизмѣннымъ, найдемъ далѣе среднюю скорость въ сѣченіи  $v = 0,9 \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{1}\right)^{1/2} = 1,7$  *mtr/sec*; и, наконецъ, расходъ  $Q = 50,5 \left(\frac{5}{7}\right)^3 \left(\frac{5}{1}\right)^{1/2} = 48,5$  *mtr*<sup>3</sup>/*sec*. Конечно, не трудно принять во вниманіе и измѣненіе коэффиціента  $c$  въ соответствіи съ  $R$  по таблицѣ 44. Въ нашемъ случаѣ оказывается  $c = 53$  вмѣсто указаннаго  $c = 57$  для данной глубины на фигурѣ 185; поэтому окончательно скорость  $c = 1,7 \frac{53}{57} = 1,58$  *mtr/sec*, а расходъ  $Q = 48,5 \frac{53}{57} = 45,1$  *mtr*<sup>3</sup>/*sec*. Эти же результаты мы получили бы, если бы производили непосредственныя вычисленія живого сѣченія, скорости и т. д.

Подобно тому, какъ было показано для трапеци, можно отыскивать наивыгоднѣйшее соотношеніе между отдѣльными элементами всякаго другого профиля (овальнаго, яйцевиднаго и т. д.) Впрочемъ, далеко не всегда можно остановиться на наивыгоднѣйшей (съ точки зрѣнія величины  $R$ ) комбинаціи размѣровъ. Такъ, напримѣръ, въ судоходныхъ каналахъ нерѣдко предписывается ширина для одновременнаго пропуска опредѣленнаго числа судовъ данныхъ размѣровъ; въ этомъ случаѣ предписывается также минимальная глубина въ зависимости отъ осадки судовъ. Для выгоды профиля остается выбрать откосъ боковыхъ граней, который, какъ мы видѣли, желательнѣе приближать къ  $60^{\circ}$ , если то позволяютъ качества грунта.

Далѣе, часто, не задаваясь опредѣленною шириною, назначаютъ нѣкоторую максимальную глубину канала, принимая во вниманіе, что земляныя работы при значительной глубинѣ удорожаются; далѣе, содержаніе канала



въ порядкѣ, очистка отъ водорослей и т. п. при большой глубинѣ становится затруднительнымъ: наконецъ, если каналъ проложенъ въ водонепроницаемомъ грунтѣ, то при большой глубинѣ потери отъ просачиванія будутъ значительны; очень часто этимъ соображеніемъ пренебречь нельзя.

Иногда приходится отступать отъ вышеназваннаго соотношенія между элементами профиля, даже если вообще не ставится никакихъ ограничений относительно ширины и глубины. На дѣлѣ можетъ оказаться такое соотношеніе между цѣнами за отчужденіе земли подъ каналъ и цѣнами производства земляныхъ работъ, что окажется болѣе выгоднымъ примѣнить «невыгодный профиль», т.-е. увеличить необходимое живое сѣченіе  $F$ , а, следовательно, и количество земляныхъ работъ, но зато уменьшить ширину канала, а вмѣстѣ съ ней и величину отчуждаемой площади, если цѣны за последнюю очень высоки.

Наконецъ, когда каналъ питается изъ резервуара, горизонтъ въ которомъ очень переменчивъ,—напр., изъ заводскаго пруда съ небольшимъ притокомъ во время засухи.—то для функционированія канала въ течение крутаго года необходимо, конечно, чтобы дно его было ниже, нежели горизонтъ воды въ прудѣ во время засухи; такой каналъ при большой водѣ, конечно, уже не будетъ имѣть «выгоднаго профиля». Таковы большинство уральскихъ тарей.—деревянныхъ, а иногда чугунныхъ, прямоугольныхъ каналовъ, нерѣдко закрытыхъ сверху, помощью которыхъ вода подводится изъ пруда къ гидравлическимъ машинамъ.—Вообще при переменныхъ и не очень большихъ расходахъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ практикѣ городскихъ канализаций, удобно употреблять яйцевидныя поперечныя сѣченія каналовъ, такъ какъ ихъ можно выбрать съ тѣмъ расчетомъ, чтобы при разныхъ степеняхъ наполненія ихъ выгодность была приблизительно одинакова. Правила построенія такихъ профилей можно найти въ любомъ курсѣ канализации \*).

Часто при расчетѣ каналовъ удобно опредѣлять площадь живого сѣченія канала  $K$  при помощи величины средней скорости. Эта послѣдняя не можетъ быть выбрана совершенно произвольно. Она не должна бы быть меньше  $0,2 \text{ mtr/sec}$ , особенно, если вода несетъ много твердыхъ взмученныхъ веществъ, такъ какъ при меньшей скорости эти вещества осаждаются и загрязняютъ русло. Съ другой стороны, скорость  $u$  стѣнокъ не должна превосходить нѣкоторой величины, чтобы вода не размывала береговъ. Въ слѣдующей таблицѣ, въ графѣ  $u_1$ , указано нѣсколько предѣльныхъ максимальныхъ скоростей  $u$  дна для разныхъ грунтовъ, на основаніи наблюденій *Dubuat* и др. (см. Poncelet, Cours de mécanique appliquée aux machines). Въ той же таблицѣ, въ графѣ  $u$ , даны соответствующія предѣльныя значенія средней скорости въ сѣченіи.

Глинистый грунтъ (гончарная глина)	$u_1 = 0,08 \text{ mtr/sec}$	$u = 0,12 \text{ mtr/sec}$
Очень мелкій песокъ (не крупнѣе аясовъ зерна)	„ 0,10 „	„ 0,16 „
Суглинокъ	„ 0,15 „	„ 0,24 „

\* См. по этому поводу также К. Игнатова въ: „Навъ практикы проектированія инженерныхъ сооружений“, таблицы 1, 8, 11, 13 и 16, 18. Здѣсь приведены въ удобной для пользованія формѣ расчетныя таблицы, годныя для канализацонныхъ открытыхъ водоводовъ.

Мелкий песокъ не крупнѣ горошины . . . . .	$v_1 = 0,19 \text{ mtr sec}$	$v_2 = 0,30 \text{ mtr sec}$
Крупный „ . . . . .	„ 0,20 „	„ 0,32 „
Очень крупный песокъ (до величины боба); илистый крупный песокъ . . . . .	„ 0,325 „	„ 0,50 „
Округленная галька диаметр. до 0,027 <i>mtr.</i>	„ 0,625 „	„ 0,90 „
Крепнистый грунтъ; размѣръ галекъ до курянаго яйца . . . . .	„ 0,975 „	„ 1,30 „
Крупные камни; сланцевыя породы . . . . .	„ 1,50 „	„ 1,80 „
Твердыя сланцевыя породы . . . . .	„ 1,80 „	„ 2,30 „
Твердыя скалы . . . . .	до 3,00 *) „	„ 3,50 „

Если проектируется новый каналъ, то обыкновенно задаются скоростью. Площадь  $F$ , вычисленную по ней и по расходу  $Q$ , нужно увеличивать въ слѣдующихъ случаяхъ. Если природа стѣнокъ такова, что на ней легко развиваются водоросли, то это можетъ оказать слѣдующее влияние: если водоросли мягкія и стелются по дну, то онѣ только уменьшаютъ живое сѣченіе, а потому, смотря по вѣроятному развитію водорослей, частотѣ очистки и т. д., А Рісард совѣтуетъ увеличивать размѣры живого сѣченія во все стороны приблизительно на 0.1 *mtr.* Твердыя водоросли, напротивъ, не столько уменьшаютъ живое сѣченіе, сколько увеличиваютъ смачиваемый периметръ; съ ними слѣдуетъ считаться не только соответствующимъ уменьшеніемъ коэф-та  $c$  въ формулѣ  $v = c \sqrt{Ri}$ , но и соответствующимъ уменьшеніемъ  $R$ , что сводится, опять-таки, къ необходимости увеличить  $F$  противъ вычисленную. Обыкновенно приходится увеличивать размѣры канала болѣе, чѣмъ на 0.1 *mtr* во все стороны. Далѣе, въ зимнее время поверхность открытаго канала покрывается льдомъ, и каналъ обращается въ трубу. Если въ то же время расходъ измѣняться не долженъ, то нужно высчитывать размѣры живого сѣченія именно въ этомъ послѣднемъ предположеніи. Замѣтимъ, что если въ каналѣ движеніе воды не прекращается никогда, то полное его промерзаніе невозможно. Но при періодическихъ остановкахъ, напр., въ каналахъ, ведущихъ воду къ заводскимъ гидравлическимъ машинамъ, во время праздничныхъ остановокъ двигателей, промерзаніе возможно: при 25° мороза за двое сутокъ на стѣнкахъ желѣзной трубы, въ которой вода была остановлена, образовался, по словамъ Тиме, слой льда до 25 *mm* толщину. Поэтому необходимо или водопроводныя трубы закапывать въ землю на глубину до 3 арш. и больше, смотря по мѣстной глубинѣ промерзанія, или, какъ это совѣтуетъ Тиме, никогда не останавливать движенія воды въ жаряхъ.

Какъ мы видѣли выше, уклонъ  $i$  свободной поверхности въ каналахъ есть, собственно, та величина, благодаря которой вода приходитъ въ немъ въ движеніе, такъ что это есть одинъ изъ важнѣйшихъ элементовъ въ каналѣ: имъ опредѣляется скорость, а слѣдовательно, и расходъ. Паденіе  $i$  опредѣляется разностью горизонтовъ  $H$  воды въ мѣстахъ, соединяемыхъ каналомъ, и разстояніемъ  $L$  между ними. Если соединяемыя мѣста представляются резервуарами (озера, пруды и т. п.), то величина  $H$  неизмѣнно

\* Въ каналѣ, отводящемъ воду изъ-подъ ниагарскихъ гурбинъ, допущена исключительно большая скорость до 27 въ секунду, т.-е. до 9.25 *mtr sec*. Стѣнки канала облицованы глазурованнымъ кирпичемъ. Ему данъ уклонъ въ 7‰.

длина, и падение  $i$  можно уменьшить, только увеличивая  $L$ ; но увеличить  $L$  сверх того, которое получится при проведении канала по кратчайшему разрыву, совершенно невозможно. Если же каналом вода отводится из рѣки къ машинамъ и отъ нихъ опять въ ту же рѣку, то, раздвигая вдоль рѣки точки ея соединенія съ каналомъ, одновременно увеличиваемъ  $H$  и  $L$ , такъ что можетъ оказаться, что увеличение длины повлечетъ за собою и уменьшение паденія. Иногда при очень извилистомъ теченіи рѣки такое раздвиганіе точекъ соединенія канала съ рѣкою влечетъ не только увеличеніе  $H$ , но и уменьшеніе  $L$ . Это особенно выгодно, когда каналъ назначается для подвода воды къ двигателямъ: тогда увеличеніе  $H$  тождественно, какъ и длинѣ въ курсѣ водяныхъ турбинъ, съ увеличеніемъ располагаемаго мѣста работы; въ этомъ случаѣ паденіе  $i$  въ каналѣ желательнѣе дѣлать такъ возможно малымъ, чтобы израсходовать на проведеніе воды къ машинамъ наименьшую часть  $H$ .

Такъ какъ  $i$  непосредственно связано съ  $v$ , то его величина тоже произвольна, и предѣлы для  $i$  легко найти по предѣламъ для  $v$ , зная размеры канала. Обыкновенно невыгодно давать каналу уклонъ, отличающійся отъ общаго уклона мѣстности въ направленіи канала, чтобы не увеличивать земляныхъ работъ необходимостью насыпей и выемокъ и не удовлетворять сооруженія устройствомъ акведуковъ или туннелей, хотя, конечно, въ гористой мѣстности ихъ избѣжать иногда и нельзя. Кроме вышеуказанныхъ соображеній относительно величины  $v$ , замѣтимъ здѣсь, что паденіе  $i$ , а слѣдовательно, и величина  $v$ , опредѣляются отчасти назначеніемъ канала: распределительные каналы ведутся всегда съ гораздо меньшими уклонами, нежели судоходные, а для этихъ послѣднихъ уклоны дѣлаются меньше, нежели для фабричныхъ, такъ какъ цѣль ихъ отдать воду плывѣ, тогда какъ для вторыхъ и третьихъ такая отдача есть потеря. Нѣкоторые значенія употребительныхъ въ практикѣ уклоновъ приведены выше въ § 30.

Не входемъ въ дальнѣйшія подробности по этому поводу, такъ какъ это вышло бы за рамки нашего курса. Интересующимся рекомендуемъ обратиться къ курсамъ рѣшѣній о судоходствѣ (напр., курсъ проф. *Абрамюка*) и вообще, гидротехническихъ работъ (напр., *Н. Фанюк*), Иригационные каналы и относящіеся къ нимъ сооруженія, Спир, 1897 г.; также *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, часть III (Der Wasserbau), рядъ спеціальныхъ томовъ, посвященныхъ разнымъ видамъ гидротехническихъ работъ, какъ-то: городской канализации, о судоходныхъ каналахъ, о речныхъ и осушительныхъ работахъ и т. д. Также см.: *Lechats*, Hydraulique fluviale. Егъ же *L'encyclopedie agricole et horticole*, *Salvador*, Hydraulique agricole и др.

Что касается расчета каналовъ, то рассмотримъ отдѣльно случаи каналовъ строящагося и существующаго.

Въ первомъ случаѣ дано  $Q$ , а также можно считать заданнымъ или среднюю скорость  $v$  или паденіе  $i$ . Если задано  $i$ , то непосредственно находимъ живое сѣченіе  $F = \frac{Q}{v}$ ; задаемся конфигураціей профиля (полукругъ, трапеція съ опредѣленнымъ откосомъ  $m$  и т. д.); опредѣляемъ глубину и средний радіусъ или по формуламъ (14) и (15) этого §, или на основаніи приведенныхъ выше соображеній. Опредѣляемъ далѣе величину  $v$  по одной

изъ формуль Базена, а не по Ganzenba et Kutter'у, такъ какъ паденіе не извѣстно. Наконецъ, по ур-ю  $v = c \sqrt{R}$  находимъ необходимое  $i$ . Это  $i$  относится къ свободной поверхности. Но при равномерномъ течени и при постоянномъ профилѣ уклонъ свободной поверхности, какъ мы видѣли, одинаковъ съ уклономъ дна.

Если задано  $i$ , то рѣшеніе нѣсколько усложняется. Предположимъ, что обстоятельства позволяютъ примѣнить выгодный профиль при данномъ откосѣ  $m$ . Тогда, на основаніи ур-ій (14) и (16) этого §, имѣемъ

$$h = \sqrt{\frac{F}{2\sqrt{1+m^2}-m}} \quad 2R.$$

Кромѣ того, ур-іе равномернаго теченія дасть:

$$v = c \sqrt{R} = \frac{Q}{F}.$$

Поэтому находимъ:

$$R^3 = \frac{Q^2}{16c^2[2\sqrt{1+m^2}-m]^2} \dots \dots \dots (17)$$

Величины  $c$  точно намѣтить нельзя, такъ какъ  $R$  неизвѣстно. Присходится задаться ею на основаніи соображеній § 30, затѣмъ вычислить  $R$ , по нему на основаніи таблицъ опредѣлить  $c$ , внести въ ур-іе (17), еще разъ пересчитать  $R$  и т. д., продолжая эти подсчеты до тѣхъ поръ, пока исправляемая великій разъ величина  $c$  будетъ мало отличаться отъ примѣненной въ послѣдній разъ. Обыкновенно достаточно двухъ-трехъ пересчетовъ. Зная  $R$ , находимъ глубину канала  $h$ , по ней изъ ур-ія (15) найдемъ  $b$ , затѣмъ  $F$ , и, наконецъ,  $v$ .

Замѣтимъ, что въ обоихъ этихъ случаяхъ, если длина канала есть  $L$ , то разность горизонтовъ  $H$  въ сообщаемыхъ каналахъ водоемахъ должна быть больше, нежели  $iL$ ; а именно, она опредѣляется изъ ур-ія:

$$H = iL + (c - \zeta) \frac{v^2}{2g} \dots \dots \dots (18)$$

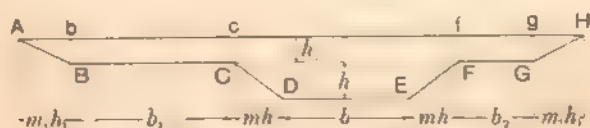
гдѣ  $\frac{v^2}{2g}$  есть напоръ, ушедшій на сообщеніе водѣ средней скорости  $v$  (величина  $c$ , см. § 21, можетъ быть принята равной 1,1; очень часто ее считаютъ равной 1), а  $\zeta$   $\frac{v^2}{2g}$  оцѣниваетъ имѣющееся всегда налицо сопротивленіе при входѣ въ каналъ (въ этомъ случаѣ  $\zeta = 0,06$ ), а также и могущія быть особыя сопротивленія въ рождѣ, напр., поддерживающихъ рѣшетокъ, не вполне открытыхъ щитовъ, изломовъ и искривленій оси канала и т. п. Только при большихъ  $L$  можно пренебречь послѣднимъ членомъ ур-ія (18); въ фабричныхъ же каналахъ, часто не длинныхъ, послѣдній

можетъ имѣть сравнительно большую величину. Къ сожалѣнію, вопросъ о сопротивленіяхъ въ каналахъ еще совершенно не изслѣдованъ.

Во второмъ случаѣ, когда каналъ существуетъ, всегда дано паденіе  $i$ , также можетъ быть дано живое сѣченіе, искомымъ является расходъ. Вопросъ рѣшается очень просто; однако рѣшеніе будетъ только вѣроятнымъ, а вѣдомъ наставлять нельзя, въ виду нѣкоторой неопредѣленности въ выборѣ ширины  $s$  (см. § 30).

Вопросъ можетъ быть поставленъ и такъ: какова будетъ глубина въ каналѣ при данныхъ паденіи дна и конфигураціи профиля (т.-е. напр., для трапеціи даны ширина по дну и откосъ) въ предположеніи равномернаго теченія, если черезъ каналъ пройдетъ расходъ  $Q$ ? Въ этомъ случаѣ можно пользоваться ур-немъ (17) или подобнымъ ему, при какомъ-нибудь другомъ профлѣ, употребляя способъ послѣдовательныхъ приближеній, такъ какъ шириною  $s$  приходится сначала задаваться.

Сдѣлаемъ еще слѣдующее замѣчаніе, касающееся такъ называемыхъ равнинныхъ профилей. Почти всегда приходится имѣть дѣло съ сильно неглубокими расходами въ рѣкахъ, при чемъ очень часто и низкія, и высокія воды текутъ по одному и тому же руслу, безъ особаго протока для глубокихъ водъ. Такое положеніе бываетъ не только для рѣкъ въ ихъ естественномъ состояніи, но и сохраняется при возведеніи исправительныхъ сооружений. При этомъ выходитъ, что во второмъ случаѣ достаточно точно, въ первомъ съ извѣстнымъ приближеніемъ можно считать, что все сѣченіе состоитъ изъ двухъ трапецій (фиг. 187)  $CDEF$  и  $ABGH$ . Если при доста-



Фиг. 187.

точно большой площади  $CDEF$  глубина  $h$ , не очень велика, то было бы ошибочно опредѣлять площадь живого сѣченія для всего профиля, находить средний гидравлическій радіусъ и т. д., такъ какъ это было бы равносильно предположенію, что повышенное треніе неглубокихъ участковъ  $BC$  и  $FG$  вліяетъ на замедленіе теченія въ глубокихъ частяхъ  $cCDEFF$ . Такое предположеніе было бы въ противорѣчіи съ дѣйствительными явленіями; ближе къ истинѣ предположеніе, что на участкахъ  $AbB$ ,  $bBCc$ ,  $cCDEFF$  и т. д. воды текутъ, не другъ на друга. Наоборотъ, если площадь  $CDEF$  представляется лишь незначительнымъ придаткомъ на всемъ сѣченіи, то правильнѣе считать все сѣченіе, среднюю степень шероховатости, средний радіусъ и т. д. Для иллюстраціи дадимъ слѣдующій примѣръ.

Пусть русло меженихъ водъ имѣетъ размѣръ  $b = 50 \text{ mtr}$ , глубину  $1 \text{ mtr}$  и откосъ  $m = 1.5$ . Пусть въ разливъ допускается подъемъ воды на высоту  $h_1 = 2 \text{ mtr}$  надъ долиной; откосъ  $m_1 = 2$ ; пусть имѣемъ для дѣйки степени шероховатости земляныя стѣнки по 3-й категоріи Базена, такъ что  $\gamma = 1.3$ , пусть, наконецъ, уклонъ  $i = 0.0001$ , а расходъ во время

разлива равенъ  $800 \text{ m}^3$ . Найдемъ необходимую ширину  $b_1 \dots b_2$ . Располагаемъ вычисленія слѣдующимъ образомъ.

Для участковъ *ABb* и *gGH*:

смачиваемый периметръ  $O = 2 \cdot 2 \sqrt{5} = 8,94 \text{ mtr.}$

живое сѣченіе  $F = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ mtr}^2$ ;

средній радіусъ  $R = 0,895 \text{ mtr.}$ , такъ что (по таблицѣ 44)  $c = 36,7$ ;

средняя скорость  $v = 36,7 \sqrt{0,895 \cdot 0,0001} = 0,347 \text{ mtr. sec.}$ ;

расходъ  $Q_1 = 2,776 \text{ mtr}^3/\text{sec.}$

Для участка *cDEff*:

смачиваемый периметръ  $O = 50 + 2 \cdot 4 \sqrt{3,25} = 64,4 \text{ mtr.}$ ;

живое сѣченіе  $F = 50 \cdot 6 + 2 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot 4 = 348 \text{ mtr}^2$ ;

средній радіусъ  $R = 5,4 \text{ mtr.}$ , такъ что (по таблицѣ 44)  $c = 55,8$ ;

средняя скорость  $v = 55,8 \sqrt{5,4 \cdot 0,0001} = 1,297 \text{ mtr. sec.}$

расходъ  $Q = 451 \text{ mtr}^3/\text{sec.}$

Для остальной части сѣченія остается расходъ  $800 - 453,8 - 346,2 \text{ mtr}^3/\text{sec}$ . Такъ какъ средній радіусъ здѣсь есть  $R = 2 \text{ mtr.}$ , а коэффициентъ  $c = 45,3$ , то вычисляемъ скорость  $v = 0,64 \text{ mtr. sec.}$  Слѣдовательно необходимое живое сѣченіе есть  $540 \text{ mtr}^2$ , а потому необходима ширина  $b_1 + b_2 = 270 \text{ mtr.}$

Полная ширина сѣченія  $AN = 340 \text{ mtr.}$

Для сравненія просчитаемъ, какой расходъ можно было бы опредѣлить для этого сѣченія съ опредѣленными выше размѣрами, если его не разбивать на части, а взять все цѣликомъ. Находимъ:

смачиваемый периметръ  $O = 8,94 + 64,4 + 270 = 343,5 \text{ mtr.}$ ;

живое сѣченіе  $F = 8 + 348 + 540 = 896 \text{ mtr}^2$ ;

средній радіусъ  $R = 2,61 \text{ mtr.}$ , такъ что  $c = 48,1$ ;

средняя скорость  $v = 48,1 \sqrt{2,61 \cdot 0,0001} = 0,776 \text{ mtr. sec.}$ ;

наконецъ расходъ  $Q = 696 \text{ mtr}^3/\text{sec.}$

Оказывается, при такомъ способѣ подсчета расходъ опредѣляется на  $13\%$  меньше. Можно отмѣтить какъ общее положеніе, что вычисленіе расхода такимъ порядкомъ въ отдѣльныхъ частяхъ сѣченія и дальнѣйшее суммирование этихъ частныхъ расходовъ даютъ большіе расходы на данное сѣченіе, чѣмъ вычисленіе сразу на все сѣченіе. При профиляхъ, подобныхъ вышеприведенному такое разбиваніе профиля на части вполнѣ законно, и особенно это уместно тогда, когда степени шероховатости дна въ разныхъ мѣстахъ различны: напр., такъ было бы, если бы часть *cDEF*, какъ наиболѣе глубокая и съ наиболѣе быстрымъ теченіемъ, была вымощена или укрѣплена какъ-либо, а остальные части дна и береговъ оставались въ ихъ естественномъ состояніи.

### § 33. Неравноѣрное установившееся движеніе въ каналахъ и рѣкахъ. Дифференціальное ур-іе профиля неравноѣрнаго течения.

Признакомъ неравноѣрнаго течения является переменное значение средней скорости. Съ другой стороны при установившемся движеніи расходъ долженъ оставаться постояннымъ. Поэтому ур-іе неразрывности, применимое къ разнымъ сѣченіямъ, приводитъ къ ряду равенствъ.

$$Q = F_1 v_1 = F_2 v_2 = \dots = Fv = const.$$

Отсюда видно, что при неравноѣрномъ, но установившемся движеніи живыя сѣченія, по существу, должны быть переменны. Далѣе, легко убедиться, что если мы станемъ применять ур-іе Д. Бернулли для такого движенія между двумя сѣченіями, то получимъ, что вся располагаемая работа для движенія каждаго килограмма, т.-е. вертикальное разстояніе между свободными поверхностями этихъ сѣченій, будетъ расходоваться не только на преодоленіе работы тренія на этомъ пути, что мы имѣли въ случаѣ равноѣрнаго движенія, но также на приращеніе, положительное или отрицательное, живой силы на томъ же пути. При этомъ нужно отмѣтить, что, въ силу переменнаго значенія какъ средней скорости, такъ и живого сѣченія, а слѣд., и средняго гидравлическаго радиуса, оцѣнка работы тренія на каждый килограммъ протекающей жидкости сопряжена съ затрудненіями, тѣмъ болѣе, что, строго говоря, нельзя утверждать, чтобы известное выраженіе потерпѣ напора на треніе при равноѣрномъ движеніи могло быть применимо къ движенію неравноѣрному.

Между тѣмъ неравноѣрное течение въ естественныхъ и искусственныхъ потокахъ встрѣчается очень часто: всякое обстоятельство, вызывающее измѣненіе величины живого сѣченія, ведетъ къ неравноѣрности течения. Поэтому разсмотрѣніе поставленнаго вопроса является настоятельно необходимымъ, и мы вкратцѣ изложимъ основныя положенія его теоріи.

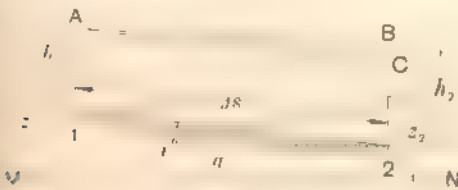
Попрѣжнему ограничимся случаемъ установившагося движенія, когда каналъ пропускаетъ опредѣленный постоянный расходъ  $Q$ . При заданной конфигураціи профиля величину живого сѣченія  $F$  всегда можно выразить черезъ его средний радиусъ; такимъ образомъ, ур-іе расхода и ур-іе равноѣрнаго течения, связывающія величины  $Q$ ,  $F$ ,  $v$ ,  $R$ ,  $i$ , вмѣстѣ съ выраженіемъ  $F$  по  $R$ , даютъ одно ур-іе, связывающее  $Q$ ,  $R$  и  $i$ ; полагая  $Q$  даннымъ, видимъ, что, для сохраненія равноѣрности течения, при великомъ измѣненіи  $R$  должно измѣняться соответствующимъ образомъ  $i$ , и наоборотъ, въ случаѣ измѣненія  $i$  должно измѣняться  $R$ . Если въ дѣйствительности такія переменныя не происходятъ, или если онѣ происходятъ, но не въ надлежащей степени, то равноѣрность течения нарушается. При этомъ понятно, что всякое мѣстное измѣненіе одного изъ факторовъ ( $R$  или  $i$ ) одинаково влечетъ на теченіе какъ выше даннаго мѣста, такъ и ниже его. Такъ, напр., если русло рѣки стѣснено какимъ-нибудь препятствіемъ (плотиной, порогомъ, устоями моста и т. п.), то очевидно, что для того, чтобы черезъ это уменьшенное сѣченіе прошелъ тотъ же расходъ  $Q$ , нужно, чтобы вода

приобрѣла нѣкоторую большую скорость, а для этого необходимъ нѣкоторый добавочный напоръ, который и образуется благодаря тому, что передъ препятствіемъ уровень воды нѣсколько поднимается. Поднятіе уровня, въ свою очередь, вызываетъ увеличеніе живого сѣченія передъ препятствіемъ; слѣдовательно, для того, чтобы расходъ  $Q$  прошелъ надъ препятствіемъ, движеніе передъ нимъ по необходимости должно быть замедленное. Съ другой стороны, ниже препятствія должно произойти новое замедленіе, т.-е. новое уменьшеніе той скорости, которая потребовалась для преодоленія препятствія. Совершенно такъ же влияют обстоятельства, не требующія образованія большой скорости, а сами создающія ее, напр., уступъ въ днѣ (водопадъ, водосливъ), увеличеніе уклона дна въ связи съ возможностью увеличенія уклона свободной поверхности и т. п.; напр., уступъ въ днѣ вызываетъ ускоренное теченіе передъ нимъ и можетъ вызвать замедленное теченіе ниже его. При этомъ нельзя утверждать, что влияніе каждаго такого обстоятельства распространяется, вообще, только на близлежащія части канала: какъ мы увидимъ ниже, оно сказывается въ нѣкоторыхъ случаяхъ и на очень далекихъ разстояніяхъ. Поэтому, вообще, можно сказать, что на каждомъ данномъ участкѣ, не представляющемъ ни одного изъ такихъ обстоятельствъ, движеніе тѣмъ не менѣе можетъ быть неравномѣрнымъ, такъ какъ подобныя обстоятельства могутъ оказаться или ниже его, или выше.

Въ настоящемъ параграфѣ мы займемся изслѣдованіемъ вопроса о томъ, какое теченіе.—замедленное, равномѣрное или ускоренное, устанавливается въ данномъ участкѣ потока подъ влияніемъ причинъ, выше или ниже этого участка лежащихъ, а также вопроса о томъ, какова будетъ при этомъ форма продольнаго профиля потока. Вопросъ этотъ представляется весьма сложнымъ, если изслѣдованіе вести со всею желательною строгостью и общностью, но онъ значительно упрощается, если разсматривать идеальный каналъ, обладающій слѣдующими свойствами. Онъ совершенно *прямолинейный*. Дно его *плоское*, съ постояннымъ положительнымъ уклономъ, т.-е. такимъ, при которомъ дно понижается по теченію. *Поперечный профиль* такого канала предположимъ *прямоугольнымъ* съ постоянной шириною  $l$ ; при этомъ допустимъ, что эта ширина такъ велика, что она всегда гораздо больше глубины, которую будемъ называть  $h$ ; при такомъ предположеніи въ выраженіи средняго гидравлическаго радиуса  $R = \frac{lh}{l+2h}$  можно въ знаменателѣ пренебречь величиной  $2h$  передъ  $l$  и считать, что средний радиусъ  $R \sim h$ . Далѣе, такъ какъ для *установившагося теченія*  $Q = const$  и съ другой стороны, такъ какъ мы условились считать ширину  $l$  постоянной, то вмѣсто полного канала будемъ разсматривать только единицу его ширины, называемъ черезъ  $q$  расходъ, пропускаемый этой частью канала; очевидно, что тогда  $Q = ql$ . Допустимъ еще, что движеніе таково, что ур-іе Д. Бернулли можетъ быть примѣняемо; это сводится къ допущенію того, что *отдѣльныя струйки* мало уклоняются отъ параллельности; невѣрность этого допущенія будемъ исправлять, какъ это было указано въ § 21, коэф-томъ  $\alpha$ , помня однако, что это возможно только до нѣкотораго предѣла. при рѣзкомъ нарушеніи параллельности струй ур-іе Д. Бернулли совершенно не можетъ быть при-



уменьшено. Наконецъ, предположимъ, что напоръ, *потерянный на треніе, вы-  
зывается точно такъ же при неравномъ движении, какъ и при равно-  
мерномъ.* Это послѣднее допущеніе совершенно произвольно, хотя приводитъ  
къ результатамъ, приблизительно пра-  
вильнымъ.



Фиг. 188.

Итакъ рассмотримъ часть  $\Delta s$  длины такого канала, заключенную между двумя весьма близкими сѣченіями **A 1** и **B 2** (фиг. 188). Примѣняя къ этой части канала ур-іе Д. Бернулли, получимъ, согласно съ обо-

значеніями, указанными на фигурѣ (**MN** есть плоскость сравненія):

$$\alpha \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \alpha \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta h.$$

Подъ  $h_i$  здѣсь подразумѣвается напоръ, затраченный на треніе на пути  $h_i$ . Далѣе, обозначивъ уклонъ дна черезъ  $i$  и предположивъ движеніе въ параллельными струями, имѣемъ слѣдующія два соотношенія:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = z_1 + \frac{1}{2} h_1 + \frac{p_0}{\gamma} = a + i \Delta s + h_1 + \frac{p_0}{\gamma},$$

$$\frac{p_2}{\gamma} + z_2 = a + h_2 + \frac{p_0}{\gamma}.$$

На основаніи этихъ соотношеній предыдущее ур-іе переписывается такъ:

$$\alpha \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right) - h_2 - h_1 - i \Delta s - h_1 \dots \dots \dots (19)$$

Два члена  $h_i$ , на основаніи сдѣланныхъ допущеній, напишемъ.

$$h_i = \frac{B}{2g} \cdot \frac{v}{R} \cdot v^2 = b \frac{v}{b} v^2,$$

гдѣ буквою  $b$  для сокращенія обозначена величина  $\frac{B}{2g} \cdot \frac{1}{v}$ . Внося это вы-  
раженіе въ ур-іе (19) и замѣняя имѣющіяся въ немъ двѣ разности зна-  
комъ  $\Delta$ , получаемъ:

$$\alpha \left( \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} \right) - b \frac{v_2}{b} v_2^2 - b \frac{v_1}{b} v_1^2 \dots \dots \dots (20)$$

Обликая сѣченія **A 1** и **B 2** безконечно близко другъ къ другу, т. е. пе-  
реходя отъ конечныхъ разностей къ дифференциаламъ, получаемъ

$$\alpha \frac{v}{g} \cdot dv - db - i ds - b \frac{v}{b} v^2 \dots \dots \dots (21)$$

Дифференцируя ур-іе расхода

$$q = i b \text{ const}$$

получаемъ:

$$r dh + h dv = 0,$$

откуда:

$$dv = - \frac{q dh}{h^2}.$$

Исключая теперь изъ (21)  $r$  и  $dr$  при помощи послѣднихъ соотношеній, находимъ:

$$\frac{\alpha}{q} \frac{q^2}{h^2} dh = dh - i ds + b \frac{q^2}{h^3} ds \dots \dots \dots (22)$$

Удобно исключить отсюда расходъ  $q$  черезъ слѣдующія величины. Обозначимъ черезъ  $H$  ту глубину, при которой черезъ единицу ширины канала проходитъ расходъ  $q$  при равномерномъ теченіи; такъ какъ и въ этомъ случаѣ средний радиусъ, по условію, можно положить равнымъ  $H$ . то на основаніи ур-ія равномернаго течения  $q_0 = c \sqrt{H i}$  или  $b v_0^2 = H i$ , а также на основаніи ур-ія расхода  $q = v_0 H$ , получаемъ:

$$b v_0^2 = H^2 i \dots \dots \dots (23)$$

Такимъ образомъ, глубина равномернаго течения  $H$  является величиной вполне опредѣленной. Что же касается входящей въ это ур-іе величины  $b$ , то, строго говоря, она не равна величинѣ  $b$  предыдущаго ур-ія, но и не можетъ сильно отъ нея отличаться, если мы будемъ разсматривать часть канала, въ которой  $b$  не особенно отличается отъ  $H$ . Поэтому, для простоты вычисленій допустимъ, что эти оба  $b$  тождественны, а слѣдовательно, и постоянны. Внося изъ послѣдняго ур-ія величину  $q^2$  въ ур-іе (22), получимъ, послѣ соответственной перестановки членовъ и сокращенія:

$$i ds - dh = \frac{H^2}{h^3} \left( i ds - \frac{c i}{b q} dh \right) \dots \dots \dots (24)$$

Ур-іе это связываетъ постоянныя  $H$ ,  $c$ ,  $i$ ,  $b$  и  $q$  съ двумя переменными  $s$  и  $h$ , входящими въ видѣ дифференциаловъ. Такимъ образомъ, оно представляетъ собою дифференціальное ур-іе профиля неравномернаго течения; при помощи его координата  $h$  этого профиля опредѣляется въ функции разстоянія  $s$ . Изслѣдованіе ур-ія (24) и дастъ отвѣтъ на поставленный выше вопросъ о характерѣ течения на данномъ участкѣ потока.

Прежде всего выдѣлимъ вліяніе уклона  $i$ , который, конечно, можетъ быть различенъ. Раземотримъ три случая, въ зависимости отъ величины уклона, дающаго множителю  $\frac{c i}{b q}$  значеніе I)  $\frac{c i}{b q} = 1$ ; II)  $\frac{c i}{b q} < 1$ ; III)  $\frac{c i}{b q} > 1$ .

Принимаемъ среднія значенія:  $b = \frac{1}{50}$ ,  $0,0004$ ,  $q = 9,81 \text{ mgr. sec}^2$ ; для  $\alpha$  при прямоугольномъ каналѣ положимъ по Буссенюку  $\alpha = 1,085$  \*) Тогда находимъ, что первому случаю соответствуетъ уклонъ  $i_0 = 0,0036$  или  $3,6^{\circ}_{00}$ ; во второмъ случаѣ онъ меньше этой величины, въ третьемъ—больше.

*Случай I.*

$$\frac{\alpha i_0}{bq} = 1; \quad i_0 = 0,0036.$$

Ур-е (24) въ этихъ условіяхъ принимаетъ видъ:

$$i_0 ds - dh = \frac{H^2}{h^3} (i_0 ds - dh) \dots \dots \dots (25)$$

Это ур-е удовлетворяется, во-первыхъ, при  $h = H$ , т.е. когда потокъ течетъ равномерно. Понятно, что тогда  $dh = 0$ , и, слѣдовательно, профиль свободной поверхности есть прямая, параллельная дну, такъ какъ глубина  $h$  постоянна.

Во-вторыхъ, оно удовлетворяется при всякомъ  $h$ , если  $i_0 ds = dh$ , такъ что  $\frac{dh}{ds} = i_0$ . Изъ чертежа 188 видно, что съ малой погрѣшностью можно принять  $\frac{dh}{ds} = \sin \text{BAC}$ ; а такъ какъ уклонъ  $i_0$  вообще не великъ, то  $\sin$  угла можно замѣнить угломъ и написать, что ур-е (25) удовлетворяется также при  $\text{BAC} = i_0$ . Это показываетъ, что профиль **AB** горизонталенъ. Итакъ:

а) если уклонъ дна таковъ, что  $\frac{\alpha i_0}{bq} = 1$ , и если гдѣ-нибудь въ потокѣ



Фиг. 189.

глубина  $h$  больше  $H$ , то профиль свободной поверхности есть горизонтальная прямая **AB** (фиг. 189). Если надъ плотиною въ точкѣ **B** глубина потока превышаетъ глубину равномернаго течения на величину  $\Delta h = m$ , то изъ ур-я  $i_0 As = \Delta h$ , получимъ, что

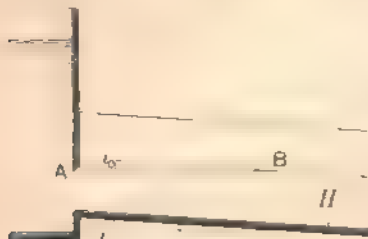
длина  $As$  потока, на которой профиль остается горизонтальнымъ, считая по дну, есть

$$As = \frac{m}{i_0}.$$

\*) Собственно говоря, значеніе 1,085 *Boussinesq* даетъ ур-я (70), (80 bis) и (85) на стр. 86—92 его работы *Essai sur la thѣorie des eaux courantes*) не для той величины, которую мы назвали черезъ  $\alpha$ ; или, еще точнѣе, онъ д. казываетъ что ту поправку, которую мы дѣлаемъ коэф-томъ  $\alpha$ , вѣрно дѣлать иначе, и на основаніи еще другихъ соображеній, кромѣ приведеннаго у насъ по Каролису. Тѣмъ не менѣе дѣль его коэф-та 1,085 и нашего  $\alpha$  одна и та же, считаясь съ непараллельностью струи, происходящей отъ шероховатости стѣнки. Поэтому мы считаемъ возможнымъ примѣнять тутъ коэф-тъ *Boussinesq*'s.

Поднявшись по рѣкѣ вверх на этотъ путь  $h$ , мы придемъ въ точку  $A$ , гдѣ глубина  $h = H$ , и, слѣдовательно, выше этой точки движеніе равномерное.

б) Можно себѣ представить случай, когда въ какомъ-нибудь мѣстѣ потока глубина  $h$  меньше  $H$ , глубины равномернаго течения. Это значитъ, что въ этомъ мѣстѣ дѣйствительная скорость течения больше, нежели скорость равномернаго течения. Такой случай мы имѣемъ, напримеръ, на фиг. 190, когда въ желобъ или каналъ, поставленный подъ угломъ



Фиг. 190.

и  $i_0 = 0,0036$ , вода выливается изъ отверстія  $A$  подъ такимъ напоромъ, что скорость  $v'$  въ  $A$  больше, нежели скорость равномернаго движенія того же количества жидкости въ желобѣ. Слѣдовательно, и здѣсь, тотчасъ по выходѣ изъ отверстія, свободная поверхность будетъ сначала горизонтальна на протяженіи отъ  $A$  до  $B$ , гдѣ глубина  $h$  сравняется съ  $H$ ; ниже этого мѣста можетъ установиться равномерное теченіе.

Подобный же случай встрѣчаемъ за водопадомъ, въ которомъ вода приобретаетъ скорость большую, нежели скорость равномернаго течения; встрѣчаемъ и при переливаніи воды черезъ плотину и т. д.

Замѣтимъ, что  $b$  зависитъ отъ средняго гидравлическаго радиуса или, въ нашемъ случаѣ, отъ глубины, а потому величина  $i_0 = 3,6 \cdot 10^{-4}$  есть только средняя: съ увеличеніемъ глубины это значеніе  $i_0$  уменьшается, такъ какъ, по предыдущему, увеличеніе средняго радиуса уменьшаетъ коэф-тъ  $b$ . Не безъ влияния остается, конечно, и степень шероховатости.

*Случай II.*

$$\frac{\omega}{b_0 i} < 1 \quad i = 0,0036.$$

Это есть случай каналовъ съ слабымъ паденіемъ. Введемъ обозначеніе:

$$\frac{\omega}{b_0 i} H^2 = H_1^2,$$

такъ что

$$H_1 = H \sqrt{\frac{\omega}{b_0 i}} \dots \dots \dots (26)$$

Понятно, что  $H_1$  есть тоже некоторая глубина, мы назовемъ ее *критической*. Въ нашемъ случаѣ  $H_1 < H$ . Ур-не (24) переписывается теперь такъ:

$$i ds = dh \frac{H^3}{h^3}, \quad ds = \frac{H_1^2}{h^3} dh;$$

отсюда

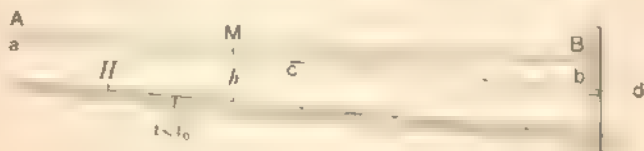
$$i ds = \frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H_1^2} dh \dots \dots \dots (27)$$

При положительномъ  $ds$ , смотря по знаку дроби во второй части,  $dh$  будетъ или положительно, или отрицательно (согласно тому, какъ мы перейдемъ отъ ур-я (19) къ ур-ю (20), мы должны считать  $ds$  положительнымъ направленно течению, а  $dh$  положительнымъ, если оно обозначаетъ увеличение глубины. При такомъ условіи, вмѣстѣ съ увеличеніемъ  $ds$ , т. е. казаясь по течению, мы будемъ замѣчать или увеличение глубины, или уменьшеніе, смотря по знаку дроби во второй части ур-я (27). Дробь  $i$  положительна, пока  $h > H$  (т. е. слѣдовательно, больше  $H_1$ ) или пока  $H_1 < a$ , слѣдовательно, меньше  $H$ . Она отрицательна при  $H_1 < l < H$ . Вотризмъ жебъ эти три случая.

Случай II, 1:

$$h > H.$$

Допустимъ, что имѣется препятствіе — напримеръ, плотина, — удерживающая глубину  $h$  на какомъ-нибудь мѣстѣ  $M$  потока (фиг. 191) большею,



Фиг. 191.

т. е. глубина равномернаго теченія  $H$ . Въ данномъ случаѣ при  $ds > 0$  также  $> 0$ ; слѣдовательно, глубина по течению, т. е. съ приближеніемъ къ плотинѣ, возрастаетъ. Вмѣстѣ съ увеличеніемъ глубины  $h$ , дробь  $\frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3}$  уменьшается, оставаясь все-таки  $> 1$ . Сообразно съ этимъ, величина  $\frac{dh}{ds}$ , т. е. тангенсъ угла между касательной къ профилю и направлениемъ  $s$ , т. е. направлениемъ  $ad$ , по ур-ю (27) все время остается  $< i$ , и лишь въ предѣлѣ, при  $h \rightarrow \infty$ , т. е. въ бесконечно удаленной точкѣ профили разматриваемая дробь обращается въ 1, а  $\frac{dh}{ds}$  дѣлается равнымъ  $i$ . Другими словами, на всемъ профили совсемъ нѣтъ горизонтальныхъ элементовъ, — даже надъ плотинной профиль имѣетъ горизонтальную линию  $cb$  только асимптотой.

Съ другой стороны, для точки, въ которой было бы  $h = H$ , т. е. въ которой теченіе равномерно, мы получимъ по ур-ю (27), что  $i ds = 0$ . Поэтому при  $\frac{v}{v_1} < 1$  профиль подпругенной воды коснется профилю равномернаго движенія только бесконечно далеко, т. е. не коснется никогда. Это становится яснымъ, если мы пойдѣмъ вверхъ по рѣкѣ, т. е. считая  $ds$  отрицательнымъ. При разматриваемомъ значеніи дроби въ правой части ур-я (27)  $i$  также отрицательно; но по мѣрѣ того, какъ  $h$  приближается къ  $H$ , дробь  $\frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3}$  все увеличивается, а потому весьма малымъ  $dh$  будутъ



равномѣрнаго теченія *II*. Положеніе же *CA* легко находится по даннымъ главы II изъ условий протеканія черезъ плотину расхода, имѣющаго черезъ нее переливаться, и размѣровъ отверстій, сдѣланныхъ въ ней. При этомъ, если плотина водосливная, то по ур-ю расхода въ водосливѣ находимъ необходимую высоту стоянія воды надъ порогомъ водослива, при чемъ положеніе послѣдняго должно быть извѣстно. Если плотина вод-пропускная, т.-е. имѣть отверстіе, черезъ которое вода выливается подъ напоромъ, то ур-е расхода дастъ высоту стоянія воды надъ центромъ тяжести отверстія, положеніе и размѣры котораго опять-таки должны быть извѣстны; при истеченіи подъ уровень найдемъ высоту стоянія воды надъ уровнемъ ся за плотиной и т. д. Само собою разумѣется, что при этомъ необходимо надлежащимъ образомъ какъ писать ур-е расхода, такъ и выбирать числовое значеніе коэф-та расхода. Часто, наоборотъ, особые соображенія заранѣе обуславливаютъ наивысшій возможный подъемъ воды передъ плотиной, а тѣмъ самымъ опредѣляется наивысшее возможное положеніе точки *A* и прямой *CA*; вышеупомянутыя ур-я расхода служатъ тогда для опредѣленія необходимыхъ площадей для отверстій, необходимой длины водослива и т. д.

Въ виду того, что рассматриваемый случай для нашихъ рѣкъ со слабымъ паденіемъ является самымъ важнымъ, остановимся на интегрированіи ур-я (27), съ цѣлью получения въ конечной формѣ кривой профиля подпруженной воды. Для этого переписываемъ это уравненіе такъ:

$$i ds = \left[ 1 + \frac{b^3 - \frac{a}{b} H^3}{b^3 H^3} \right] dh = \left[ 1 + \frac{1 - \frac{a}{b} H^3}{H^3 - 1} \right] dh \dots (28)$$

Производимъ замѣну переменнаго, полагая

$$\frac{h}{H} = z; \quad \text{поэтому} \quad dh = H dz.$$

Уравненіе (28) принимаетъ видъ:

$$i ds = H \left[ 1 + \frac{1 - \frac{a}{b} H^3}{z^3 - 1} \right] dz \dots (29)$$

Въ виду того, что количество  $1 - \frac{a}{b} H^3$  есть величина постоянная, все сводится къ интегрированіи выраженія  $\frac{dz}{z^3 - 1}$ . Поэтому и денитируемъ отъ интегралъ

$$\int \frac{dz}{z^3 - 1}$$

Разлагая дробь  $\frac{1}{z^3 - 1}$  на элементарныя, получаемъ:

$$\frac{1}{z^3 - 1} = \frac{1}{(z - 1)(z^2 + z + 1)} = \frac{(z^2 + z + 1) - (z - 1)(z + 2)}{3(z - 1)(z^2 + z + 1)} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{z - 1} - \frac{z + 2}{z^2 + z + 1} \right]$$

Далѣ:

$$z = \frac{1}{2} \frac{1 - 3z^2}{z^2 - 2z - 4} = \frac{1}{2} \frac{1 - 3z^2}{z^2 - 2z - 4} \quad (2z - 1)^2 - 1$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 - 3z^2}{z^2 - 2z - 4} \left( \frac{2z - 1}{1 - 3} \right)^2 - 1$$

Тѣмъ чт :

$$z = \frac{1}{1 - 3} \left[ \frac{1}{1} \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 - 2z - 4} + \frac{1}{3} \left( \frac{2z - 1}{1 - 3} \right)^2 - 1 \right]$$

Интеграль каждаго изъ этихъ членовъ берется просто.

$$\int \frac{dz}{z - 1} = \ln |z - 1| + C_1,$$

$$\int \frac{z + \frac{1}{2}}{z^2 - 2z - 4} dz = \frac{1}{2} \int d \left[ \frac{z - \frac{1}{2} - 3}{z - 2 - 4} \right] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z - \frac{1}{2} - 3}{z - 2 - 4} \right| + C_2,$$

$$\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} dz}{\left( \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} = \int \frac{d \left( \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right)}{\left( \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1} = \operatorname{arctg} \left( \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right) + C_3.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{ds}{s^3 - 1} = \frac{1}{3} \ln |s - 1| + \frac{1}{6} \ln \left| \frac{s - \frac{1}{2} - 3}{s - 2 - 4} \right| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left( \frac{2s + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(s - 1)^2}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2s + 1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Итакъ ур-е (29) послѣ интегрированія даетъ

$$is = H \left\{ z + \left( 1 - \frac{ci}{bi} \right) \left[ \frac{1}{6} \ln \frac{(z - 1)^2}{z^2 - z - 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right) + C \right] \right\},$$

гдѣ подъ знакомъ произвольнаго постояннаго  $C$  собраны все постоянныя, введенныя интегрированіемъ.

Положимъ теперь:

$$C = C_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2}.$$

Тогда предыдущее ур-е профиля въ интегральной формѣ переписется такъ:

$$is = H \left\{ z + \left( 1 - \frac{ci}{bi} \right) \left[ \frac{1}{6} \ln \frac{(z - 1)^2}{z^2 - z - 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2z + 1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] + C_1 \right\}$$



Для краткости письма введем обозначение:

$$\frac{1}{6} h_0 \frac{(z-1)^2}{z^2-1} = \frac{1}{3} \left[ \operatorname{arccoth} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) - \frac{\pi}{2} \right] = \varphi(z).$$

Очевидно, что функцию  $\varphi(z)$  можно вычислять для всякого данного  $z$  при помощи ур-я:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{6} h_0 \frac{z^2+z-1}{(z-1)^2} = \frac{1}{3} \left[ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccoth} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} h_0 \frac{z^2-z-1}{(z-1)^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arccoth} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \end{aligned}$$

И теперь ур-е профиля переписется так:

$$s = H \left\{ z + \left( 1 - \frac{v^2}{bg} \right) [ -\varphi(z) + C_1 ] \right\} \quad H z = H \left( 1 - \frac{v^2}{bg} \right) [ \varphi(z) + C_1 ].$$

Для определения постоянного интегрирования  $C_1$  положим, что для  $z_0$  соответствует значение переменного  $s$ , равное  $s_0$ , тогда получаем:

$$s_0 = H z_0 = H \left( 1 - \frac{v^2}{bg} \right) [ \varphi(z_0) + C_1 ].$$

Исключая теперь  $C_1$ , найдем, очевидно:

$$s - s_0 = H ( z - z_0 ) = H \left( 1 - \frac{v^2}{bg} \right) [ \varphi(z) - \varphi(z_0) ] \dots \dots (30)$$

По этому ур-ю, данному Брессом<sup>\*)</sup>, легко решается вопрос о томъ, какомъ разстоянии ( $s - s_0$ ) вниз по течению отъ даннаго мѣста, гдѣ глубина есть  $h_0 \left( z_0 = \frac{h_0}{H} \right)$ , находится то мѣсто, гдѣ глубина будетъ  $h \left( z = \frac{h}{H} \right)$ . Рѣшене облегчается съ помощью составленной Брессомъ таблицы значений функции  $\varphi(z)$  для разныхъ  $z$  (см. таблица 45). Понятно, что и вторая часть ур-я (30) будетъ отрицательна (а при  $\frac{v^2}{bg} < 1$  это можно только, если задано  $l < h_0$ ), то это значить, что искомое мѣсто не отъ даннаго не вниз по течению, а вверх. Обратный вопросъ, — каковы глубины на данномъ разстоянн, рѣшается путемъ последовательныхъ подстановокъ.

\* M. Bresse, Cours de mécanique appliquée. II partie Hydraulique, Paris, 1860.

**Таблица 45 (Бресса).**

Значения  $\varphi(z)$  вь ур-ин (30) (§ 34).

$z$	$\varphi(z)$	Разности.	$z$	$\varphi(z)$	Разности.
0,00	— 6046	0,0180	0,50	0,0878	0,0115
0,01	— 5946	0,1000	0,51	— 0,0763	0,0116
0,02	— 5846	0,0100	0,52	— 0,0647	0,0117
0,03	— 5746	0,1000	0,53	— 0,0530	0,0118
0,04	— 5646	0,0100	0,54	— 0,0412	0,0119
0,05	— 5546	0,1000	0,55	— 0,0293	0,0121
0,06	— 5446	0,0100	0,56	— 0,0172	0,0122
0,07	— 5346	0,1000	0,57	— 0,0050	0,0124
0,08	— 5246	0,0100	0,58	— 0,0071	0,0125
0,09	— 5146	0,0100	0,59	— 0,0199	0,0126
0,10	— 5046	0,0100	0,60	0,0325	0,0129
0,11	— 4946	0,0101	0,61	0,0454	0,0130
0,12	— 4845	0,0100	0,62	0,0584	0,0132
0,13	— 4744	0,0100	0,63	0,0716	0,0135
0,14	— 4645	0,0100	0,64	0,0851	0,0136
0,15	— 4545	0,0101	0,65	0,0987	0,0140
0,16	— 4444	0,0100	0,66	0,1127	0,0141
0,17	— 4344	0,0101	0,67	0,1268	0,0145
0,18	— 4243	0,0100	0,68	0,1413	0,0147
0,19	— 4144	0,0101	0,69	0,1560	0,0151
0,20	— 4042	0,0101	0,700	0,1711	0,0176
0,21	— 3941	0,0101	0,705	0,1787	0,0177
0,22	— 3840	0,0101	0,710	0,1864	0,0179
0,23	— 3739	0,0101	0,715	0,1943	0,0179
0,24	— 3638	0,0102	0,720	0,2022	0,0180
0,25	— 3536	0,0102	0,725	0,2102	0,0182
0,26	— 3434	0,0101	0,730	0,2184	0,0182
0,27	— 3333	0,0103	0,735	0,2266	0,0184
0,28	— 3230	0,0102	0,740	0,2350	0,0184
0,29	— 3128	0,0103	0,745	0,2434	0,0186
0,30	— 3025	0,0102	0,750	0,2520	0,0187
0,31	— 2923	0,0104	0,755	0,2607	0,0189
0,32	— 2819	0,0103	0,760	0,2696	0,0189
0,33	— 2716	0,0104	0,765	0,2785	0,0192
0,34	— 2612	0,0104	0,770	0,2877	0,0193
0,35	— 2508	0,0105	0,775	0,2970	0,0194
0,36	— 2403	0,0105	0,780	0,3064	0,0196
0,37	— 2298	0,0106	0,785	0,3160	0,0198
0,38	— 2192	0,0106	0,790	0,3258	0,0199
0,39	— 2086	0,0106	0,795	0,3357	0,0202
0,40	— 1980	0,0108	0,800	0,3454	0,0203
0,41	— 1872	0,0107	0,805	0,3552	0,0206
0,42	— 1765	0,0109	0,810	0,3658	0,0208
0,43	— 1656	0,0109	0,815	0,3766	0,0210
0,44	— 1547	0,0109	0,820	0,3886	0,0212
0,45	— 1438	0,0111	0,825	0,3998	0,0216
0,46	— 1327	0,0111	0,830	0,4114	0,0218
0,47	— 1216	0,0112	0,835	0,4232	0,0221
0,48	— 1104	0,0113	0,840	0,4353	0,0225
0,49	— 991	0,0113	0,845	0,4478	0,0227

**Таблица 45 (Бресса).**

*(Продолжение.)*

$z$	$\psi(z)$	Разности.	$z$	$\psi(z)$	Разности.
0,850	0,4605	0,0132	0,960	0,9402	0,0178
0,855	0,4787	0,0135	0,962	0,9580	0,0187
0,860	0,4872	0,0140	0,964	0,9757	0,0198
0,865	0,5012	0,0144	0,966	0,9965	0,0209
0,870	0,5156	0,0149	0,968	1,0174	0,0222
0,875	0,5305	0,0154	0,970	1,0396	0,0216
0,880	0,5449	0,0160	0,971	1,0512	0,0220
0,885	0,5619	0,0166	0,972	1,0632	0,0225
0,890	0,5785	0,0173	0,973	1,0757	0,0229
0,895	0,5958	0,0180	0,974	1,0886	0,0234
0,900	0,6138	0,0175	0,975	1,1020	0,0240
0,902	0,6213	0,0176	0,976	1,1160	0,0245
0,904	0,6289	0,0177	0,977	1,1305	0,0252
0,906	0,6366	0,0179	0,978	1,1457	0,0258
0,908	0,6445	0,0180	0,979	1,1615	0,0266
0,910	0,6523	0,0182	0,980	1,1781	0,0274
0,912	0,6607	0,0184	0,981	1,1955	0,0281
0,914	0,6691	0,0185	0,982	1,2139	0,0294
0,916	0,6776	0,0188	0,983	1,2333	0,0305
0,918	0,6864	0,0189	0,984	1,2538	0,0319
0,920	0,6953	0,0192	0,985	1,2757	0,0333
0,922	0,7045	0,0193	0,986	1,2980	0,0351
0,924	0,7138	0,0196	0,987	1,3241	0,0370
0,926	0,7234	0,0198	0,988	1,3511	0,0393
0,928	0,7332	0,0199	0,989	1,3804	0,0421
0,930	0,7433	0,0204	0,990	1,4125	0,0455
0,932	0,7537	0,0206	0,991	1,4480	0,0496
0,934	0,7643	0,0210	0,992	1,4876	0,0548
0,936	0,7753	0,0213	0,993	1,5324	0,0617
0,938	0,7866	0,0216	0,994	1,5841	0,0661
0,940	0,7982	0,0220	0,995	1,6452	0,0748
0,942	0,8101	0,0224	0,996	1,7200	0,0962
0,944	0,8229	0,0228	0,997	1,8162	0,1355
0,946	0,8354	0,0233	0,998	1,9517	0,2314
0,948	0,8487	0,0237	0,999	2,1831	$\infty$
0,950	0,8624	0,0243	1,000	$\infty$	$\infty$
0,952	0,8767	0,0249			
0,954	0,8916	0,0255			
0,956	0,9071	0,0262			
0,958	0,9233	0,0269			

$1:z$	$z$	$\psi(z)$	Разности.	$1:z$	$z$	$\psi(z)$	Разности.
1,000	1,0000	$\sim$	$\sim$	0,995	1,0050	1,6469	-0,0068
0,999	1,0010	2,1834	-0,2311	0,994	1,0060	1,6861	-0,0513
0,998	1,0020	1,6523	-0,1351	0,993	1,0070	1,7348	-0,0416
0,997	1,0030	1,1817	-0,0959	0,992	1,0081	1,4902	-0,0392
0,996	1,0040	1,7213	0,0744	0,991	1,0091	1,4519	0,0351

**Таблица 45 (Бресса).**

*(Продолжение.)*

$1 : \varepsilon$	$\varepsilon$	$\psi(\varepsilon)$	Разности.	$1 : \varepsilon$	$\varepsilon$	$\psi(\varepsilon)$	Разности.
0,990	1,010	1,4150	0,0318	0,910	1,090	0,6839	0,0073
0,989	1,011	1,3841	— 0,0290	0,908	1,1013	0,6766	— 0,0071
0,988	1,012	1,3551	— 0,0267	0,906	1,1038	0,6695	— 0,0070
0,987	1,013	1,3284	— 0,0247	0,904	1,1062	0,6625	— 0,0069
0,986	1,014	1,3037	— 0,0230	0,902	1,1086	0,6556	— 0,0067
0,985	1,015	1,2807	— 0,0215	0,900	1,1111	0,6489	— 0,0162
0,984	1,016	1,2592	— 0,0202	0,898	1,1133	0,6427	— 0,0151
0,983	1,017	1,2390	— 0,0191	0,896	1,1236	0,6173	— 0,0148
0,982	1,018	1,2199	— 0,0180	0,895	1,1299	0,6025	— 0,0141
0,981	1,019	1,2019	— 0,0171	0,894	1,1364	0,5884	— 0,0135
0,980	1,020	1,1848	— 0,0162	0,875	1,1429	0,5740	— 0,0130
0,979	1,021	1,1686	— 0,0156	0,870	1,1494	0,5619	— 0,0125
0,978	1,022	1,1531	— 0,0148	0,865	1,1561	0,5491	— 0,0120
0,977	1,023	1,1383	— 0,0142	0,860	1,1628	0,5374	— 0,0116
0,976	1,024	1,1241	— 0,0136	0,856	1,1696	0,5258	— 0,0112
0,975	1,025	1,1105	— 0,0131	0,850	1,1765	0,5146	— 0,0109
0,974	1,026	1,0974	— 0,0126	0,845	1,1834	0,5037	— 0,0105
0,973	1,027	1,0848	— 0,0121	0,840	1,1905	0,4932	— 0,0101
0,972	1,028	1,0727	— 0,0117	0,835	1,1976	0,4831	— 0,0098
0,971	1,029	1,0610	— 0,0113	0,830	1,2048	0,4733	— 0,0096
0,970	1,030	1,0497	— 0,0215	0,825	1,2121	0,4637	— 0,0093
0,968	1,031	1,0282	— 0,0202	0,820	1,2195	0,4544	— 0,0090
0,966	1,032	1,0080	— 0,0191	0,815	1,2270	0,4454	— 0,0087
0,964	1,033	0,9890	— 0,0181	0,810	1,2346	0,4367	— 0,0086
0,962	1,034	0,9709	— 0,0173	0,805	1,2422	0,4281	— 0,0083
0,960	1,035	0,9539	— 0,0163	0,800	1,2500	0,4198	— 0,0081
0,958	1,036	0,9376	— 0,0155	0,795	1,2579	0,4117	— 0,0078
0,956	1,037	0,9221	— 0,0148	0,790	1,2658	0,4039	— 0,0077
0,954	1,038	0,9073	— 0,0142	0,785	1,2739	0,3962	— 0,0076
0,952	1,039	0,8931	— 0,0136	0,780	1,2821	0,3886	— 0,0073
0,950	1,040	0,8795	— 0,0131	0,775	1,2905	0,3813	— 0,0072
0,948	1,041	0,8665	— 0,0126	0,770	1,2987	0,3741	— 0,0070
0,946	1,042	0,8540	— 0,0121	0,765	1,3072	0,3671	— 0,0068
0,944	1,043	0,8418	— 0,0117	0,760	1,3158	0,3603	— 0,0067
0,942	1,044	0,8301	— 0,0113	0,755	1,3245	0,3536	— 0,0066
0,940	1,045	0,8188	— 0,0109	0,750	1,3333	0,3470	— 0,0064
0,938	1,046	0,8079	— 0,0106	0,745	1,3422	0,3406	— 0,0063
0,936	1,047	0,7973	— 0,0102	0,740	1,3514	0,3343	— 0,0061
0,934	1,048	0,7871	— 0,0099	0,735	1,3605	0,3282	— 0,0061
0,932	1,049	0,7772	— 0,0097	0,730	1,3699	0,3221	— 0,0059
0,930	1,050	0,7675	— 0,0094	0,725	1,3793	0,3162	— 0,0058
0,928	1,051	0,7581	— 0,0091	0,720	1,3889	0,3104	— 0,0057
0,926	1,052	0,7490	— 0,0089	0,715	1,3986	0,3047	— 0,0056
0,924	1,053	0,7401	— 0,0086	0,710	1,4085	0,2991	— 0,0054
0,922	1,054	0,7315	— 0,0084	0,705	1,4184	0,2937	— 0,0054
0,920	1,055	0,7231	— 0,0082	0,700	1,4286	0,2883	— 0,0105
0,918	1,056	0,7149	— 0,0080	0,695	1,4493	0,2778	— 0,0101
0,916	1,057	0,7069	— 0,0079	0,690	1,4706	0,2677	— 0,0097
0,914	1,058	0,6990	— 0,0076	0,685	1,4925	0,2580	— 0,0094
0,912	1,059	0,6914	— 0,0075	0,680	1,5152	0,2486	— 0,0091

Таблица 45 (Бресса).

(Продолжение.)

$i$	$z$	$\cos z$	Разности.	$i$	$z$	$\cos z$	Разности.
0,65	1,5385	0,2395	— 0,0089	0,30	3,3333	0,0455	— 0,0030
0,64	1,5628	0,2306	— 0,0085	0,29	3,4483	0,0425	— 0,0030
0,63	1,5873	0,2221	— 0,0083	0,28	3,5714	0,0395	— 0,0028
0,62	1,6120	0,2138	— 0,0080	0,27	3,7037	0,0367	— 0,0027
0,61	1,6368	0,2058	— 0,0078	0,26	3,8462	0,0340	— 0,0026
0,60	1,6617	0,1980	— 0,0075	0,25	4,0000	0,0314	— 0,0024
0,59	1,6867	0,1905	— 0,0073	0,24	4,1667	0,0290	— 0,0024
0,58	1,7118	0,1832	— 0,0071	0,23	4,3478	0,0266	— 0,0023
0,57	1,7371	0,1761	— 0,0069	0,22	4,5455	0,0243	— 0,0022
0,56	1,7627	0,1692	— 0,0067	0,21	4,7619	0,0221	— 0,0020
0,55	1,8182	0,1625	— 0,0065	0,20	5,0000	0,0201	— 0,0020
0,54	1,8519	0,1560	— 0,0063	0,19	5,2632	0,0181	— 0,0019
0,53	1,8868	0,1497	— 0,0062	0,18	5,5556	0,0162	— 0,0017
0,52	1,9231	0,1435	— 0,0059	0,17	5,8824	0,0145	— 0,0017
0,51	1,9608	0,1376	— 0,0058	0,16	6,2500	0,0128	— 0,0015
0,50	2,0000	0,1318	— 0,0056	0,15	6,6667	0,0113	— 0,0015
0,49	2,0408	0,1262	— 0,0055	0,14	7,1429	0,0098	— 0,0013
0,48	2,0833	0,1207	— 0,0053	0,13	7,6923	0,0085	— 0,0013
0,47	2,1277	0,1154	— 0,0052	0,12	8,3333	0,0072	— 0,0011
0,46	2,1739	0,1102	— 0,0050	0,11	9,0909	0,0061	— 0,0011
0,45	2,2222	0,1052	— 0,0049	0,10	10,0000	0,0050	— 0,0009
0,44	2,2727	0,1003	— 0,0048	0,09	11,1111	0,0041	— 0,0009
0,43	2,3246	0,0955	— 0,0046	0,08	12,5000	0,0032	— 0,0007
0,42	2,3780	0,0909	— 0,0044	0,07	14,2857	0,0025	— 0,0007
0,41	2,4330	0,0865	— 0,0044	0,06	16,6667	0,0018	— 0,0006
0,40	2,4900	0,0821	— 0,0042	0,05	20,0000	0,0013	— 0,0005
0,39	2,5511	0,0779	— 0,0041	0,04	25,0000	0,0008	— 0,0004
0,38	2,6166	0,0738	— 0,0039	0,03	33,3333	0,0005	— 0,0003
0,37	2,6877	0,0699	— 0,0039	0,02	50,0000	0,0002	— 0,0002
0,36	2,7758	0,0660	— 0,0037	0,01	100,0000	0,0001	— 0,0001
0,35	2,8571	0,0623	— 0,0036	0,00	$\infty$	0,0000	—
0,34	2,9112	0,0587	— 0,0034				
0,33	3,0303	0,0553	— 0,0034				
0,32	3,1250	0,0519	— 0,0033				
0,31	3,2258	0,0486	— 0,0031				

Однако для нашего случая  $\frac{c_1}{h_1} > 1$  неизбежно обратиться к другому, более простому решению вопроса. Само по себе ур-е 30 Бресса является только приближенным решением, так как оно выведено в предположении, что угол наклона постояннаго прямого, огибаюаго профиля и т. д. К этому же выводу, что путь выходящего луча равен  $\frac{c_1}{h_1} - 1$ , а также  $h = H$ , т. е. случаем, когда  $\frac{h}{H}$  больше единицы, приходим в ур-е 28  $\frac{c_1^2}{h_1^2} > 1$ . Отсюда следует, что можно, чем меньше  $i$  и тем меньше глубина  $H = R$  (или  $r$ ), тем скорее 28 переходит в ур-е:

$$i ds = \left(1 + \frac{H^2}{h^2} - H^2\right) dh \dots \dots \dots (31)$$

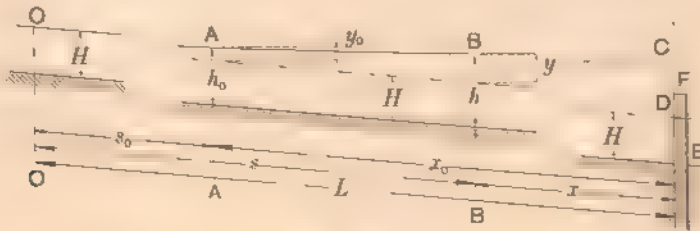
Обозначим  $h$  через  $H + y$  (фиг. 193); тогда,  $dh = dy$ , и ур-е 31 принимает вид:

$$i ds = \int_1 \frac{H^3}{3H^2y - 3Hy^2 - y^3} dy.$$

Производя указанное тут дѣленіе одночлена на многочленъ, получаемъ:

$$i ds = H \left( \frac{1}{3y} + \frac{2}{3H} + \frac{2y}{9H^2} - \frac{y^2}{9H^3} + \dots \right) dy.$$

Это ур-е интегрируется просто. По отношенію къ предѣламъ интегрирования замѣтимъ, что мы считаемъ  $s$  положительнымъ въ направлении течения. Следовательно, точка  $O$ , отъ которой отсчитываются разстоянія  $s$ , лежитъ гдѣ-нибудь вверхъ отъ пло-



Фиг. 193.

тины  $C$ ,—допустимъ, на разстояніи  $L$  отъ нея. Если мы желаемъ получить ур-е профиля подпруженной воды для участка канала отъ  $AA$  до  $BB$ , то предѣлами для соответствующихъ частей этого ур-я будутъ: нижнимъ  $s_0$  и  $y_0$  (сѣченіе  $AA$ ), а верхнимъ  $s$  и  $y$  (сѣченіе  $BB$ ). Само ур-е будетъ имѣть видъ:

$$i \frac{(s - s_0)}{H} = \frac{1}{3} \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) + \frac{2}{3} \frac{y - y_0}{H} + \frac{2}{9 \cdot 2} \frac{y^2 - y_0^2}{H^2} - \frac{1}{9 \cdot 3} \frac{y^3 - y_0^3}{H^3} + \dots$$

Обыкновенно разности глубинъ  $y$  и  $y_0$  настолько невелики по сравненію съ  $H$ , что можно, какъ первое приближеніе, пренебречь членами, начиная со второй степени отношеній  $\frac{y}{H}$  и  $\frac{y_0}{H}$  тѣмъ болѣе, что въ ур-е входятъ только разности степеней этихъ отношеній, и притомъ съ дробными множителями и съ переменными знаками. Поэтому можемъ написать просто:

$$i (s - s_0) = \frac{H}{3} \ln \frac{y}{y_0} + \frac{2}{3} (y - y_0) \dots \dots \dots (32)$$

Это рѣшеніе предложилъ Дюлонъ.

Обыкновенно бываетъ удобно отсчитывать разстояніе не внизъ по теченію отъ этой неопредѣленной точки  $O$ , а вверхъ отъ плотины; поэтому внесемъ въ это ур-е вмѣсто  $s$ , равную ему величину  $(L - x)$ , а вмѣсто  $s_0$  величину  $(L - x_0)$ ; тогда получимъ

$$i (L - x) = \frac{H}{3} \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) + \frac{2}{3} (y - y_0) \dots \dots \dots (33)$$

Пологая  $x = 0$ , мы должны вмѣсто  $y$  внести величину отрѣзка  $CD$ , которую легко опредѣлить, зная  $H$  и высоту  $EF$  плотины, такъ какъ величина отрѣзка  $CF$ , какъ было объяснено выше, опредѣляется условиями истечения черезъ отверстие въ плотинѣ или переливания черезъ плотину всего расхода въ каналѣ, если, конечно, изъ образовавшагося передъ плотиною пруда не отводится нѣмъ нея нѣкоторое количество воды съ тою или другою цѣлью.

Съ помощью ур-я (33) удобно находить то расстояние, въ которомъ произойдетъ заданное изменение глубины  $y$ . Обратный вопросъ, нахождение  $x_0$  для всякаго заданнаго  $x_1$ , — слѣдуетъ рѣшать путемъ послѣдовательныхъ приближеній.

Ур-е (33) указываетъ, подобно предыдущему, что равнотѣрное течение выше плотины не возможно, ибо, опредѣляя изъ него  $x_0$  для  $x_1 = 0$ , найдемъ  $x_0 = \infty$ . То же слѣдуетъ и изъ ур-я (30) Бресса: глубина  $h = H$  будетъ на такъ  $s$ , которое плыветъ при  $z = 1$ ; а по таблицѣ Бресса видно, что  $v(1 = \infty)$  слѣдуетъ  $v(1,8 = \infty) = \infty$ . Такимъ образомъ, для того, чтобы помощью этихъ ур-й находить приближенно то мѣсто канала, гдѣ подпруга уже незамѣтна, нужно потагать  $y_0$  равнымъ не нулю, а какой-нибудь малой величинѣ, напр., 0,01 *mtr.*

Интересно отмѣтить здѣсь, что ур-я (32 и (33) даютъ рѣшенія, весьма близкия къ рѣшеніямъ точнаго ур-я (30) Бресса. Такъ, напр., пусть  $i = 0,0002$ ;  $H = 4$  *mtr.*; глубина  $y$  плотины пусть будетъ 6 *mtr.* Требуется найти, на какомъ разстояніи отъ плотины находится то мѣсто, гдѣ глубина равна 5 *mtr.*

Для ур-я Бресса возьмемъ  $x_0 = \frac{6}{4} = 1,5$ ;  $z = \frac{5}{4} = 1,25$ . По таблицѣ 45 находимъ помощью интерполированія:

$$\psi(1,5) = 0,2580 - 0,0094 \times \frac{75}{227} = 0,2549;$$

$$\psi(1,25) = 0,4198.$$

Считая

$$b = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{2500}$$

получаемъ:

$$\frac{ai}{bg} = \frac{1,085 \cdot 0,0002 \cdot 2500}{981} = 0,0553$$

Послѣ этого ур-е (30) дастъ:

$$0,0002(s - s_0) = 4(1,25 - 1,5) - 4(1 - 0,0553)(0,4198 - 0,2549).$$

Слѣдовательно:

$$s - s_0 = -\frac{1,623}{0,0002} = -8115 \text{ mtr.}$$

Теперь возьмемъ ур-е (33) Дююи. Здѣсь нужно положить  $H = 4$  *mtr.*;  $y = 2$  *mtr.*;  $x_0 = 1$  *mtr.* По таблицамъ натуральныхъ логарифмовъ находимъ  $\ln 2 = 0,6931$ . Поэтому:

$$i(x - x_0) = \frac{4}{3} \cdot 0,6931 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 1,59;$$

$$x - x_0 = 7950 \text{ mtr.}$$

Какъ видно, разница обоихъ рѣшеній не особенно велика, — она составляетъ  $\frac{65}{100} \cdot 100 \%$ , т. е. около 2%.

Нужно помнить, что ур-я (32) и (33) справедливы только, пока  $y = H$  и пока  $i$  такъ мало, что  $\frac{ai}{bg}$  гораздо меньше единицы.

Если каналъ не такъ широкъ, чтобы можно было считать  $R = h$ , то при составленіи ур-я (20) надо положить  $R = \frac{11h}{l - 2h}$ . Интегрированіе полученаго тогда ур-я очень затрудняется, хотя, все-таки, доведеніе его до конца возможно. Получается крайне слож-

ная формула Вейсбаха при упрощении, Фламанн приводит къ формулѣ, составленной по типу ур-я (33):

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} i(s) &= \frac{1}{m} H l m \frac{g}{g_0} \left( 1 - \frac{7}{4} \frac{a}{l} \frac{g}{g_0} \frac{y - y_0}{l} \right) \\ &= \frac{1 - \frac{a}{l} \frac{g}{g_0} + 2H}{l + 4H} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

При  $\frac{a}{l} = \frac{2}{5}$ , — а это будетъ при  $l \approx 2H$ , — если уклонъ очень малъ, получимъ:

$$i(s) = \frac{2}{5} H l m \frac{g}{g_0} + \frac{31}{45} y - y_0 \dots \dots \dots (35)$$

Изъ ур-я 33, и (35) видно, во-первыхъ, что въ узкомъ каналѣ, при прочих равныхъ условияхъ, подпруга распространяется дальше, чѣмъ въ очень широкомъ  $\frac{2}{5} \frac{1}{3}$  и  $\frac{31}{45} \frac{2}{3}$ ; во-вторыхъ, можно вывести слѣдующія заключенія (конечно, только приближенно):

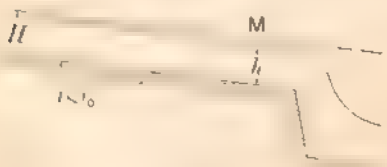
- а) Разстояние между двумя сѣченіями съ данной разностью глубинъ обратно пропорціонально паденію дна.
- б) Разность глубинъ въ двухъ точкахъ зависитъ отъ  $l$  и отъ  $s$  одновременно, т.е. она зависитъ отъ абсолютнаго превышенія одной точки дна надъ другой.
- в) Разстояние между двумя сѣченіями съ данной разностью глубинъ измѣняется въ томъ же смыслѣ, какъ и  $H$ , — глубина незапруженной рѣки. Слѣдовательно, если поднять на одинаковую высоту воду въ двухъ каналахъ съ одинаковымъ уклономъ, но разныхъ глубинъ, то длина подпруги въ нихъ будетъ разная: она будетъ больше для болѣе глубокаго канала. Этимъ же объясняется, почему въ половодье подпруга ощущается дальше отъ плотины, чѣмъ въ междоводье.
- г) Вообще, глубина потока увеличиваетъ длину подпруги, а падение уменьшаетъ.

Случай II, 2:  $H_1 < h < H$ , при чемъ  $\frac{a}{b_1}$  остается  $< 1$ , а  $H_1 < H$ .

Пусть въ какомъ-нибудь мѣстѣ канала  $M$  (фиг. 194) по какой-нибудь причинѣ поддерживается глубина  $h$ , меньшая чѣмъ  $H$ , но все-таки болѣе чѣмъ  $H_1$ ; тогда изъ ур-я профиля

$$i ds = \frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3} dh \dots \dots \dots (27)$$

видно, что, при  $ds$  положительномъ,  $dh$  должно быть отрицательно, такъ какъ вся дробь отрицательна. Поэтому, если отъ точки  $M$  пойдемъ



Фиг. 194.

вверхъ по рѣкѣ (отрицательныя  $ds$ ), то будемъ замѣчать, что глубина растеть, — какъ разъ обратно предыдущему случаю, вслѣдствіе чего этотъ случай можно назвать отрицательной подпругой. Легко видѣть, что и здѣсь линия профиля равно-

мѣрнаго теченія есть асимптота для действительнаго профиля. Ур-е профиля въ интегральной формѣ остается, конечно, то же самое.



Понятно, что такое постепенное уменьшение глубины, а слѣд. увеличеніе скорости противъ равномернаго теченія не можетъ быть вызвано никакимъ обстоятельствомъ, лежащимъ выше разсматриваемаго участка: оно обусловливается причиной, лежащей ниже его. Такой случай представляется, напр., передъ водопадомъ или передъ тѣмъ мѣстомъ, гдѣ отнимается отъ рѣки большое количество воды (хотя бы насосомъ или каналомъ), такъ какъ и то и другое вызываетъ мѣстное пониженіе уровня, влекущее за собою, въ свою очередь, отрицательную подпрудку по *осему* потоку выше причины, вызвавшей это пониженіе уровня.

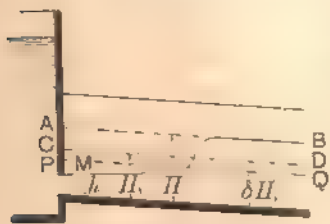
Замѣтимъ, что незадолго до причины, вызвавшей это явленіе, напн ур-ія перестаютъ имѣть мѣсто. Въ самомъ дѣлѣ, по мѣрѣ уменьшенія  $h$  и приближенія его къ  $H_1$ , дробь во второй части ур-ія стремится къ нулю, и въ предѣлѣ, при  $h = H_1$ , получаемъ, что весьма малому перемѣщенію  $\Delta h$  соответствуетъ бесконечно большое пониженіе  $\Delta h$ , т.-е. свободная поверхность становится вертикальной. Это есть то, что называется *скачкомъ пониженія* (ressaut d'abaissement). Но при этомъ, очевидно, кривизна и непараллельность струй столь велика, что ур-е Д. Бернулли, а слѣдовательно, и наше ур-іе, непримѣнимы.

Это предѣльное значеніе глубины  $h = H_1$  можетъ встрѣтиться при водопадѣ; если же отрицательная подпрудка вызвана, напр., внезапно увеличивающимся уклономъ дна и если новая глубина  $H'$  равномернаго теченія при этомъ новомъ уклонѣ больше, нежели предшествовавшая критическая глубина  $H_1$ , то скачка не будетъ; если же  $H' < H_1$ , то вертикальная или почти вертикальная часть свободной поверхности появится опять.

Случай II, 3:

$$h < H_1 < H.$$

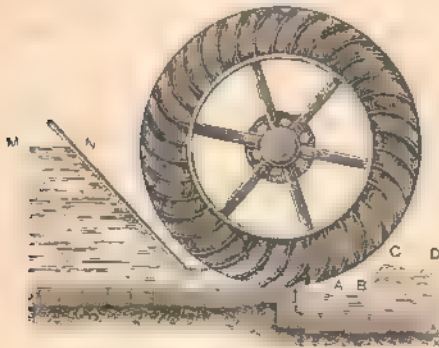
Пусть, наконецъ, въ какой-нибудь точкѣ  $M$  дѣйствительная глубина  $h$  (фиг. 195) меньше глубины равномернаго теченія  $H$  и меньше критической глубины  $H_1$ .



Фиг. 195.

По ур-ію (27) видно, что, спускаясь по рѣкѣ, будемъ находить все болѣе глубокия мѣста, — глубина  $h$  приближается къ критической  $H_1$ . При этомъ  $h$  быстро возрастаетъ съ разстояніемъ, такъ какъ дробь  $\frac{h^3 - H_1^3}{h^3 - H^3}$  стремится къ нулю; наконецъ, когда  $h$  дѣлается равнымъ критической глубинѣ  $H_1$ , получаемъ  $\frac{dh}{dx} = \infty$ . Это значитъ, что касательная къ профилю здѣсь вертикальна. Явленіе это называется *скачкомъ* или *прыжкомъ* воды («ressaut» у французовъ и «Sprung» у нѣмцевъ). Въ отличіе отъ предыдущаго его иногда называютъ скачкомъ *повышенія*. Въ слѣдующемъ параграфѣ будетъ показано, какъ опредѣлить высоту скачка воды, т.-е. глубину за скачкомъ. Ур-іемъ профиля для этой дѣли пользоваться нельзя по выше объясненной причинѣ (явно и рѣзко нарушенная параллельность струй).

Такой характер течения, — сначала постепенное, а потом внезапное повышение уровня, т. е. погашение скорости, может быть вызванъ, конечно, только тѣми причинами, которыя создастъ съ самаго начала большую скорость и, слѣдовательно, лежать выше разматриваемаго участка. Поэтому такое явленіе будетъ наблюдаться въ такомъ каналѣ, въ который вода изливается изъ канала болѣе узкаго; или въ каналѣ, въ который вода выливается изъ сосуда, подобно фигурѣ 193, или въ который вода переливается черезъ водосливъ, какъ мы это видѣли въ § 17 (фиг. 100—104). Подобнымъ же образомъ вода можетъ покидать водяное колесо (фиг. 196) съ такою



Фиг. 196.

скоростью  $v_2$ , которая превышаетъ скорость равномернаго течения въ отводящемъ каналѣ, устраиваемомъ обыкновенно съ небольшимъ паденіемъ: за колесомъ тогда образуется скачокъ, и притомъ тѣмъ дальше отъ колеса, тѣмъ больше  $v_2$  и чѣмъ меньше глубина за скачкомъ; внѣшній видъ явленія таковъ, какъ будто колесо находится въ нишѣ *AB*, углубленной въ свободной поверхности *CD*. Въ этомъ случаѣ скачокъ представляетъ прямую выгоду, такъ какъ располагаемымъ для двигателя напоромъ является разстояніе отъ

уровня *MN* до *CD*, а утилизируется разстояніе отъ *MN* до *AB*.

Вообще скачокъ повышения въ открытыхъ каналахъ есть явленіе, вполне аналогичное удару при увеличеніи сѣченія трубы: здѣсь такъ же, какъ и тамъ, погашается нѣкоторый запасъ живой силы; часть его тратится на подъемъ жидкости на высоту скачка, а часть теряется на приведеніе жидкости въ сильное волненіе. На нѣкоторомъ разстояніи отъ скачка, — тамъ, гдѣ это волненіе уже улеглось, — т. е. когда энергия вихревого и волнообразнаго движенія обратится въ теплоту, тамъ можетъ образоваться равномерное теченіе; но для этого необходимо, чтобы внизъ по каналу (при неизмѣнномъ уклонѣ) не было ни положительной, ни отрицательной подпруды.

*Случай III.*

$$\frac{ai}{bi} > 1; \quad i > 0,0036.$$

Обратимся, наконецъ, къ случаю рѣкъ съ большимъ паденіемъ, когда  $i > 3,6 \text{ ‰}$  или, правильнѣе,  $\frac{ai}{bi} > 1$ . Очевидно, здѣсь  $H_1 > H$ . Ур-іе кривой профиля остается старое:

$$i ds = \frac{b^3}{b^3} \frac{H_1^3}{H^3} db \dots \dots \dots (27)$$

Въ зависимости отъ соотношенія между величинами  $b$ ,  $H$  и  $H_1$  рассмотримъ отдѣльно слѣдующіе три частныхъ случая

*Случай III, 1.*

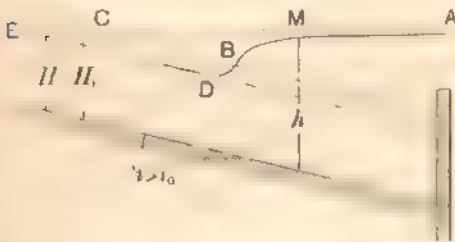
Пусть какая-нибудь причина (плотина, порог и т. д.) поддерживает в какой-нибудь точке *M* (фиг. 197) глубину  $h > H_1$ , а следовательно, большую также, чѣмъ *H*:

$$h > H_1 > H.$$

Тогда внизъ по каналу отъ этой точки глубина будетъ все увеличиваться, такъ какъ дробь положительна; при этомъ дробь стремится къ

единицѣ, т.-е.  $\frac{dh}{ds}$  стремится къ 1;

следовательно, профиль асимптотически приближается къ горизонтальной прямой *AC*, положеніе которой опредѣляется аналогично тому, какъ опредѣляется прямая *AC* на фиг. 192. Вверхъ отъ точки *M* глубина *h*, очевидно, уменьшается, и притомъ довольно быстро, такъ какъ дробь при-



Фиг. 197.

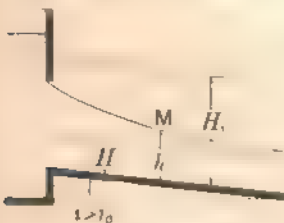
ближается къ нулю. При  $h = H_1$  имѣемъ  $\frac{dh}{ds} = \infty$ , — въ этой точкѣ касательная къ профилю вертикальна; следовательно, здѣсь имѣется скачокъ. Въ мѣстѣ скачка и вблизи отъ него наше ур-е непримѣнимо. Выше скачка глубина можетъ быть какая угодно, она можетъ быть, напр., равна *H*, т.-е. течение тамъ можетъ быть равномернымъ. Скачокъ получается подъ влияніемъ причины, ниже его лежащей.

*Случай III, 2.*

Пусть гдѣ-нибудь въ точкѣ *M* (фиг. 198) действительная глубина *h* меньше критической, но больше глубины равномернаго течения:

$$H_1 > h > H.$$

Тогда ниже этого мѣста глубина все убываетъ, такъ какъ дробный коэффициентъ правой части ур-я (27) отрицателенъ. Профиль асимптотически приближается къ линіи равномернаго течения, никогда ея не достигая. Вверхъ отъ *M* глубина растетъ, — следовательно, профиль представляетъ кривую, обращенную своею выпуклостью внизъ. Наконецъ, когда *h* дѣлается равнымъ *H*<sub>1</sub>,



Фиг. 198.

то опять  $\frac{dh}{ds} = \infty$ , оставаясь отрицательнымъ,

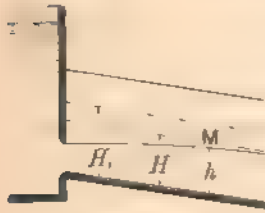
следовательно, касательная здѣсь вертикальна, но здѣсь получается то, что мы назвали скачкомъ пониженія;

вблизи отъ него общее ур-е профиля, конечно, непримѣнимо. Причина явленія скачка лежитъ выше участка, къ которому принадлежитъ точка *M*. Такой скачокъ можетъ быть осуществленъ, напримеръ,

въ круто поставленномъ желобѣ, въ который вода выплываетъ подъ не очень большимъ напоромъ (фиг. 198), такъ что скорость истечения меньше скорости равномернаго течения, соответствующей уклону желоба. Подобное же явление можетъ наблюдаться за невысокимъ водопадомъ и т. п.

### Случай III, 3.

Пусть гдѣ-нибудь въ *M* (фиг. 199) глубина  $h < H < H_1$ . Внизъ отсюда глубина растеть, стремясь достигнуть *H*, но никогда ее не достигая,— равномерное движение, слѣд., невозможно. Выше отъ *M* глубина все падаетъ,



Фиг. 199.

и профиль, говоря теоретически, можетъ достигнуть пересѣченія съ дномъ. На дѣлѣ этого, конечно, не будетъ, такъ какъ уже тотъ фактъ, что мы застаемъ воду идущей со скоростью, большей скорости равномернаго течения, постепенно затѣмъ уменьшающейся, можетъ быть вызванъ только тѣмъ, что съ самаго начала вода входила въ каналъ со скоростью, большей скорости равномернаго течения. Слѣдовательно, профиль будетъ обнаруживать постепенное

уменьшеніе глубины вверхъ вплоть до самой причины, вызвавшей эту большую скорость, а здѣсь, конечно, глубина равной нулю быть не можетъ.

Резюмируя все сказанное, приходимъ къ заключенію, что въ очень широкихъ каналахъ прямоугольнаго сѣченія равномерное течение можетъ образоваться только въ рѣдкихъ случаяхъ, при наличности надлежащихъ условій при входѣ въ каналъ и при выходѣ изъ него; въ естественныхъ потокахъ, въ силу того, что ихъ ложе не призматическое, равномерное теченіе, строго говоря, невозможно.

Въ частности, плотина на такомъ каналѣ и, приближенно, на рѣкахъ производить слѣдующія явленія:

1) Паденіе канала таково, что  $\frac{ci}{bg} = 1$ , т. е.  $i_0 = 3,6^0_{00}$ . Ширина рѣки равна *l*, а расходъ въ ней—*Q*. По предыдущему, глубина равномернаго течения  $H = \sqrt[3]{\frac{lQ^2}{i_0^2}}$ . Передъ плотиною (фиг. 189) профиль рѣки есть горизонтальная прямая *AB*; еще выше (часть *CA*) рѣка течетъ равномерно. Конечно, это не болѣе, какъ предѣльный случай, осуществленіе котораго едва ли можно найти въ дѣйствительности.

2) Паденіе  $i < i_0$ , т. е.  $\frac{ci}{bg} < 1$ . Глубина равномернаго течения  $H = \sqrt[3]{\frac{lQ^2}{i^2}}$ ; критическая глубина  $H_1 = \sqrt[3]{\frac{ci}{bg}} H$ . Слѣдовательно,  $H_1 < H$ . Передъ плотиною профиль (фиг. 191) есть кривая *AB*, обращенная выпуклостью книзу. По ур-ю профиля слѣдуетъ, что равномерное движение выше плотины вообще невозможно. Приближенно же, и для практики достаточно точно, можно считать, что на разстояніи отъ плотины  $ab = 2cb$  движеніе уже равномерно.

3) Паденіе  $i > i_0$ , т.-е.  $\frac{\omega}{b\eta} > 1$ ; критическая глубина  $H_1$  больше глубины равномернаго теченія  $H$  (фиг. 197). Достаточна высокая плотина вызываетъ профиль  $BA$ ,—кривую, обращенную выпуклостью кверху. Около  $DB$  имѣеть мѣсто скачокъ; выше, въ  $EO$ , рѣка течеть равномерно, если еще выше нѣтъ никакихъ причинъ, увеличивающихъ скорость на этомъ пути. Разстояніе скачка отъ плотины зависитъ, конечно, отъ высоты плотины.

Въ 1851 г. Saint-Venant \*) предложилъ различать двѣ категории потоковъ: тѣ, для которыхъ  $\frac{\alpha i}{b\eta} < 1$ , онъ называетъ просто rivières; а тѣ, для которыхъ  $\frac{\alpha i}{b\eta} > 1$ , онъ назвалъ torrents (или cours d'eaux torrentieux). По-русски эти термины можно передать такъ: первую категорию составляютъ «рѣки съ покойнымъ теченіемъ», вторую—«рѣки съ бурнымъ теченіемъ». Такимъ образомъ, по этой классификаціи должно признать бурнымъ и тотъ участокъ  $BA$  передъ плотиною (фиг. 197), гдѣ скорость теченія, вообще очень малая, измѣняется медленно, такъ какъ профиль асимптотически приближается къ горизонтали  $AC$ , и, наоборотъ, нужно считать покойнымъ течение передъ скачкомъ (фиг. 195) при большой и быстро измѣняющейся скорости, единственно изъ-за того, что въ первомъ случаѣ уклонъ дна великъ, а во второмъ—онъ малъ, между тѣмъ какъ самъ характеръ теченія противоположенъ тому представляемому, которое связывается съ выраженіемъ «покойное» или «бурное» теченіе.

Boussinesq тоже различаетъ двѣ категории потоковъ \*\*) или, вѣрнѣе, два характера теченія, съ такими же названіями, но въ основу классификаціи кладеть не величину уклона, а величину скорости на данномъ участкѣ потока: если скорость теченія меньше нѣкоторой определенной, «критической», скорости  $v_1$ , то онъ называетъ теченіе покойнымъ, если же она больше критической величины, то бурнымъ. Величину  $v_1$  онъ опредѣляетъ слѣдующимъ образомъ. Критическую глубину  $H_1$  мы опредѣляли выше уравненіемъ (26). Соединяя его съ уравненіемъ (23), находимъ:

$$H_1 = \sqrt[3]{\frac{\alpha i}{b\eta}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b\eta^2}{i}} = \sqrt[3]{\frac{\omega\eta^2}{g}}$$

Кромѣ того, всегда можно написать, что

$$q = v_1 H_1,$$

если отвлечься отъ спеціальнаго смысла глубины  $H_1$ , при которой свободная поверхность образуетъ скачокъ; другими словами,  $v_1$  есть нѣкоторая

\*) См. Annales des mines, t. XX, p. 320. „Formules et tables nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes“.

\*\*) См. его „Essai sur la théorie des eaux courantes“, p 133, 144, 151, 154 Saint-Venant самъ признавалъ преимущество классификаціи Boussinesq а.

фиктивная величина. Внося под радикаль это выраженіе  $q$ , а также считая  $\alpha = 1,085$ , легко получимъ:

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g \frac{H_1}{2}} = 0,96 \sqrt{2g \frac{H_1}{2}} \dots \dots \dots (36)$$

т.е. критическая скорость *Boussinesq'a* равно скорости истечения из отверстія въ тонкой стѣнкѣ подъ напоромъ, равнымъ половинѣ критической глубины, если коэффициентъ скорости  $q$  считать равнымъ 0,96.

Понятно, что если дѣйствительная глубина  $h > H_1$ , то тамъ устанавливается дѣйствительная скорость  $v < v_1$ , такъ какъ  $q = h - v_1 H_1$ . Напишемъ поэтому два очевидныхъ неравенства:

$$v < v_1;$$

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g \frac{H_1}{2}} < \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g \frac{h}{2}}.$$

Такъ какъ первое неравенство есть, по Буссеннеку, признакъ покойнаго теченія, то, соединяя его со вторымъ неравенствомъ помощью ур-ня (36), получимъ для покойныхъ теченій, очевидно:

$$v < \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g \frac{h}{2}} \dots \dots \dots (37)$$

Подобнымъ же образомъ, признакомъ бурныхъ теченій будетъ служить соотношеніе:

$$v > \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g \frac{h}{2}} \dots \dots \dots (38)$$

Изъ предыдущаго видно, что крутыя паденія ( $i > i_0$ ) чаще ведутъ къ бурному теченію; покойное теченіе можетъ образоваться только незадолго до плотины. Наоборотъ, пологіе уклоны ( $i < i_0$ ) чаще влекутъ покойное теченіе, проявляя бурный характеръ только въ случаѣ скачка повышенія (II, 3). Случай равномернаго теченія при  $i = i_0 = 3,6^0$  замѣчательнѣе тѣмъ, что онъ по этой классификаціи стоитъ на границѣ между обоими предыдущими, такъ какъ при немъ  $h = H = H_1$ , потому что  $\frac{u^2}{hg} = 1$  и, слѣдовательно, скорость  $v$  въ этомъ случаѣ какъ разъ равна критической и выражается такъ:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt{2g \frac{h}{2}}.$$

Замѣтимъ еще разъ, что коэффициентъ  $b$  непостояненъ даже при одинаковой степени шероховатости русла: онъ уменьшается съ увеличеніемъ глубины собственно, средняго радіуса). Поэтому полученное предѣльное значеніе  $i_0$ , обращающее дробь  $\frac{ci}{bi}$  въ единицу, есть только средняя величина. Такъ

какъ  $i_0 = \frac{bi}{ci}$ , то заключаемъ, что для болѣе глубокихъ рѣкъ достаточно меньшаго паденія, чтобы сдѣлать ихъ бурными по классификаціи Сенъ-Венана, да и по классификаціи Буссинека тоже, такъ какъ, различаясь принципиально, какъ мы сейчасъ видѣли, обѣ эти системы приводятъ практически къ сходственнымъ результатамъ.

Нѣсколько разъ было отмѣчено, что ур-іе (27), изслѣдованіе котораго дало намъ всѣ приведенные выше результаты, не передаетъ явленія во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ параллельность струй замѣтно нарушается. Въ той работѣ Буссинека, о которой уже не разъ упоминалось \*), кривизна струй принимается во вниманіе. Благодаря этому изслѣдованіе вида поверхности неравномѣрно бѣгущаго потока можетъ быть проведено значительно дальше. Между прочимъ Буссинекъ распространяетъ его на мѣста нарушенія равномѣрнаго течения, независимо отъ причины, производящей это нарушеніе. И онъ доказываетъ (см. стр. 196—206; у Бобылева—стр. 96—99), что въ покойныхъ рѣкахъ нарушеніе течения и переходъ его отъ одного характера къ другому совершается рядомъ волнъ одинаковой длины, но постепенно уменьшающейся амплитуды, т.-е. распространяется далеко; наоборотъ, въ потокахъ бурныхъ этотъ переходъ совершается сразу, скачкомъ, и остается, потому, какъ бы сосредоточеннымъ въ одномъ мѣстѣ. Эти выводы можно сблизить съ тѣмъ, напр., что пароходъ на озерѣ оставляетъ за собою далеко разбѣгающуюся волну, на покойной рѣкѣ эти волны также распространяются очень далеко; наоборотъ, въ стремительномъ потокѣ онѣ быстро затухаютъ. Также то сильное волненіе, которое вызываютъ въ быстромъ потокѣ, напр., быки моста, распространяется сравнительно очень недалеко. Изслѣдованія Буссинека касаются также вопроса о влияніи неровностей дна на видъ поверхности (см. стр. 223—232, у Бобылева—стр. 100—109). Оказывается, наиболѣе рѣзко отражаются на поверхности неровности дна въ потокахъ стремительныхъ, но съ уклономъ близкимъ къ предѣльному; съ дальнѣйшимъ увеличеніемъ уклона неровности дна ощущаются на поверхности менѣе замѣтно: отношеніе высоты поверхностной волны къ высотѣ неровностей дна приближается въ предѣлѣ къ величинѣ, очень мало отличающейся отъ 1. Наоборотъ, съ уменьшеніемъ уклона это отношеніе быстро уменьшается и въ предѣлѣ обращается въ 0, когда средній уклонъ приближается къ 0.

\*) См. его „Essai sur la thѣorie des eaux courantes“. (См. также краткое изложеніе этого трактата на русскомъ языкѣ, сдѣланное проф. Д. Бобылевымъ подъ заглавіемъ „Очеркъ теоріи водяныхъ теченій, выработанной Буссинекомъ“. СПб. 1898 г.)

### § 34. О скачках воды.

Въ предыдущемъ параграфѣ было уже указано, что называется скачкомъ и при какихъ условияхъ онъ образуется. Мы видѣли, что скачокъ появляется всякій разъ, какъ глубина приближается къ величинѣ

$$H_1 = H \sqrt[3]{\frac{c}{hg}},$$

гдѣ выраженіе подъ радикаломъ должно быть отличнымъ

отъ нуля. Если дѣйствительная глубина  $h$  потока приближается къ  $H_1$ , увеличиваясь (для наблюдателя, перемѣщающагося по теченію), то въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто скачокъ повышенія (собственно скачокъ); въ противномъ случаѣ получается скачокъ пониженія. Теперь мы займемся опредѣленіемъ высоты скачка и потери напора при скачкѣ.

Допустимъ, что передъ скачкомъ въ сѣченіи  $AB$  (фиг. 200) струи идутъ еще такъ, что ихъ можно считать сохраняющими свою параллельность. Среднюю скорость въ этомъ сѣченіи назовемъ черезъ  $v_0$ , а глубину—черезъ  $h_0$ .



Фиг. 200.

Подобнымъ же образомъ беремъ за скачкомъ нѣкоторое сѣченіе  $CD$ , гдѣ можно считать, что струи возстановили уже свою параллельность и идутъ со средней скоростью  $v$  при глубинѣ  $h$ . Оба сѣченія возьмемъ перпендикулярно къ ихъ скоростямъ, а не вертикально, хотя, вслѣдствіе малости уклона дна, это почти безразлично. Къ выдѣленной

такимъ образомъ массѣ воды  $ABDC$  примѣнимъ теорему количества движенія для бесконечно малаго перемѣщенія въ положеніе  $A'B'D'C'$ , предполагая движеніе установившимся. Проекція приращенія количества движенія на направленія скоростей  $v_0$  и  $v$  за бесконечно малый промежутокъ времени  $dt$ , очевидно, равна, въ силу установившагося движенія, разности количества движенія слоя  $CD'$  и слоя  $AB'$ , потому что объемъ  $A'B'CD$  наполненъ въ оба рассматриваемые моменты, правда, разными частицами, но съ одинаковою массою и съ одинаковыми скоростями. Такимъ образомъ нужное намъ приращеніе проекціи количества движенія можетъ быть выражено такъ:

$$(1 + \beta) \frac{Q\gamma}{g} (v - v_0) dt,$$

гдѣ  $\beta$  есть коэф-тъ, исправляющій неточность, происходящую отъ замѣны истиннаго движенія съ разными скоростями движеніемъ со средней скоростью.

Эта величина должна равняться суммѣ проекцій на то же направленіе всѣхъ внѣшнихъ силъ. Внѣшнія силы на этомъ перемѣщеніи слѣдующія.

Во-первыхъ, тяжесть; ее, однако, можно считать перпендикулярной къ перемѣщенію взятой нами массы, такъ какъ уклонъ дна есть, вообще, величина незначительная; поэтому проекціей ея импульса на направленіе скоростей можно, безъ большой ошибки, пренебречь



Во-вторыхъ, имѣется сила тренія, импульсъ которой, очевидно, направленъ противъ движенія и, слѣдовательно, войдетъ во вторую часть уравненія со знакомъ минусъ. Такъ какъ весь участокъ *BD*, вообще, невеликъ, то внѣшнее треніе, несомнѣнно, будетъ очень незначительнымъ, и имъ можно пренебречь, отчасти компенсируя этимъ пренебреженіе положительнаго импульса тяжести. Но нельзя сказать того же о внутреннемъ треніи, такъ какъ при той неправильности струй, которая имѣетъ мѣсто въ скачкѣ, есть полная возможность для образованія сильныхъ вихрей. Однако, вмѣсто того, чтобы оцѣнивать отрицательный импульсъ внутренняго тренія, мы можемъ соответственно увеличить первую часть уравненія, т.е. вмѣсто вышенаписанной величины приращенія количества движенія взять нѣсколько большую. Вычисленія Буссинеса, которыхъ приводить здѣсь не будемъ, показываютъ, что это вообще (не только въ случаѣ скачка) возможно сдѣлать, если вмѣсто коэф-та  $(1 + \beta)$  принять коэф-тъ  $(1 + \beta + 3.85 \beta)$ , т.е.  $(1 + 4.85 \beta)$ . Обозначимъ этотъ новый коэф-тъ черезъ  $\alpha'$ , и теперь первая часть составляемаго нами ур-ія количествъ движенія приметъ видъ:

$$\frac{\alpha' Q \gamma}{g} (v - v_0) dt.$$

Въ-третьихъ, наконецъ, въ сѣченіяхъ *AB* и *CD* имѣются гидродинамическія давленія, импульсъ которыхъ по направленію движенія, въ силу допущенной въ этихъ сѣченіяхъ параллельности струй, выразится черезъ:

$$\frac{h_0}{2} \gamma F_0 dt - \frac{h}{2} \gamma F dt,$$

гдѣ  $F_0$  и  $F$  суть площади живыхъ сѣченій *AB* и *CD*.

Полное ур-іе количествъ движенія будетъ, такимъ образомъ, имѣть видъ:

$$\frac{\alpha' Q \gamma}{g} (v - v_0) dt - \frac{1}{2} (h_0 F_0 - h F) \gamma dt \dots \dots \dots (39)$$

Полагая, что поперечный профиль потока есть прямоугольникъ съ шириною  $l$ , имѣемъ, очевидно:

$$Q = F_0 v_0 = l h_0 v_0 = F v = l h v,$$

въ виду чего ур-іе (39) принимаетъ видъ:

$$\frac{2\alpha'}{g} v_0^2 h_0 \left( \frac{h_0}{h} - 1 \right) = h_0^2 - h^2.$$

Сокращая на  $(h_0 - h)$ , такъ какъ рѣшеніе  $h = h_0$ , очевидно, не относится къ разсматриваемому вопросу, получимъ ур-іе:

$$h^2 + h_0 h - 2\alpha' \frac{v_0^2}{g} h_0 = 0.$$

Отсюда находимъ, что глубина за скачкомъ, т.е. тамъ, гдѣ параллельность струи уже возстановилась, выражается такъ (отрицательный корень отбрасываемъ, какъ тоже не отвѣчающій условіямъ вопроса):

$$h = \frac{h_0}{2} \left\{ \frac{h_0^2}{4} - 2c' \frac{v_0^2}{g} h_0 \dots \dots \dots (40) \right.$$

Что касается коэф-та  $c'$  или вѣрнѣе  $\beta$ , то Буссинекъ даетъ для него среднюю величину  $\beta = 0,023$ ; тогда  $c' = 1,11$ . Это почти то же самое числовое значеніе, которое было дано для коэф-та  $c$ , введеннаго въ § 33.

Провѣрить ур-е (40) на опытѣ довольно затруднительно, такъ какъ поверхность воды за скачкомъ весьма неспокойна. Наблюденія надъ скачками производили В.доне, Ваумгартен, Дареу, Вазин и другіе. На фиг. 201 представленъ скачокъ, наблюдавшійся Баумгартеномъ на Краповскомъ каналѣ. Какъ видно по отмѣткамъ фигуры, высота скачка ( $h - h_0$ ) достигала



Фиг. 201

здѣсь величины  $0,915 - 0,430 = 0,485 \text{ mtr}$ . Вычисления по формулѣ (40) даютъ въ этомъ случаѣ  $h = 0,94 \text{ mtr}$ . Ошибка въ  $0,025 \text{ mtr}$  ( $0,94 - 0,915$ ) не можетъ быть названа особенно большою, особенно если принять въ соображеніе сильныя волны, покрывающія поверхность  $CD$  за скачкомъ; на нижней части фиг. 201 пунктирная линия представляетъ профиль волны въ серединѣ, а пунктиръ съ точкою — у береговъ. Вся высота скачка (почти  $0,5 \text{ mtr}$ ) получается на дѣлѣ  $76,50 - 73,50 = 3,00 \text{ mtr}$ .

Для скачковъ пониженія, примѣръ одного изъ которыхъ приведенъ на фиг. 202 на основаніи одного изъ наблюденій Базена, формула (40) непригодна, такъ какъ величина уступа, не входящая въ уравненіе, очевидно, имѣетъ преимущественное значеніе \*).

Когда паденіе велико и критическая глубина  $H_c$  больше глубины  $H$  равномернаго теченія, то, очевидно,  $h > H$ . Если же паденіе мало, то  $H_c < H$ , и, такъ какъ вообще для образованія скачка повышенія начальная глубина  $h_0$  должна быть меньше критической, то можетъ возникнуть вопросъ, будетъ ли  $h$  больше или меньше  $H$ .

Назовемъ скорость равномернаго теченія при томъ же расходѣ, а следовательно, при глубинѣ  $H$ , черезъ  $v'$ ; по предыдущему  $v' = \sqrt{gH}$ , если ширина  $l$  канала очень велика по сравнению съ  $H$ . Какъ и въ § 33, назовемъ  $h_0$  черезъ  $\frac{1}{b}$ . Ур-іе расхода можемъ написать въ видѣ:

Фиг. 202.

$$Q = v_0 l h_0 = v' l H = \sqrt{\frac{1}{b}} \sqrt{H} l H.$$

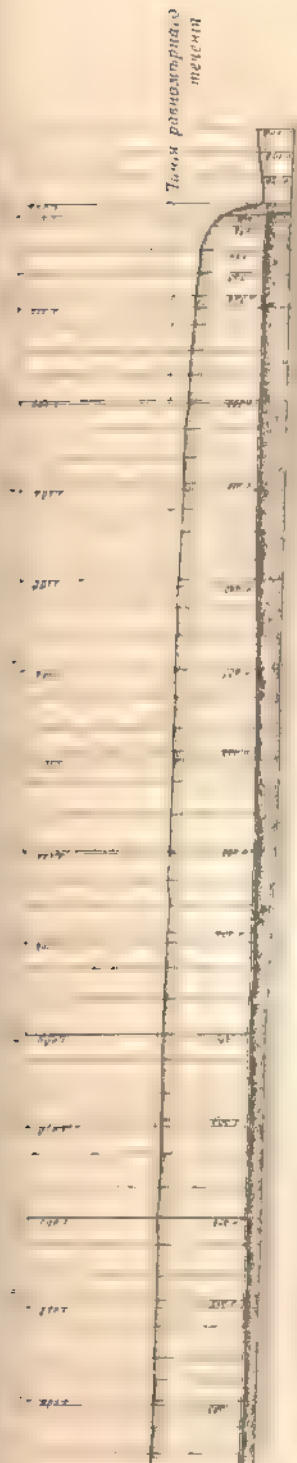
Отсюда:

$$v_0 = \frac{H^{3/2}}{b h_0^2}.$$

Поэтому ур-іе (40) можно переписать такъ:

$$h = \frac{h_0}{2} \left[ \sqrt{\frac{h_0^2}{4} + 2 \frac{v_0^2 H^3}{b g h_0}} - \frac{v_0^2 H^3}{2 b g h_0} \right].$$

\*) Случай фиг. 202 Буссинець даже называетъ не скачкомъ пониженія, а водопадомъ, говоря, что, такъ какъ вообще мы рассматриваемъ участки потоковъ, гдѣ уклонъ дна постояенъ, или, по крайней мѣрѣ, измѣняется очень постепенно, то такіе случаи, какъ фиг. 202, гдѣ элементы съ  $\frac{dh}{ds} = \infty$  находятся въ области внезапнаго измѣненія уклона дна, не должны входить въ наше разсмотрѣніе. Съ этой точки зрѣнія скачокъ пониженія есть явленіе трудно осуществимое и, во всякомъ случаѣ, представляющее черты, существенно отличныя отъ скачка повышенія. Подробности объ этомъ см. въ упомянутомъ сочиненіи Буссинеца, примѣчанія на стр. 135 и 150.



Отсюда видно, что глубина  $h$  за скачком будет больше глубины равномернаго течения  $H$  при удовлетвореніи неравенства:

$$\sqrt[2]{\frac{a'i}{bg} \frac{H}{h_0} - \left(\frac{h_0}{2H}\right)^2} - \frac{h_0}{2H} > 1;$$

отсюда:

$$\begin{aligned} \frac{2a'iH}{bg} + \left(\frac{h_0}{2H}\right)^2 > 1 + \left(\frac{h_0}{2H}\right)^2 + \frac{h_0}{H} \\ \left(\frac{h_0}{H}\right)^2 + \frac{h_0}{H} - \frac{2a'i}{bg} < 0. \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

Если неравенство (41) удовлетворяется, то глубина за скачком будет больше глубины равномернаго течения. Пока  $i > 0,0036$ , скачокъ, вообще, возможенъ, какъ уже сказано, только въ томъ смыслѣ, что  $h$  будетъ больше  $H$ , такъ что намъ остается рассмотретьъ, къ чему приводитъ это неравенство при уклонахъ дна  $i < 0,0036$ .

Хотя коэффициентъ  $a'$  нѣсколько больше, чѣмъ коэффициентъ  $a$ , введенный нами въ предыдущемъ параграфѣ, тѣмъ не менѣе, въ виду малой разницы между ними, примемъ для простоты, что  $a' = a$ ; кромѣ того, обозначимъ:

$$\frac{h_0}{H} = x, \dots \dots \dots (42)$$

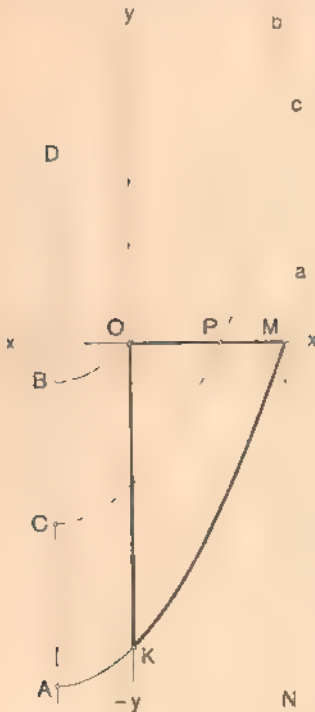
а всю первую часть неравенства (41) обозначимъ одною буквою  $y$ , т.-е. положимъ:

$$x^2 + x - 2\frac{ai}{bg} = y \dots \dots \dots (43)$$

Такимъ образомъ, глубина за скачком будетъ больше  $H$  тогда, когда  $y$  будетъ отрицательно. Слѣдовательно, намъ предстоитъ разыскать тѣ значенія  $x$ , которыя, будучи сами правильными положительными дробями (въ силу обозначенія (42) и условия образования скачка  $h_0 < H$ ), обращаютъ функцию  $y$  въ отрицательную величину при всѣхъ уклонахъ, измѣняющихся въ предѣлахъ отъ  $i_0$ , при которомъ  $\frac{ai}{bg}$  равно единицѣ, до  $i = 0$ .

Нетрудно видѣть, что ур. (43) есть уравненіе параболы, расположенной такъ, что ось ея  $AD$  параллельна оси  $y$  (фиг. 203). Координаты вершины  $(x_0, y_0)$  найдемъ изъ уравненія:

$$\frac{dy}{dx} = 2x_0 + 1 = 0.$$



Фиг. 203.

Отсюда

$$x_0 = -\frac{1}{2}.$$

а изъ ур-ія (43)

$$y_0 = -\frac{1}{4} - 2 \frac{ai}{biq}.$$

Отсюда видимъ, что положеніе оси параболы отъ уклона не зависитъ: вершина параболы всегда приходится на линіи *AD* (ибо  $x_0 = const$ ). Положеніе же вершины на этой прямой уже зависитъ отъ уклона: съ увеличеніемъ *i* она опускается. Въ разсматриваемыхъ предѣлахъ измѣненія *i* ордината вершины,  $y_0$ , измѣняется отъ  $(-\frac{1}{4})$  (точка *A*) до  $(-\frac{1}{4})$  (точка *B*). Нетрудно убѣдиться, что параметръ параболы также не зависитъ отъ уклона и есть величина постоянная, равная  $\frac{1}{2}$ . Слѣдовательно, измѣненіе уклона заставляетъ всю параболу перемѣщаться вдоль своей оси параллельно самой себѣ, при чемъ она занимаетъ положенія отъ *Aa* до *Bb*.

Обѣ крайнія параболы пересекаютъ ось *x* въ точкахъ, координаты которыхъ опредѣлимъ, полагая въ ур-ін (43)  $y = 0$  и подставляя соответственныя значенія дроби  $\frac{ai}{biq}$ .

Для крайней параболы *Aa*, для которой  $\frac{ai}{biq} = 1$ , находимъ изъ (43), что  $x = 0$  при  $r = -1$  (отрицательнаго корня не разсматриваемъ, такъ какъ онъ не относится къ вопросу). Такъ какъ далѣе, какъ уже было сказано,  $x$  можетъ быть только правильной положительной дробью, а  $y$  должно быть  $< 0$ , то нашему разсмотрѣнію подлежатъ только тѣ дуги параболъ (43), которыя проходятъ между отрицательной осью *y*, положительной *x* и прямою *MN*, т.е. лежатъ внутри площади *KOM*, при чемъ точка *M* принадлежитъ крайней параболѣ *Aa*. Слѣдовательно, при какомъ-нибудь *i*, для котораго  $1 > \frac{ai}{biq} > 0$ , когда ур-іе (43) представляетъ, напр., параболу *Cc*, скачокъ будетъ выше *H*, если  $x$  меньше отрѣзка *OP* =  $r_0$ . Находимъ длину этого отрѣзка  $x_0$ , для чего въ ур-ін (43) полагаемъ  $y = 0$ :

$$x_0 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 2 \frac{ai}{biq}}.$$

Далѣе, мы знаемъ, что скачокъ получается, вообще, тогда, когда  $h_0$  не только менѣе *H*, но и менѣе критической глубины  $H_1 = H \sqrt[3]{\frac{ai}{biq}}$ . Въ виду этого обозначенію (42) можно дать видъ:

$$s = \frac{h_0}{H_1} \sqrt[3]{\frac{ai}{biq}},$$

гдѣ  $\frac{h_0}{H_1}$  есть правильная дробь. Неравенство (41) будетъ удовлетворено, если  $x < x_0$ , т.-е. если:

$$\frac{h_0}{H_1} \downarrow \frac{c}{bq} < \frac{1}{2} \uparrow \frac{1}{4} \cdot 2 \frac{c}{bq}$$

Отсюда находимъ, что глубина за скачкомъ будетъ больше глубины равно мѣрнаго течения, если будетъ удовлетворяться условие:

$$\frac{h_0}{H_1} < \frac{1}{2} \downarrow \frac{1}{4} \cdot 2 \frac{c}{bq}$$

Легко видѣть, что отношеніе въ правой половинѣ неравенства, при всѣхъ разсматриваемыхъ значеніяхъ уклона ( $0 < \frac{c}{bq} < 1$ ), само измѣняется въ предѣлахъ отъ 1, при  $\frac{c}{bq} = 1$ , до 0, при  $\frac{c}{bq} = 0$ , получающаяся въ последнемъ случаѣ неопредѣленность раскрывается по общимъ правиламъ анализа. Оставаясь въ этихъ предѣлахъ непрерывнымъ и не имѣя здѣсь ни максимума, ни минимума, это выраженіе, вообще, представляется въ разсматриваемыхъ предѣлахъ *правильной дробью*. Называя эту дробь буквой  $\delta$ , заключаемъ, что глубина  $h$  за скачкомъ будетъ больше глубины  $H$  равно мѣрнаго течения, если передъ скачкомъ не только соблюдено условие  $h_0 < H_1$  согласно § 33, но и выполнено требованіе:

$$h_0 < \delta H_1, \dots \dots \dots (44)$$

гдѣ

$$1 > \delta > 0.$$

Итакъ, на фиг. 195, представляющей случай скачка при малыхъ уклонахъ, можно провести третью линию  $PQ$ , параллельную дну, на разстояніи отъ него равномъ  $\delta H_1$ . Если въ  $M$  глубина меньше этой величины, то скачокъ подымается выше  $AB$ , что и представлено на фигурѣ. Если же въ каналѣ нѣтъ точки съ глубиною ниже линии  $PQ$ , а есть только точки между  $PQ$  и  $CD$ , то скачокъ прямой  $AB$  достигнуть не можетъ. То же самое положеніе можно выразить иначе, имѣя въ виду, что глубина въ каналѣ опредѣляется расходомъ и скоростью: если вода поступаетъ въ каналъ, обладая достаточнымъ запасомъ живой силы ( $h_0 < \delta H_1$ ), то она въ состояніи подняться выше прямой  $AB$ ; если же этотъ запасъ недостаточенъ ( $H > h_0 > \delta H_1$ ), то до этой высоты она подняться не сможетъ.

Собразно съ этимъ долженъ, конечно, видоизмѣняться и внѣшній видъ скачка: въ первомъ случаѣ, придерживаясь схемы (фиг. 195), имѣется

тый скачокъ, отънесенный отъ отверстія на нѣкоторое разстояніе, тѣмъ больше, чѣмъ больше скорость вытекания, такъ какъ, конечно, глубина  $h$  есть возрасти до  $H_1$  только на протяженіи нѣкотораго конечнаго пути. Если вода можетъ подпрыгнуть выше линіи  $AB$ , то поверхность за скачкомъ покрывается волнами (фиг. 201). Во второмъ случаѣ собственно скачокъ, какъ внезапное повышеніе горизонта, будетъ отсутствовать, такъ какъ, согласно § 33, уровень воды можетъ устойчиво удержаться между прямыми  $AB$  (равномѣрнаго теченія) и  $CD$  (критической), только на участкѣ передъ скачкомъ пониженія. Если этого нѣтъ, т.-е. если мы имѣемъ достаточно длинный каналъ, то вода своимъ уровнемъ, опредѣляемымъ условіями вѣднѣйшаго теченія по каналу, напр., уровнемъ равномѣрнаго теченія  $AB$ , подойдетъ къ сосуду вплотную, такъ что истечение будетъ происходить на томъ уровнѣ, конечно, сильно волнуя всю массу жидкости. Подобный случай при водосливѣ представленъ на фиг. 104.

Сдѣлаемъ еще одно замѣчаніе. При скачокѣ на маломъ паденіи двѣ причины, повидимому, причины волновать поверхность за скачкомъ только въ исключительномъ случаѣ  $h_0 = \delta H_1$ , когда глубина за скачкомъ сразу является точно равной глубинѣ равномѣрнаго теченія; вообще же это волненіе неизбѣжно, такъ какъ только случайно можетъ оказаться причина, способная удержать воду на вычисленной глубинѣ; безъ такой причины вода неизбежно упадетъ на меньшую глубину, опять подыметъ и т. д., т.-е. поверхность скачка покроется волнами. При скачокѣ на крутыхъ паденіяхъ, наоборотъ, совсѣмъ нѣтъ, повидимому, причины къ такому волненію: для того, вода должна плавно подниматься по кривой  $BA$  (фиг. 197). Это изображеніе вполне подтверждается и точными изысканіями Буассинеса \*) и также и опытомъ: въ послѣднемъ случаѣ, т.-е. при крутомъ паденіи, скачокъ  $DB$  представляетъ почти отвѣсную стѣнку, покрытую вѣной, которая увлекается, конечно, и на поверхность  $BA$ , но эта послѣдняя никогда не представляетъ той бурно волнующейся и покрытой широкими волнами поверхности, которая всегда наблюдается въ скачкахъ при малыхъ паденіяхъ.

Мы уже упоминали, что скачокъ сопровождается потерей живой силы. Подобно тому, какъ происходитъ потеря напора при внезапномъ расширеніи трубы. Опредѣлимъ величину этой потери.

Передъ скачкомъ въ  $AB$  (фиг. 200) вода несетъ въ каждомъ килограммѣ запасъ живой силы, который можно сдѣлать, какъ мы видѣли, количествомъ  $\frac{c^2 v_0^2}{2g}$ . За скачкомъ въ  $CD$  вода поднимается на высоту  $h - h_0$ , которую можно опредѣлить по ур-ню (40), и, кромѣ того, несетъ запасъ живой силы  $\frac{c^2 v^2}{2g}$ . Разность этихъ двухъ величинъ и есть чистая потеря, происходящая отъ скачка, такъ какъ вліяніе вѣшняго тренія ничтожно,

\*) Однако выведенное нами соотношеніе (44) не встрѣчается ни въ курсахъ Гидравлики другихъ авторовъ, ни въ изслѣдованіяхъ Boussinesq'a.

по сравнительной малости длины  $BD$ , влияние же внутреннего трения уже отбрасано в коэффициент  $\alpha'$ . Итакъ, потеря напора определяется такъ:

$$h = \frac{\alpha'}{2\eta} (v_0^2 - v^2) (h - h_0).$$

Собственно говоря, величину  $(h - h_0)$  слѣдовало бы умножить на  $\cos i$ , такъ какъ мы брали глубину не вертикально, а перпендикулярно дну. Но такъ какъ даже и при крутомъ паденіи, напр., въ 0,005, наклонъ дна не превосходить  $20'$ , то  $\cos$  столь малаго угла можно считать равнымъ единицѣ. По той же причинѣ это ур-іе предполагаетъ, что точки  $B$  и  $D$  лежатъ на одной горизонтальной линіи. Наконецъ, членъ  $(h - h_0)$  представляетъ приращение въ каждомъ килограммѣ воды работы вѣса и работы гидродинамическаго давления на перемѣщеніи отъ  $AB$  до  $CD$ , въ предположеніи параллельности струй въ этихъ крайнихъ сѣченіяхъ.

Разлагая разность квадратовъ на два множителя и имѣя въ виду ур-іе (39), получимъ:

$$h = \frac{\alpha'}{2\eta} \left( \frac{Q}{hh_0} \pm \frac{Q}{hh} \right) \cdot \frac{g}{2\alpha'Q} (h^{2l} - h_0^{2l}) - (h - h_0) - \frac{1}{4} \left( \frac{h^2}{h_0} - \frac{h_0^2}{h} \right) (h - h_0) - (h - h_0).$$

Отсюда, помощью простыхъ преобразованій, получимъ окончательно.

$$h = \frac{(h - h_0)^2}{4hh_0}$$

Впервые обратилъ вниманіе на эту потерю и вычислилъ ее Bélanger. Пользуясь ур-іемъ расхода, ту же самую потерю напора можно представить еще такъ:

$$h = \frac{Q(v_0 - v)^2}{4h^2v_0^2}$$

Какъ видно, величина этой потери отличается отъ величины потери напора, вычисленной по принципу Борда-Карно.

Здѣсь необходимо сдѣлать оговорки для двухъ замѣчавій, сдѣланныхъ выше. Въ § 33 по поводу фиг. 196 мы сказали, что скачокъ представляетъ прямую выгоду. Это вѣрно до тѣхъ поръ, пока большая величина скорости  $v_2$  входа въ каналъ естественно получается вслѣдствіе требованій конструкции двигателя, для котораго, вообще, какъ увидимъ позднѣе, малая величина  $v_2$  есть одно изъ существенныхъ условий выгодности работы. Если же для получения достаточно большой величины  $v_2$ , въ видахъ получить скачокъ, пришлось бы построить двигатель съ невыгодною для него вели-



чин  $v_2$ , то это была бы двойная потеря.—и на двигатель, и на томъ, что изъ напора  $\frac{v_2^2}{2g}$  часть его оказалась бы безвозвратно потерянной, какъ мы это только что видѣли, и не была бы утилизирована даже для отведения воды отъ двигателя.

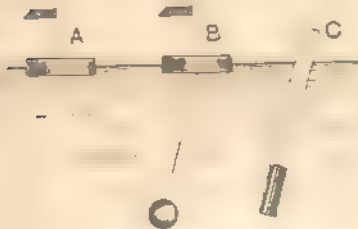
Во-вторыхъ, въ этомъ параграфѣ мы указали, что при крутомъ паденіи дна ( $i > i_0$ ) «нѣтъ, повидимому, причины» для образования волнующейся поверхности. Причина, несомнѣнно, есть,—это только что вычисленная потеря напора при скачкѣ. Но она одинаково есть и при малыхъ уклонахъ, при которыхъ есть, сверхъ того, другая причина, вызывающая волненіе, указанная выше; въ итогѣ въ этомъ второмъ случаѣ волненіе гораздо значительнѣе, чѣмъ въ первомъ.

### § 35. Гидрометрическіе приборы.

Если извѣстны площадь живого сѣченія потока  $F$  и средняя скорость  $v$ , то секундный расходъ опредѣляется произведеніемъ  $Fv$ . Площадь живого сѣченія, опредѣляется тщательнымъ промѣромъ. Для опредѣленія же скорости служатъ гидрометрическіе приборы.

Опишемъ нѣкоторые наиболѣе употребительные типы.

Поплавки (фиг. 204) устриваются или въ видѣ легкаго тѣла  $A^*$ , доски или шара, окрашеннаго въ яркій цвѣтъ или снабженнаго какимъ-нибудь знакомъ, чтобы его было хорошо видно (простой поплавокъ), или въ видѣ легкаго тѣла  $B$  съ подвѣшеннымъ грузомъ (двойной поплавокъ), или же въ видѣ полого шеста  $C$ , наполненнаго внизу тяжелымъ тѣломъ, наприм., свинцомъ.



Фиг. 204.

При измѣреніяхъ нужно выбирать участокъ рѣки возможно прямолинейный, съ ровнымъ дномъ; теченіе на этомъ участкѣ должно быть возможно равномернымъ. Измѣренія слѣдуетъ производить въ тихую погоду. Длина участка должна быть возможно велика, не менѣе 50 *mts*,

а лучше брать больше 100 *mts*. Перпендикулярно къ теченію рѣки провѣшиваются двѣ линіи; разстояніе между ними вымѣряютъ со всею возможною точностью. У начальной и конечной линіи располагаются два наблюдателя со свѣренными часами, отмѣчающіе моменты прохожденія поплавка черезъ эти линіи. Чѣмъ короче длина участка, служащаго для измѣренія скорости течения, и чѣмъ больше эта послѣдняя, тѣмъ точнѣе должно производить измѣреніе времени. Вообще секундная стрѣлка на часахъ необходима, а еще лучше употреблять секундомѣры, пускаемые въ ходъ одновременно со спускомъ поплавка и останавливаемые у каждой предѣльной линіи въ моменты прохожденія черезъ нее поплавокъ; искомое время дается разностью показаній обоихъ секундомѣровъ, которую можно взять изъ сличенія записей обоихъ наблюдателей. Поплавокъ слѣдуетъ спускать на воду метровъ на 25

\* Часто употребляютъ закупоренную бутылку, отчасти наполненную пескомъ.

выше первой линіи, чтобы онъ, подойдя къ ней, успѣлъ уже приобрести скорость течения. Необходимо наблюдать, сохраняется ли поплавокъ свое положеніе по ширинѣ канала, т.-е. идетъ ли онъ все время въ одномъ и томъ же направленіи, въ которомъ было вымѣрено разстояніе. Полезно поэтому по провѣшеннымъ линіямъ протянуть шнуры съ отмѣтками, дѣлящими ширину рѣки на равныя части. При измѣреніи скорости посерединѣ рѣки поплавокъ слѣдуетъ спускать тоже по серединѣ, и третій наблюдатель, находящійся въ лодкѣ ниже второй линіи, долженъ замѣтить, прошелъ ли поплавокъ посерединѣ и вторую линію. Если желаютъ мѣрить скорость не на серединѣ, то поплавокъ нужно спускать нѣсколько ближе къ берегу, нежели та линіи, на которой желаютъ найти скорость, такъ какъ поплавокъ всегда нѣсколько сбивается въ сторону большей скорости, т.-е. къ серединѣ. Наблюдатель въ лодкѣ долженъ возможно точно отмѣтить то мѣсто ширины, гдѣ поплавокъ прошелъ вторую линію. Зная время прохождения и пройденный путь, легко найти скорость, считая движеніе равномернымъ.

Простой поплавокъ даетъ скорость на поверхности. Очевидно, онъ долженъ быть возможно легокъ, чтобы его собственный вѣсъ давалъ возможно малую слагающую по теченію. Поэтому ихъ дѣлаютъ часто полыми.

Если поплавкомъ обнаружена скорость  $v$ , то среднюю скорость  $v_m$  во всей вертикальной плоскости, въ которой онъ двигался, можно считать равной  $0,8v$ , если дно неровное и рѣка не широка; если же дно очень ровное и рѣка широка, то можно считать  $v_m$  равной  $0,9v$ . Обыкновенно считают  $v_m = 0,84 - 0,85 v$  (сравни послѣднія 4 формулы въ § 31)\*).

*Двойные поправки* употребляются для измѣренія скорости на глубинѣ. Это очень простой, но несовершенный приборъ. Для точности результата, т.-е. если желаютъ, чтобы весь приборъ двигался, по возможности, со скоростью нижняго шара, нужно, очевидно, чтобы площадь живого сѣченія, занятая нижнимъ шаромъ, была достаточно велика по сравнению съ площадью прочихъ частей (нити и поправка); въ то же время эта площадь должна быть возможно мала, чтобы находиться подъ вліяніемъ возможно малаго числа струй. Удельный вѣсъ нижняго тѣла долженъ быть достаточно великъ, чтобы быстро погрузиться, не успѣвая приобрести большую скорость среднихъ струй, и чтобы не очень качаться отъ неизбежныхъ при его погруженіи вихревыхъ движеній вокругъ него. Съ другой стороны, онъ долженъ быть легокъ, такъ какъ иначе вѣсъ его будетъ его гнать равномерно ускоренно. Верхнее тѣло должно быть возможно мало, чтобы не вліять на скорость всей системы, но объемъ его долженъ быть достаточенъ, чтобы поддерживать нижнее тяжелое тѣло. Наконецъ, нить должна быть возможно тонка, чтобы не вліять на результатъ, но достаточно прочна, чтобы выдерживать вѣсъ нижняго тѣла на воздухѣ. Самыя тонкія нити при большихъ глубинахъ все-таки вліяютъ на результатъ. Такимъ противорѣчивымъ условіямъ, конечно, удовлетворить нельзя.

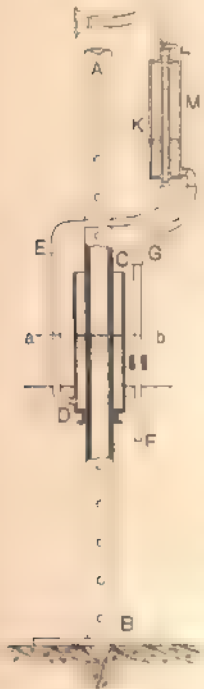
*Гидрометрическіе шесты* двигаются подъ вліяніемъ многихъ струй, следовательно, идутъ съ нѣкоторой средней скоростью. Чтобы палка шла со скоростью, средней для всей вертикали, длина погруженной ея части должна быть около  $0,92 - 0,94$  глубины рѣки на этой вертикали. Если рѣка

\*) Примѣчаніе см. на стр. 417.

очень широка, то скорость  $v$ , определенную такой палкой посерединѣ рѣки, можно считать за среднюю скорость во всемъ сѣченіи. Если рѣка узка, дно ровное, а сѣчение имѣетъ форму, приближающуюся къ сегменту круга или къ трапеціи, то эту скорость  $v$  нужно умножить на коэф-тъ, менѣеи единицы, чтобы получить величину, близкую къ средней скорости всего сѣченія.

При всѣхъ этихъ измѣреніяхъ, конечно, важно, чтобы они происходили при одинаковыхъ условіяхъ погоды и стоянія воды. Живое сѣченіе нужно измѣрить въ нѣсколькихъ мѣстахъ по длинѣ выбраннаго участка, чтобы убедиться, что движеніе на немъ близко къ равномерному, и взять среднее изъ полученныхъ измѣреній.

Съ помощью *гидрометрической трубы Франка* (Frank), исполняемой фирмою *Falter & Sohn* въ Мюнхенѣ, измѣряется средняя скорость на всей вертикали живого сѣченія, такъ что при употребленіи этого прибора достаточно измѣрить точно лишь одно живое сѣченіе. Схема устройства этого прибора состоитъ въ слѣдующемъ (фиг. 205).

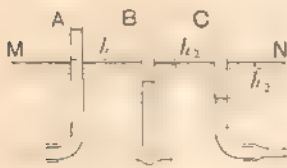


Фиг. 205.

При измѣреніяхъ трубка *CD* закрѣпляется такъ, чтобы конецъ *D* былъ опущенъ въ воду на 8-10 см. Натекающая на трубку *AB* вода подымается въ ней, а слѣдовательно, въ *CD* и въ *DE*, уровень воды до какой-нибудь линіи *ab*, лежащей выше уровня воды въ рѣкѣ. Такъ какъ этотъ подъемъ вызванъ влияніемъ скорости цѣлаго ряда точекъ по вертикали, то можно считать, что онъ вызванъ средней скоростью (теоретически это, конечно, не вѣрно). Въ трубкѣ же *FG*, благодаря ея четыремъ прорѣзамъ, уровень довольно близко совпадаетъ съ горизонтомъ въ рѣкѣ. Такимъ образомъ, о величинѣ средней скорости можно судить по разстоянію уровнейъ въ трубкахъ *DE* и *FG*. Для удобства отсчетовъ трубки соединены съ манометромъ *M* такъ, что отъ конца *E* идетъ каучуковая трубка къ внутренней стеклянной трубкѣ *K*, а

отъ конца *G*—къ наружной стеклянной трубкѣ *M*. Въ верхней оправѣ трубки *M* поставленъ кранъ *L*, отъ котораго далѣе идетъ каучуковая трубка; помощью мундштука ртомъ, а при большой высотѣ прибора особымъ насосомъ, можно присосать въ манометръ воду какъ изъ *DE*, такъ и изъ *GF*, а такъ какъ въ манометрѣ обѣ трубки вверху сообщаются, то въ немъ мы увидимъ ту же самую разность уровней, которая была въ *DE* и въ *GF*. Эта разность уровней читается на аллюминіевомъ поплавкѣ (запаянная съ обѣихъ концовъ трубка; на чертежѣ не показана), плавающимъ внутри трубки *K*. На немъ нуль нанесенъ въ верхнемъ концѣ соответственно его глубинѣ погруженія при плаваніи; присасываніе дѣлается до тѣхъ поръ, пока поплавокъ не всплыветъ. Отсчетъ дѣлается, конечно, при закрытомъ кранѣ *L*. На поплавокъ нанесены дѣленія, дающія сразу среднюю скорость въ предѣлахъ отъ 0,1 до 2,2 *m/hr sec*. Остроумный по идеѣ, этотъ приборъ мало распространенъ вслѣдствіе затрудненій при его калибровкѣ; кромѣ того, уровни въ трубкахъ *K* и *M* обычно довольно сильно колеблются, что очень затрудняетъ отсчеты.

*Гидрометрическія трубки Пито*, видоизмѣненные *Дарси* (Pitot-Darcy) употребляются для измѣренія скорости въ любой точкѣ живого сѣченія или, точнѣе,—скорости довольно тонкаго пучка струекъ. Идея ихъ основана на слѣдующемъ явленіи, подмѣченномъ впервые Пито: если въ жидкость, текущую со скоростью *v*, опустить открытую съ обѣихъ концовъ и согнутую въ видѣ буквы  $\Gamma$  трубку, при чемъ нижній конецъ повернуть противъ теченія (фиг. 206,



Фиг. 206.

трубка *A*), то вода въ ней поднимется выше уровня *MN* въ потокѣ. Если трубка не имѣетъ загнутаго конца (*B*) или если загнутый конецъ повернуть по теченію (*C*), то уровень въ нихъ будетъ стоять ниже уровня *MN*. Примѣрное объясненіе этому можно найти въ такихъ соображеніяхъ: въ трубкѣ *A*, струйки, подходя къ отверстию, отклоняются отъ своего теченія (какъ это показываютъ стрѣлки), описывая кривые пути, обращенные къ отверстию своею выпуклостью. Между тѣмъ всякое движеніе по кривой сопряжено съ появленіемъ центробѣжной силы, которая направлена въ сторону, противоположную положенію радиуса кривизны; въ этомъ случаѣ она направлена къ отверстию и вгоняетъ туда воду, поддерживая ее на нѣкоторой высотѣ  $h_1$  надъ уровнемъ *MN*. Въ трубкахъ же *B* и *C* пути, описываемые частицами, обращены къ отверстию своею вогнутою стороною, центробѣжная сила направлена отъ отверстия, уменьшаетъ передъ нимъ давленіе и понижаетъ уровень въ трубкахъ на высоту  $h_2$ ; понятно, что въ трубкѣ *C* пониженіе нѣсколько болѣе ощутительно, чѣмъ въ *B*, такъ какъ отверстие подвержено всасывающему дѣйствию большаго числа струекъ.

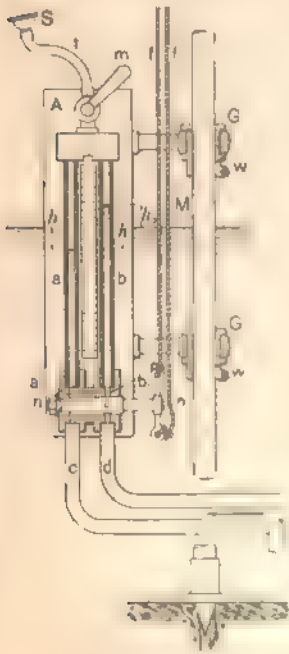
Естественно считать повышеніе  $h_1$  и пониженіе  $h_2$  пропорциональными скоростному напору  $\frac{v^2}{2g}$ , такъ какъ центростремительное ускореніе пропорціонально квадрату скорости на траекторіи. Поэтому пишутъ:

$$h_1 \approx \frac{v^2}{2g}; \quad h_2 \approx \frac{v^2}{2g}.$$

гдѣ коэф-ты  $\zeta'$  и  $\zeta''$  опредѣляются опытомъ: въ стоячей водѣ ведутъ трубки съ опредѣленной скоростью и замѣчаютъ высоты  $h_2$  и  $h_1$ . По написаннымъ соотношеніямъ можно опредѣлять  $\zeta'$  и  $\zeta''$ . Наблюденіе надо повторить при различныхъ скоростяхъ и для  $\zeta'$  и  $\zeta''$  взять среднія изъ полученныхъ значеній. Если отверстия въ трубкахъ велики, то уровень въ нихъ сильно колеблется, что затрудняетъ отсчитать высоту  $h_1$  и  $h_2$ . Этими отверстиями Дарси далъ поэтому диаметры только въ 1,5 мм.

Такия трубки съ цѣлью опредѣленія скорости были применены впервые *Pitot*, но его приборъ состоялъ изъ одной трубки: существенный его недостатокъ представляла трудность отсчета, такъ какъ его нужно производить, не вынимая трубки изъ воды, между тѣмъ какъ уровень колеблется и снаружн трубки, и внутри ея, да и самая высота подъема при малыхъ скоростяхъ слишкомъ незначительна.

Приборъ *Дарси* состоитъ изъ двухъ стеклянныхъ трубокъ *a* и *b* (см. схему на фиг. 207), диаметромъ 15—20 мм. Вверху эти трубки соединяются общою металлическою оправою, снабженною краномъ *m*, служащимъ для сообщенія или разобщенія трубокъ *a* и *b* съ атмосферою. Отъ крана *m* идетъ каучуковая трубка *t*, оканчивающаяся жестянымъ мунштукомъ *S*. Въ нижней части обѣ трубки заключены также въ общую оправу съ двумя цилиндрическими кавалами *a*<sub>1</sub> и *b*<sub>1</sub>, составляющими продолженія трубокъ *a* и *b*; каждый каналъ затѣмъ продолжается въ металлическую трубку, при чемъ конецъ трубки *d* загнуть впередъ противъ течения, конецъ же трубки *c* сдѣланъ перпендикулярнымъ къ направленію течения. Кранъ *m*<sub>1</sub>, имѣющій два круглыхъ отверстия одинаковаго диаметра съ трубками, служитъ для одновременнаго замыканія трубокъ *a* и *b*. Весь приборъ прикрѣпляется къ деревянной доскѣ *A*, въ которой сдѣланы соответственные углубленія для помѣщенія трубокъ и оправы. Доска поддерживается помощью шеста *M*, около котораго она можетъ вращаться на втулкахъ *G*, *G*; послѣднія можно закрѣпить въ любомъ мѣстѣ шеста посредствомъ винтовъ *w*. Нижний конецъ шеста за-



Фиг. 207.

острѣнъ и снабженъ башмакомъ, а чтобы шестъ не углублялся въ дно потока, служитъ металлическій дискъ. Чтобы нарушенія въ струяхъ, которыя вносятся шестомъ, не отражались на показаніяхъ прибора, дѣлаютъ такъ, что оба конца *c* и *d* въ нихъ надлежащемъ относительномъ расположеніи выступали впереди шеста, предварительно обогнувъ его.

Для измѣренія скорости на известной малой глубинѣ приборъ погружаютъ въ воду съ открытымъ краномъ *m*; при этомъ доска *A* теченіемъ рѣки устанавливается въ такое положеніе, что колѣно трубки *d* обращается противъ течения; если кранъ *m*<sub>1</sub> открытъ, то вода въ трубкѣ *ac* будетъ стоять

ниже уровня воды в потокѣ на некоторую величину  $h_1$ , а в трубкѣ  $bd$  выше уровня воды в потокѣ на величину  $h_2$ . Закрывъ помощью шпурковъ  $f, f$  край  $mn_1$ , вынимаютъ приборъ изъ воды; разность уровней в обѣихъ трубкѣхъ  $h = h_1 + h_2$  сохранится и можетъ быть прочтена со всей возможной точностью.



Фиг. 208.

При измѣреніи скорости на большой глубинѣ, помощью мундштука  $S$  вдуваютъ ртомъ воздухъ в верхнюю часть трубокъ и такимъ образомъ понижаютъ горизонтъ воды внутри трубокъ одновременно на одну и ту же величину, такъ что разность горизонтовъ при этомъ не измѣнится; закрывъ сначала верхній край  $m$ , а потомъ нижній  $mn_1$ , вынимаютъ приборъ изъ воды для отчета. Наоборотъ, при измѣреніи скорости на незначительной глубинѣ, напр., у берега, для того, чтобы видѣть показанія, высасываютъ воздухъ черезъ каучуковую трубку и такимъ образомъ поднимаютъ оба столба на одну и ту же величину.

Волосность не имѣетъ никакого вліянія на точность показаній, такъ какъ вслѣдствіе волосности вода поднимается в обѣихъ трубкѣхъ на одну и ту же величину, — слѣдовательно, разность горизонтовъ отъ этого не измѣняется.

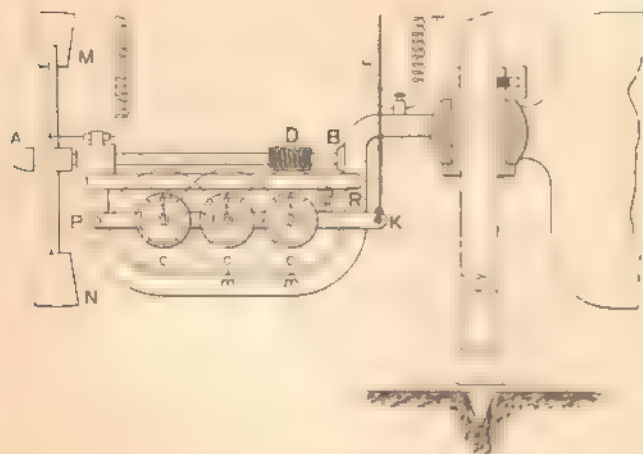
Описанная схема приборовъ Pitot-Darcy соответствуетъ французскимъ конструкціямъ (Salomon, Paris). В кабинетѣ гидравлической лабораторіи И. Т. У. имѣется такой приборъ, съ измѣненіемъ, внесеннымъ инженеромъ *Ritter* омъ и состоящимъ в слѣдующемъ: къ трубкѣ  $c$  припаяна еще горизонтальная тонко-

стѣнная трубка, діаметромъ 10 *mm* и длиною около 80 *mm*; ось ея параллельна горизонтальной части  $d$ . Это сдѣлано для того, чтобы конецъ пьезометрической трубки не нарушалъ правильнаго теченія тѣхъ струекъ, давленіе в которыхъ она должна измѣрять; вслѣдствіе этого уровень в трубкѣ  $c$  не опускается ниже уровня в потокѣ, а какъ разъ съ нимъ совпадаетъ. На фиг. 208 представлена фотографія этого прибора; на ней лѣво виденъ отгибъ трубокъ, для того чтобы обогнуть шестъ; отдѣльно представлена деталь концевъ трубокъ  $c$  и  $d$ . Существуютъ также нѣмецкія конструкціи такихъ приборовъ, напр. фирмы *Am-ler-Lafon* в *Schaffhausen* I; конструктивно онѣ существенно отличаются отъ вышеописанной, не требуя, наприм., выниманія прибора изъ воды для отчета, что, конечно, весьма удобно; но принципъ устройства остается тотъ же самый. Эти приборы мало пригодны при малыхъ скоростяхъ теченія и для измѣненій на боль-

пихъ глубинахъ; обыкновенно ихъ употребляютъ при глубинахъ не болѣе 2 *mlr.*

Слѣдуетъ отмѣтить, что есть полная возможность употребить приборы, построенные по этому принципу, также для опредѣленія скоростей въ разныхъ точкахъ сѣченія трубъ. Само собою понятно, что для этой цѣли приборъ долженъ получить гораздо болѣе мѣтательные размѣры. Въ настоящее время они примѣняются въ гидравлической лаборатори И. Т. У. и даютъ вполне удовлетворительные результаты, подобно тому, какъ это было установлено и американскими инженерами.

Устройство *вертушки* (мельницы) *Waltman's* на первоначальна и конструкціи видно изъ схематическаго чертежа (фиг. 200). *AB* есть ось на концѣ *A* которой укрѣплены два (или болѣе) наклонныхъ крыла *MN*. Влѣд-



Фиг. 200

ствие теченія воды крылья и ось приходятъ во вращеніе, и по числу оборотовъ оси за извѣстное время можно судить о скорости теченія. Счетъ оборотовъ ведется десятичнымъ счетчикомъ, состоящимъ изъ червяка *D* и трехъ зубчатыхъ колесъ (*C, C, C*), для которыхъ передаточное число есть 10\*). Колеса счетчика имѣютъ свои опоры въ рычагѣ *PK*, вращающема въ шар-

нирѣ *P*. Пружина *A* постоянно отжимаетъ рычагъ внизъ и стремится вывести счетчикъ изъ зацѣпленія съ червякомъ. Натяжной шнуръ *L*, привязанный къ свободному концу рычага, наблюдатель можетъ привести счетчикъ въ зацѣпленіе и начать счетъ оборотовъ. По истеченіи опредѣленнаго промежутка времени наблюдатель отпускаетъ шнурокъ, пружина выводитъ счетчикъ изъ зацѣпленія, и счетъ оборотовъ прекращается. Чтобы при выниманіи прибора изъ воды счетчикъ не могъ случайно повернуться, на обойницѣ, въ которой вращается ось, имѣются два штифта *m*, которые при расцѣпленіи счетчика входятъ во впадины между зубцами закрѣпляютъ положенія колесъ.

Приборъ такого же устройства, но болѣе деликатный и чувствительный, можетъ употребляться какъ анеометръ, т. е. для опредѣленія скорости движенія воздуха или вообще какого-нибудь газа.

\* На схематической фигурѣ 200 это передаточное число не соблюдено

Слабую сторону этой первоначальной конструкции вертушки представляеть устройство счетчика. Во-первых, онъ легко засоривается; во-вторыхъ, на точности показаній отражается инерція его частей, такъ какъ въ промежутокъ времени наблюденія включается весь периодъ пуска въ ходъ счетчика; въ-третьихъ, и главнымъ образомъ, затруднительна необходимость для всякаго отсчета вынимать приборъ изъ воды; это очень сильно замедляетъ всю операцію опредѣленія скоростей на данной вертикали, которая и безъ того довольно кропотлива, если число точекъ опредѣленія велико. Поэтому фирмой J. Amsler-Laffon въ Schaffhausen'ѣ давно приименъ къ вертушкѣ Вольтмана электрической счетчикъ. Схема его устройства видна на той же фиг. 209, гдѣ токъ изъ батарей (теперь употребляются сухие элементы; раньше употребляли токъ отъ спирали Румкорфа) подводится къ металлической оправѣ по одному электроду; а другой электродъ, выступая изъ оправы, въ которой онъ изолированъ, можетъ давать электрический контактъ съ каждой, или съ одной изъ спиць вертушки при ея вращеніи. Такимъ образомъ токъ періодически замыкается, благодаря чему передъ наблюдателемъ можетъ появляться какой-нибудь сигналъ, зрительный или слуховой, или эти послѣдовательныя замыканія могутъ быть записаны на лентѣ, равномерно перемищающейся отъ часового механизма. Само собою понятно, что это только схема: контактъ для замыканія тока долженъ быть надежно обезпеченъ; въ то же время онъ долженъ вносить лишь небольшое сопротивление и по возможности долженъ быть защищенъ отъ засоренія и даже отъ воды. Въ разныхъ конструкціяхъ это выполняется различно вплоть, напр., до постановки всего контактнаго устройства въ герметически закрытой коробкѣ, при чемъ ось вертушки не входитъ внутрь этой коробки, и подвижныя части контактовъ приводятся во вращеніе не прямо отъ оси, а благодаря магниту, помѣщенному внѣ коробки и вращающемуся вмѣстѣ съ осью вертушки.

Кромѣ счетчика и его сигнализациі, вертушки различаются формою крыльевъ. Вмѣсто плоскихъ и косо поставленныхъ лопатокъ, употреблявшихся первоначально, ихъ исполняютъ въ видѣ винтовыхъ поверхностей, постоянного шага, связанныхъ съ втулкой спицами или продолжающихся вплоть до втулки. Последняя форма введена въ употребленіе австрийскимъ профессоромъ *Hartacher*'омъ, для того чтобы сдѣлать вертушку возможно мало чувствительной къ засоренію водорослями, травою и т. п.—Отмѣтимъ также, что на схемѣ фиг. 209 указанъ руль, удерживающій весь приборъ въ плоскости, опредѣляемой направлениемъ теченія. При этомъ предполагается, что вертушка виситъ на проволочномъ тросѣ, направляемая вертикальнымъ шестомъ, около котораго она можетъ свободно вращаться. Это расположеніе годится при измѣреніи скорости безъ отношенія къ ея направленію. Когда рѣчь идетъ объ измѣреніи расхода, т.-е. объ измѣреніи не самой скорости, а ея слагающей, нормальной къ живому сѣченію, правильнѣе не позволять вертушкѣ вращаться около штанги, такъ или иначе закрѣпляя на ней втулку станины вертушки. Для этой цѣли могутъ служить—штанга и втулка овальнаго или призматическаго сѣченія: можно также закрѣплять вертушку на штангѣ нажимнымъ винтомъ: тогда вертушка не



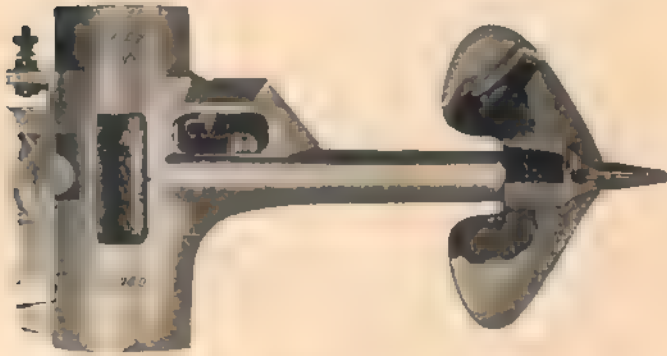
может скользить вдоль по штангѣ, но вмѣстѣ съ нею опускается на ту или другую глубину. Въ *обоихъ случаяхъ роль служить не для направле- нія, а для уравновѣшенія прибора.*—Для предохраненія крыльевъ вертушки и ея тонкой оси отъ поломокъ при случайныхъ ударахъ о твердыя тѣла дна потока, французскій инженеръ *Rider* предложилъ ставить вокругъ крыльевъ вертушки оправу (короткую, неподвижную круглую цилиндрическую трубку, какъ бы футляръ); при этомъ устройствѣ вертушка даетъ именно лишь лагающую скорости въ томъ направленіи, въ которомъ расположена ея ось.—Наконецъ, есть вертушки, которыя употребляются для измѣренія сразу средней скорости на вертикали (вертушка Гайоша—*Hajos*), это достигается тѣмъ, что вертушку медленно двигаютъ вдоль по вертикали вверхъ и внизъ, напр., со скоростью  $0,1-0,2 \text{ mtr/sec}$ ; въ то же время каждый оборотъ колеса вертушки записывается на лентѣ пишущаго прибора, подобнаго телеграфному; на этой лентѣ, кромѣ того, отмѣчаются—пробѣгъ вертушки по вертикали и полусекунды. При чтеніи и обработкѣ этой ленты можно найти значеніе скорости для каждой точки, а также вычислить среднюю скорость. Останавливая такой приборъ на какой-нибудь точкѣ, удобно вести наблюденія надъ явленіемъ пульсацин, т. е. надъ колебаніями скорости въ одной и той же точкѣ сѣченія около нѣкотораго средняго значенія. Процедура измѣренія скорости на вертикали помощью вертушки Гайоша протекаетъ скорѣе, нежели при употребленіи вертушекъ обычнаго типа; зато кабинетная работа подсчета удлиняется; кромѣ того, въ опредѣленіе скорости вносятся погрѣшности вследствие инерции прибора, который всякій разъ идетъ со своею скоростью, не вполне соответствующей скорости движенія частицъ воды, окружающихъ приборъ во всякій данный моментъ; къ счастью, скорость прибора временами больше, временами меньше нужной скорости, смотри по тому, переходитъ ли вертушка отъ болѣе быстро текущихъ струй къ болѣе медленнымъ или наоборотъ, такъ что ошибки располагаются въ обѣ стороны.

Для примѣра приводимъ на фиг. 210 фотографію вертушки, принадлежащей гидравлической лабораторіи И. Т. У. и построенной фирмой A. Ott въ Kempten'ѣ. Здѣсь крылья, Гарлаховской формы, для легкости сдѣланы изъ алюминія; они навиваются на стальной валикъ, который впереди лежитъ на шариковомъ подшипникѣ, хорошо защищенномъ отъ засоренія, а заднимъ концомъ опирается на агатовый подпятникъ. Благодаря этому чувствительность прибора такова, что онъ вращается, если на него просто дуть ртомъ. Передъ подпятникомъ на валикѣ нарязанъ однооборотный винтъ, всегда находящійся въ сдѣленіи съ колесомъ, имѣющимъ 25 зубцовъ. Ось этого колеса лежитъ на остріяхъ, для уменьшенія тренія, и находится всегда въ контактѣ съ однимъ электрическимъ проводомъ. На боковой плоскости этого колеса ввернуть маленький штифтъ (см. фиг. 211), который вращается вмѣстѣ съ колесомъ и въ теченіе нѣкоторой части оборота остается въ соприкосновеніи съ маленькой гибкой пружинкой, соединенной съ другимъ проводомъ; все то время, пока штифтъ касается пружинки, токъ замкнутъ, вследствие чего звонитъ звонокъ. Измѣряя по секундомѣру промежутки времени, протекающие между моментами прекращенія звонка, находимъ время 1 оборота колеса или 25 оборотовъ оси вертушки. На обѣихъ фигурахъ ясно

видны мѣста прикрѣпленія проводовъ къ батарѣ и звонку, овальная форма втулки, нажимной винтъ, которымъ она прикрѣпляется къ штангѣ, а также



Фиг. 20.



Фиг. 21.

прорѣзъ во втулкѣ съ мѣткою, помощью которой можно измѣрить разстоянiе отъ оси вертушки до конца штанги; это нужно для установленiя вертушки на желаемую глубину или для опредѣленiя, на какой глубинѣ она стоитъ. Изъ фотографии усматривается стремленiе конструктора (фирма А. Отт по указаниямъ главнаго инженера Швейцарскаго гидрометрическаго бюро Эппера—Л. Ерре) придать всему прибору формы, возможно мало нарушающiя теченiе отдѣльныхъ струй потока.

Для того чтобы перейти от наблюдений за числами оборотов вертушки къ скорости потока, нужно предварительно тарировать ее, подобно тому, какъ это было указано для трубокъ Нпто, т. е. двигать вертушку съ известною скоростью въ стоячей водѣ и замѣчать какъ эту скорость, такъ и числа оборотовъ вертушки въ единицу времени, или, какъ это бываетъ удобно для вычислений времени, необходимыя для того, чтобы вертушка сдѣлала то или другое число оборотовъ (обыкновенно отъ звонка до звонка). Пренебрегая той разницей, которая существуетъ въ распредѣленіи струй, натекающихъ на вертушку съ неподвижной осью, и струй, образующихся вокругъ вертушки вслѣдствіе ея движенія въ стоячей водѣ, можно будетъ послѣ такой тарировки дѣлать заключенія о скорости струй, заставившихъ вертушку дать то или иное число оборотовъ въ единицу времени. Имѣются спеціальныя учрежденія, которыя занимаются тарированіемъ такихъ приборовъ, напр., въ Петербургѣ—гидравлическая лабораторія при министерствѣ путей сообщенія; тамъ же—въ лабораторіи для опредѣленія сопротивленія движенію моделей судовъ. Большою известностью пользуются мюнхенская и берлинская лабораторія при политехникумахъ.

Если  $v$  есть скорость теченія, или движенія оси вертушки, а  $n$ —число оборотовъ крыльцевъ (обыкновенно въ 1 секунду), то связь между этими двумя величинами близка къ пропорциональности, такъ что можно писать:

$$v = a + bn.$$

Однако въ дѣйствительности нѣтъ полной пропорциональности между  $v$  и  $n$ ; истинная связь между ними ближе передается ур-немъ:

$$v = cn + \sqrt{dn^2 + e}.$$

Эту послѣднюю формулу примѣняетъ мюнхенская лабораторія. Въ первой формулѣ величина  $a$ , а во второй—величина  $\sqrt{e}$  представляютъ ту скорость, которой соответствуетъ  $n = 0$ , т. е. которой приборъ не чувствуетъ. Конечно, она должна быть возможно мала. Въ приборахъ фирмы А. Отт она достигаетъ 0.037 *m/s*, какъ это, напримѣръ, имѣетъ мѣсто для колеса № 1 вертушки гидравлической лабораторіи Техническаго Училища.

Эпперъ, на своей Бернской станціи для тарирования вертушекъ придерживается первой формулы, какъ болѣе простой; но для согласованія наблюденій съ формулой онъ даетъ каждой вертушкѣ 2 серіи коэффициентовъ  $a$  и  $b$ : одна годится для скоростей малыхъ, другая для большихъ; конечно, указывается также та предѣльная скорость, которая разграничиваетъ примѣненіе этихъ двухъ уравненій \*).

\* Здѣсь не мѣсто останавливаться на интереснѣхъ объясненіяхъ, которыя привелъ Эппера, а за нихъ и другихъ въ такому представленію. Упомяну о немъ лишь для того, чтобы указать, что по этому вопросу есть разные мнѣнія. Вобщемъ по предмету гидрометрии, а въ частности по конструкціямъ, тарированію и методамъ употребленія вертушекъ,

Когда определѣніе скоростей служить для измѣренія расхода, то въ живомъ сѣченіи намѣчаютъ рядъ вертикалей 1, 2, 3... (фиг. 212); на каждой изъ нихъ въ нѣсколькихъ точкахъ опредѣляютъ скорости и по нимъ находятъ среднія скорости  $v_1, v_2, v_3, \dots$  для каждой вертикали. Это определѣніе средней скорости лучше всего дѣлать такъ: нужно построить кривую скоростей, откладывая ихъ отъ одной и той же вертикали. Измѣривъ площадь этой кривой и раздѣливъ на глубину вертикали, получимъ среднюю скорость. Только съ ошибкой можно считать среднюю скорость на вертикали какъ среднее арифметическое отдѣльныхъ

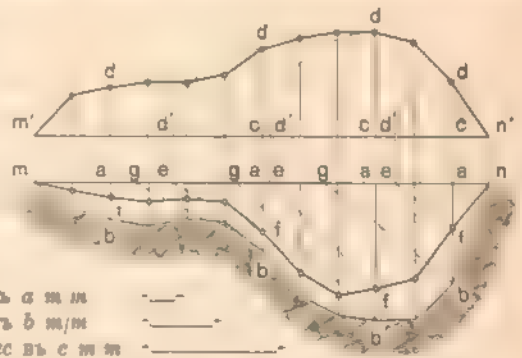


Фиг. 212.

опредѣлений скорости въ разныхъ точкахъ этой вертикали. Зная далѣе расстояние между вертикалями и ихъ глубину, легко сосчитать площадь  $abcd = \sum f$ , для которой среднюю скорость принимаютъ равною средней скорости  $v_m$  на соответственной вертикали. Взявъ для всего сѣченія сумму  $\sum \sum f \cdot v_m$ , опредѣлимъ такимъ образомъ расходъ.

Вмѣсто такого суммированія расходовъ въ отдѣльныхъ элементахъ живого сѣченія, заключенныхъ между смежными вертикальными линиями можно представить себѣ все живое сѣченіе раздѣленнымъ на элементы вертикальными и горизонтальными линиями, выбранными въ соответствии съ тѣми точками, въ которыхъ опредѣлены скорости. Послѣ этого придется сложить все произведенія отдѣльныхъ элементарныхъ площадей на соответствующія скорости.

Удобно построене *Haulscheta*, дающее графически величину расхода. Вычерчиваемъ (фиг. 213) живое сѣченіе  $m b b b n$ ; для общности допустимъ, что въ горизонтальномъ направленіи 1 mtr представлѣтъ  $a$  m, а въ вертикальномъ— $b$  m. Проводимъ въ этомъ живомъ сѣченіи тѣ вертикали  $ab, ab, ab$ , въ которыхъ опредѣлены среднія скорости  $v_m$ . Продолжаемъ ихъ кверху и отъ



Фиг. 213.

какой-нибудь прямой  $m'n'$ , параллельной  $mn$ , откладываемъ на соответственныхъ вертикаляхъ среднія скорости  $v_m = cd$  въ новомъ масштабѣ, принимая  $c$  m за 1 mtr sec. Получаемъ кривую скоростей  $m'd'd'dn'$ . Переносимъ

существуетъ цѣлая литература. Кромѣ такихъ энциклопедическихъ назавій, какъ отдѣлъ Der Wasserbau въ *Handbuch der Ingenieurwissenschaften*, укажемъ: Н. Тяпкинъ „Приборы для опредѣленія скоростей и расходовъ воды въ открытыхъ руслахъ“. Москва, 1901 г. W. Muller—Hydrometrie. Hannover, 1903. Также *Schweizerische Bauzeitung*, второе полугодіе 1906 года—

скорости  $cd$  въ  $cd'$  и въ  $ae$ . Отъ точекъ  $a$  въ ту же сторону откладываемъ  $ag = c$ , т. е. той длинѣ, которая была принята за скорость въ 1  $mtr/sec$ , и соединяемъ точки  $g$  съ точками  $b$  профиля сѣченія. Проведя далѣе линіи  $af$  параллельно  $dg$ , получаемъ рядъ точекъ  $f$ , которыя соединяемъ непрерывной кривою  $mfffm$ . По построенію легко видѣть, что  $af = ad \frac{ae}{ag}$ , или если отдѣльнымъ отрѣзкамъ придавать значеніе не только длинѣ, но и изображаемымъ ими величинамъ, то

$$af = \frac{h}{l} \cdot b,$$

гдѣ  $h$  есть глубина  $ab$ . Принимая линію  $mn$  за ось  $x$ -овъ и называя ширину  $mn$  черезъ  $l$ , получимъ, что площадь  $F$  кривою  $mffnm$  выражается черезъ

$$F = \int_0^l h r dx.$$

Эту площадь удобно измѣрять планиметромъ. Съ другой стороны расходъ  $Q$ , очевидно, равенъ:

$$Q = \int_0^l h r dx = F.$$

Отсюда видно, что площадь кривою  $mffnm$  представляетъ собою расходъ  $Q$ , при чемъ, конечно, каждая изъ входящихъ въ выраженіе  $F$  величинъ ( $h$ ,  $l$ ,  $r$ ) должна быть взята въ соответствующемъ масштабѣ. Если, какъ выше сказано, буквами  $a$ ,  $b$  и  $c$  обозначены тѣ числа миллиметровъ, которыя приняты за единицу соответствующихъ изображаемыхъ величинъ, и если буквой  $F$  обозначимъ то число квадратныхъ миллиметровъ, которое мы получимъ послѣ обмѣра планиметромъ площади кривою  $mffnm$ , то расходъ въ кубическихъ метрахъ въ секунду найдемъ такъ:

$$Q = \frac{F}{abc} \text{ mtr}^3 \text{ sec.}$$

Такъ, напр., если ординаты профиля потока вычерчены въ 1 : 20 натуральной величины, а абсциссы— въ 1 : 100, то буква  $a$  имѣетъ значеніе 50  $m$ ,  $m$ ,

рядъ статей о вертушкахъ фирмы А. Отт на Миланской выставкѣ. Особенно интересна работа *J. Kpper—Die Entwicklung der Hydrometrie in der Schweiz Bern, 1907.* Здѣсь на стр. 41—64 и многочисленныхъ таблицахъ не только описаны современные инструменты и приемы работы, практикуемые Швейцарскимъ гидрометрическимъ бюро, но также подробно указана новѣйшая литература этого и смежныхъ вопросовъ. Кромя того, нѣрѣдко встрѣчаются статьи о вертушкахъ въ журналѣ „Annales des ponts et chaussées“ (напр., за 1885 годъ, стр. 1058, за 1898 годъ, 3-й триместръ стр. 287). Также см. разные годы отчетовъ „Water Supply and Irrigation Papers of the United States Geological Survey“ напр., 1891, 1901, 1904. Также *Proceedings of the American Society of civil engineers*, вашич., за 1903 годъ, августъ, стр. 542 и т. д.

а буква  $b$  — 10 м; кроме того, пусть скорости отложены в масштабе 1 м/сек в 25 м. При этих условиях 1 мм<sup>2</sup> диаграммы живого сечения имеет значение  $\frac{1}{50 \cdot 10}$  м<sup>3</sup>, а 1 мм диаграммы скоростей имеет значение  $\frac{1}{25}$  м/сек. Поэтому 1 мм<sup>2</sup> диаграммы  $mf...m$  равен  $\frac{1}{50 \cdot 10 \cdot 25} = \frac{1}{12500}$  м<sup>3</sup>/сек.

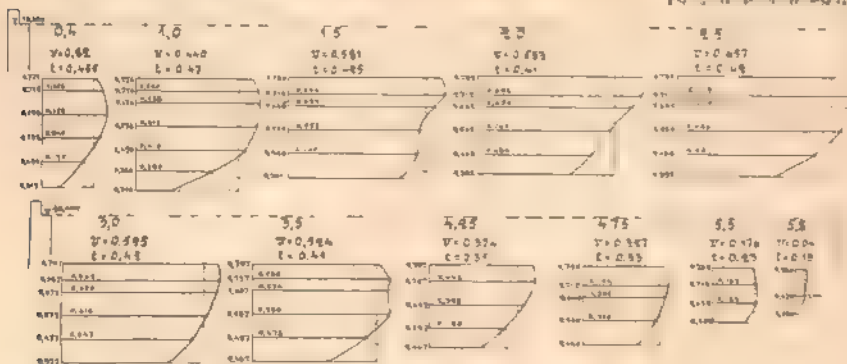
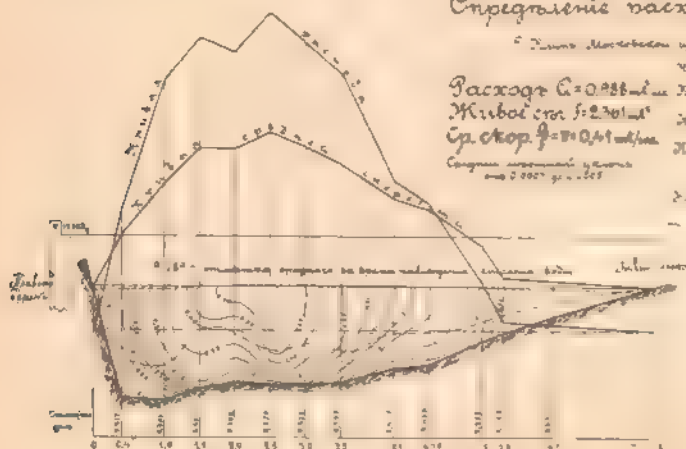
В качестве примѣра на фиг. 214 приведены результаты объѣма расхода на р. Сестрѣ близъ г. Клина, Московской губернии: этотъ объѣмъ былъ исполненъ 22 октября 1909 года студентами Училища. На таблицѣ приве-

Средственіе расхода р. Сестры 22 X 09

Устье Московской губ. Устье реки: на Буроме  
 Часов пояса 5<sup>ч</sup> 10<sup>м</sup>  
 Температура воздуха 20° 50'

Расход  $Q = 0,281 \text{ м}^3/\text{сек}$   
 Живое сеч.  $S = 2,301 \text{ м}^2$   
 Ср. скор.  $v = 0,122 \text{ м/сек}$   
 Средняя глубина  $h = 0,200 \text{ м}$   
 Ср. шир.  $b = 0,500 \text{ м}$

Ширина русла в устье 1 м<sup>д</sup> + 30 м<sup>д</sup>  
 Ширина русла в верховьях 1 м<sup>д</sup> + 100 м<sup>д</sup>  
 Ширина русла в среднем течении 1 м<sup>д</sup> + 100 м<sup>д</sup>  
 Ширина русла в низовьях 1 м<sup>д</sup> + 100 м<sup>д</sup>  
 Ширина русла в устье 1 м<sup>д</sup> + 50 м<sup>д</sup>  
 Ширина русла в верховьях 1 м<sup>д</sup> + 50 м<sup>д</sup>  
 Ширина русла в среднем течении 1 м<sup>д</sup> + 50 м<sup>д</sup>  
 Ширина русла в низовьях 1 м<sup>д</sup> + 50 м<sup>д</sup>



Фиг. 214.

дено живое сѣченіе съ написанными отмѣтками дна, при чемъ условная отмѣтка 10,000 отнесена къ той мѣткѣ, отъ которой отмѣривалась всякій разъ высота уровня въ рѣкѣ. Тутъ же нанесена кривая средней скорости и кривая произведеній изъ средней скорости на соответствующія глубины профиля. Эти произведенія не строились, какъ въ приемѣ Гарлахаера, а вычислялись. Ясно, что площадь этой кривой представляетъ расходъ всего сѣченія, а потому она названа кривой расхода. Въ живомъ сѣченіи нанесены

изотакси через каждые 0,05 м/сек; дѣлѣ соединены точки, идущія со средней скоростью всего сѣченія, и наконецъ соединены точки, идущія со средней скоростью каждой вертикали. Въ течение измѣренія уровень въ рѣкѣ колебался. На отдельной фигурѣ предъставлены колебанія уровня во времени: наблюдения начались въ 8 41 утра при отмѣлкѣ уровня 9,782 и кончились въ 9 52" утра при отмѣлкѣ уровня 9,780. Планиметромъ была опредѣлена

средняя за все время наблюдений отмѣлка уровня 9,784 и она принята при опредѣленіи площади живого сѣченія и расхода. Вертикали, на которыхъ производилось измѣреніе скоростей, занумерованы отъ праваго берега къ лѣвому такъ, что номеръ вертикали даетъ ей разстояніе отъ урѣза воды на правомъ берегу. Для каждой вертикали приведены кривыя скоростей, какъ онѣ опредѣлялись измѣреніемъ вертушкою фирмы А. Ott. Надъ каждой кривою скоростей надписаны: номеръ вертикали, вычисленная средняя скорость  $v$ , наблюдаемая глубина профиля / (не отнесенная къ среднему стоянию уровня); кромѣ того, слѣва записаны отмѣлки уровня воды, два и всѣхъ положеній оси вертушки при измѣреніяхъ; для каждого такого положенія записаны наблюденыя скорости. Скорости у дна

Рѣка	Мѣсто измѣренія			Плутрументъ										г.
	Время измѣр.	№ вертикали.	Глубина погруженія оси вертушки.	Отсчеты черезъ 25 оборотовъ оси вертушки.		Показанія секундомера и разности и показанія.		Сумма $M$ .	Число равно-стей $N$ .	Средняя раз-ность $M/N$ .	Среднее число обо-ротовъ въ 1".	Скорость $v$ .	Примѣчанія и замѣч.	
	1	2	3	4		5		6	7	8	9	10		
	9 <sup>h</sup> 27 <sup>m</sup>	3,5	118	48"	28 <sup>m</sup> 2"	16"	29	43	13,8		0,478			
				43	11	14	11	14						
				43	57									
				11	21 <sup>m</sup> 4"	20	32	43	11,4		0,580			
			108	43	11	12	12	11						
				11	51									
				11										

и на поверхности замѣчались на основаніи общаго хода кривой; при этомъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ, напр., на вертикали 3,5, случайная непра-вильность вида кривой не принималась во вниманіе при продолженіи кри-вой скорости до свободной поверхности. Площадь каждой кривой скорости обмѣривалась планиметромъ, дѣлилась на глубину вертикали и такимъ путемъ

находилась средняя скорость: на всех кривых эта средняя скорость нанесена как пунктирная линия, дающая прямоугольник, равновеликий по площади с данной кривой — Площади живого сечения и кривой расхода объёмлены планиметромъ.

При измѣреніяхъ скоростей удобно пользоваться журналомъ слѣдующаго вида. (См. на стр. 415).

Требуютъ поясненія записи въ слѣдующія графы. Въ столбцѣ 3 записывается глубина погруженія оси вертушки. При разныхъ конструкціяхъ прибора необходимо изобрѣсти тотъ или другой пріемъ отсчета этой величины, возможно простой, чтобы избѣжать ошибокъ. Когда употребляется вертушка, прочно прикрѣпляемая къ штангѣ, то удобно нанести предварительно на штангѣ дѣленія, нуль которыхъ стоялъ бы на томъ ея концѣ, который будетъ на днѣ. Расстояние отъ оси вертушки до этого нуля, т.-е. до конца штанги, замѣчается до начала опыта и записывается, въ случаѣ нужды съ эскизомъ, въ графѣ 10. Затѣмъ штанга вставляется въ штативъ, укрѣпленный на мосткахъ или на лодкѣ, и опускается сначала такъ, чтобы коснуться ею поверхности воды. При этомъ замѣчается показаніе на штангѣ, читаемое у какой-нибудь опредѣленной мѣтки штатива; это показаніе записывается также въ графу 10. Затѣмъ штанга опускается на дно и снова читается ея показаніе противъ той же мѣтки штатива. Разность показаній даетъ глубину профиля, заносимую въ видѣ эскиза въ ту же графу 10. Показаніе штанги, прочитанное по ней, когда она была опущена до дна, записывается въ графу 3 непосредственно, или послѣ того какъ изъ него вычтено расстояние отъ оси вертушки до конца штанги. Далѣе въ эту графу будутъ записываться такія же показанія штанги при всякомъ иномъ, болѣе высокомъ ея положеніи. Удобно имѣть на штангѣ сквозныя сверленія, напр., черезъ каждые 5 см, а въ штативѣ два упора, расстояние между которыми должно быть равно цѣлому числу пятковъ сантиметровъ минусъ толщина шпильки, которую можно вставить въ отверстія штанги. Тогда, имѣя двѣ шпильки, удобно будетъ вынимать штангу изъ воды всякій разъ на заранѣе намѣченное цѣлое число пятковъ сантиметровъ. Именно сначала штанга виситъ на шпилькѣ, вставленной въ одно изъ отверстій. Заранѣе вставлена въ штангу и другая шпилька ниже нижняго упора штатива на желаемую длину. Когда нужно поднимать штангу, по сигналу быстро вытаскиваютъ ее сверху, пока нижняя шпилька не ударится въ нижній упоръ штатива и не остановитъ вертушку въ желаемой точкѣ. Послѣ этого верхнюю шпильку переставляютъ вплотную къ верхнему упору; штанга тогда виситъ на этой шпилькѣ, ее можно выпустить изъ рукъ и переставить нижнюю шпильку въ новое отверстіе на желаемой глубинѣ. Эти манипуляціи очень просты, даютъ точное положеніе оси вертушки (хотя и не любое) и не стѣсняють наблюдателя, который свободно записываетъ или диктуется для записи въ журналъ показанія штанги. Эта манера работы принадлежитъ Эпперу; имѣются въ продажѣ очень удобные штативы, приспособленные для этого пріема; очень не трудно сдѣлать ихъ и своими средствами.

Въ графу 4 прежде всего нужно занести, черезъ сколько оборотовъ оси вертушки будутъ производиться отсчеты времени. Далѣе, когда штанга



мещена 10 дна и в 1/2 жпы и слѣданы, а секундомѣръ пушенъ въ ходъ, замѣчаютъ по часамъ часы и минуты начала счета графа 1), а секунды — секундомѣру прирѣчиваютъ къ концу звонка и заносить надъ пунктирной чертой въ графѣ 4 въ первую кѣтку; во вторую кѣтку заносится показаніе секундомѣра, если нулевое, то и минуты въ концѣ второго звонка и тутъ же записываютъ подъ чертой, отдѣляющей обѣ кѣтки, разность обонхъ показаній. Запись продолжаютъ вѣдѣе время, пока не ложится убѣжденіе, что показанія однородны (на примѣрѣ выписаны отсчетовъ или 5 разностей, какъ онѣ были взяты при измѣреніи расхода р. Сестры). Когда число отсчетовъ признано достаточнымъ, то по сигналу, совпадающему съ концомъ звонка, вытаскиваютъ штангу кверху на заранѣе намѣченную глубину, какъ было выше объяснено: это дѣлается настолько быстро, что счетъ секундъ не прерывается, какъ это видно по записямъ выше приведеннаго образца журнала. Заносимыя по ходу дѣла разности времени  $\Delta t$  покажутъ тутъ же, въ какой мѣрѣ этотъ промежутокъ времени подлежитъ учету, или, можетъ быть, лучше вмѣ пренебречь. Числа графѣ 6—9 вычисляются въ кабинетѣ. Графа 8 введена на тотъ случай, если бы для вертушки имѣлась заранѣе подсчитанная кривая или таблица скоростей течения въ функции чиселъ оборотовъ въ секунду. Но возможно, конечно, имѣть ту же кривую съ независимымъ переменнымъ въ видѣ длительности (въ секундахъ) 25 оборотовъ (графа 7).

Само собою понятно, что какъ процессъ работы, такъ и форма записей могутъ быть и иные. Описанные тутъ приемы приняты гидравлической лабораторіей Техническаго Училища и въ существенныхъ чертахъ отвѣчаютъ приемамъ швейцарскаго и французскаго гидрометрическихъ бюро.

Одну изъ главныхъ трудностей при обмѣрѣ расхода составляетъ операция установки штанги на жлазмой вертикали, если рѣка широка и глубока: приходится производить измѣренія съ лодокъ: легко представить себѣ всѣ возникающія при этомъ трудности. По этому поводу отсылаемъ къ указанной выше литературѣ.

#### Примѣчаніе къ стр. 402.

Помощью поплавка опредѣляется *наибольшая* скорость на поверхности потока  $V_0$ . Средняя скорость *всего* сѣченія  $V_{cp}$  составляетъ только часть этой наибольшей скорости, и притомъ тѣмъ меньшую, чѣмъ меньше средний радиусъ сѣченія и чѣмъ шероховатѣе стѣнки, другими словами, чѣмъ сильнѣе дѣйствіе внутревняго тренія. При этихъ подсчетахъ можно пользоваться слѣдующими коэф.фиціентами перехода, рекомендуемыми извѣстнымъ турбиностроительнымъ заводомъ Бруглебъ и Хансенъ въ Гота (Bugleib, Hansen & Co; Göttingen), а также проф. Тиме (последній столбецъ таблицы), въ зависимости отъ средняго гидравлическаго радиуса сѣченія  $R$ .

Средний радиус $R$ <i>мтр.</i>	Отношения $\frac{V_{ср}}{V_0}$				Проф. Тиме
	Заводъ Бриглебъ, Хансенъ и Ко.				
	Строга для досок, пом. ступенчатая.	Тесный ка-монь, кр-пнень, пе-строганый досок.	Бутовый к. д.к.	Земляная стѣнка	
0,1	0,879	0,899	0,747	0,564	0,54
0,2	0,886	0,858	0,792	0,614	0,61
0,3	0,890	0,865	0,812	0,686	0,67
0,4	0,891	0,868	0,822	0,711	0,68
0,5	0,893	0,871	0,830	0,730	0,70
0,6	0,894	0,873	0,835	0,745	—
0,7	0,894	0,874	0,838	0,755	0,72
0,8	0,894	0,874	0,841	0,763	—
0,9	0,895	0,875	0,843	0,771	—
1,0	0,895	0,876	0,845	0,777	0,74
1,2	0,895	0,876	0,847	0,787	—
1,4	0,895	0,877	0,850	0,794	—
1,5	—	—	—	—	0,76
2,0	—	—	—	—	0,77
3,0	—	—	—	—	0,78
4,0	—	—	—	—	0,79
6,0	—	—	—	—	0,80

Данные Тиме, повидимому, надежныѣ. По крайней мѣрѣ въ одномъ случаѣ песчаного русла мы нашли это отношеніе 0,63, при  $R = 0,335$  *мтр.*, и 0,58, при  $R = 0,29$  *мтр.*, т.е. еще меньше, чѣмъ даетъ проф. Тиме. Само собою понятно, что отъ этихъ опредѣленій нельзя ждать точности.

### Задачи къ главѣ IV.

1. Опредѣлить расходъ въ каналѣ трапецидальнаго сѣченія, шириною по дну 1,2 *мтр.*, съ откосомъ 1:1. Дно и стѣны одѣты мостовой, ширина по урѣзу воды — 2 *мтр.*, уклонъ равенъ  $2^{\circ} 00'$ .

*Отв.* Глубина канала 0,4 *мтр.* Живое сѣченіе 0,64 *мтр.*<sup>2</sup>. Средній гидравлическій радиусъ 0,27 *мтр.* По таблицѣ 44 при  $n = 0,85$  находимъ  $c = 33,2$ . Поэтому  $v = 0,779$  *мтр. сек.*, а слѣдовательно,  $Q$  почти 0,5 *мтр.*<sup>3</sup> *сек.* По таблицѣ 43 Ganguillet & Kutter при  $n = 0,020$  находимъ  $c = 39$ , такъ что  $v = 0,915$  *мтр. сек.* и  $Q = 0,585$  *мтр.*<sup>3</sup> *сек.* Наконецъ по табл. 42, соотвѣтственно 3-й категоріи, мы имѣли бы,  $c = 47$ , такъ что  $v = 1,1$  *мтр. сек.* и  $Q = 0,704$  *мтр.*<sup>3</sup> *сек.*

Отсюда видно, какая разница во расходах и получается при применении тех или других норм. Какъ указано въ текстѣ,  $Q = 10^2 \text{ м}^3/\text{сек}$  относится къ категории 4, промежуточную, для которой в формулах Понселе и Кардана применяются, указаннымъ въ текстѣ, рѣшение по таблицѣ 42 и в нашем случаѣ должно быть забрановано, и вероятный расход должен быть рѣшенъ между  $Q = 10^2 \text{ м}^3/\text{сек}$  въ области очевидно, въ большей или меньшей степени влечущей къ себе.

82. Какой высоты нужно сделать деревянные приемылы выдающие стороны строганных досок съ напыляющимъ профилемъ, чтобы они при разе могли бы твичени пропускать  $2 \text{ м}^3/\text{сек}$  при ширинѣ по дну въ  $1 \text{ мтр}$ ?

Отв. Для наименьшаго профиля глубина должна быть равна  $0,5 \text{ мтр}$  и в сеченіе  $0,5 \text{ мтр}$ , средний гидравлический радиус  $0,25 \text{ мтр}$ , скорость  $4 \text{ мтр}/\text{сек}$ . По таблицѣ 41 при  $\gamma = 0,06$  имѣемъ  $c = 77,6$ , а следовательно,  $\epsilon = 10^2 \cdot 3^{0,06}$ . По таблицѣ 43 при  $\epsilon = 0,910$ , должнъ быть  $\epsilon$  около 84, такъ что достаточно  $\epsilon = 9 \cdot 10^{0,06}$  по формулѣ 7 этой главы находимъ  $c = 84$ , такъ что второго пересчета по таблицѣ 43 не требуется и на этомъ примѣрѣ, какъ и въ предыдущей задачѣ, видимъ въ данныхъ Вальса большую надежность, нежели въ данныхъ С. & К.

83. Какой высоты нужно сделать вертикальныя боковыя стѣнки въ деревянномъ ларѣ изъ строганыхъ досокъ, пропускающемъ  $2 \text{ м}^3/\text{сек}$ , лежащемъ съ уклономъ въ  $5^{\circ}$  при ширинѣ по дну въ  $1 \text{ мтр}$ , если въ концевой стѣнкѣ сделано отверстие высотой  $1,00 \text{ мтр}$  и шириной въ  $80 \text{ см}$ , нижняя кромка котораго лежитъ на  $1,00 \text{ мтр}$  выше дна ларя? Каковъ будетъ профиль передъ стѣнкой?

Отв. Находимъ среднюю глубину равномернаго течения  $H$  въ такомъ ларѣ. Называя ширину ларя буквой  $l$ , получаемъ ур-іе:

$$\sqrt{1 - \frac{H^2}{2l}} = \frac{Q}{Hl}$$

Относя ларь къ категории шероховатости ( $\gamma = 0,06$ ), по таблицѣ 41 определяемъ  $c = 80$ . Вводя числовые значенія приводимъ предыдущее ур-іе къ виду:

$$H^2 - 0,25 H - 0,125 = 0.$$

Идентичный двучленный корень этого ур-ія по формуламъ Кардана получается равнымъ:

$$H = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,125}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,125^2}{4} - \frac{0,125^3}{27}}} + \frac{0,125}{2} = \frac{0,125^2}{2} + \frac{0,25^3}{3} = 0,66 \text{ мтр}.$$

Съответственнѣе:

$$H = \frac{1,066}{2,166} = 0,285 \text{ мтр}.$$

По таблицѣ 44 получимъ коэффициентъ вала  $\epsilon = 78,3$ . Но по таблицѣ 43 при данномъ уклонѣ  $\epsilon = 80$ . Поэтому в нашем случаѣ  $\epsilon = 80$  достаточно точно въ нашемъ случаѣ тѣмъ болѣе, что въ вычисленіяхъ глубины канала глубина, а съ нею и средний гидравлический радиусъ, будутъ больше.

Далѣе определяемъ ширину въ центрѣ тяжести отверстия необходимый для пропуска даннаго расхода, для выходящаго въ воздухъ. По числовой таблицѣ 9 Понселе (см. стр. 125) принимаемъ коэффициентъ  $\epsilon = 0,6$  какъ какъ сжатіе, несомнѣнно, непотное то по формулѣ Вейсбаха (см. стр. 122) находимъ коэф-тъ расхода:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( 1 \pm 0,157 \frac{M}{P} \right) = 0,6 \left( 1 \pm 0,157 \frac{1,8}{2,6} \right) = 0,665.$$

Поэтому напоръ въ центрѣ тяжести отверстия вычисляется  $= 2,48 \text{ мтр}$ . Итакъ, глубина  $h_0$  стояния воды надъ плочою канала будетъ  $h_0 = 2,48 + 0,25 = 2,73 + 0,33 = 3,43 \text{ мтр}$ . Стѣнки должны быть сдѣланы выше, нежели  $3,43 \text{ мтр}$ .

Ответ на второй вопрос получаем так. Вычисляя величину  $\frac{c^2}{b_0} = \frac{c^2}{q}$

$$\frac{1,085 \cdot 0,005 \cdot 6400}{9,81}$$

3,54, видим, что передь платиной будет скачок вышиной л.

Приблизительное его мест нахождение вычисляем по уроку 30 главы IV с помощью таблицы 45, находя из него расстояние  $x - x_0$  от платины до элемента профиля с вертикальной касательной. Критическая глубина  $H_1$  определяется такъ

$$H_1 = \sqrt[3]{3,54 \cdot 0,66} = 1,005 \text{ mtr.}$$

Поэтому

$$z = \frac{1,005}{0,66} = 1,52$$

и, соответственно, пропорциональным интерполированием по табл. 45, находимъ

$$\psi(z) = 0,2467.$$

Также

$$z_0 = \frac{3,13}{0,66} = 4,76;$$

затѣм получаемъ:

$$z - z_0 = 0,2467 - \frac{0,0020 \cdot 20}{26,3} = 0,0186$$

Поэтому:

$$0,005 \cdot x - x_0 = 1,52 - 4,76 = -3,24 = -0,66 \cdot (1 - 3,54) \cdot 0,2467 = -0,0186 \cdot 165 = -0,307 = -3,298$$

откуда

$$x - x_0 = -660 \text{ mtr.}$$

84. Расходъ въ рѣкѣ достигнетъ 10  $\text{mtr}^3 \text{sec}$ . Уклонъ ея дна  $= 0,1\text{‰}$ . Сѣчене приблизительно прямоугольное при ширинѣ 20  $\text{mtr}$ . На ней поставлена плотина съ водопадкомъ такъ, что пороги в долина делить на 1,5  $\text{mtr}$  выше горизонта незагруженной рѣки. Водопадъ имѣетъ вертикальную стѣнку; пороги его составлены изъ брускокъ толщиной 150  $\text{mm}$ , расположенныхъ между 7 бетонными скаками съ расстояниемъ между ними по 2  $\text{mtr}$  такъ что общая длина порога водопада  $= 12 \text{ mtr}$ . На какомъ расстоянии вперед отъ плотины подпруда не будетъ превосходить 50  $\text{mm}$ ?

Она. Определить глубины равномернаго течения можно было бы считать какъ в задачѣ 83. Но, имѣя въ виду довольно значительную ширину рѣки, допустимъ предварительно что средний гидравлическій радиусъ, при равномерномъ течении, не отличается отъ глубины, т.-е. пишемъ:

$$\frac{Q}{c^2} = H^3,$$

Оцѣнивая, по Тиддину  $c = 50$  имая калѣ  $Q = 10 \text{ l} = 20 \text{ l} = 0,0001$ , вычисляемъ  $H = 1 \text{ mtr}$ . При этой глубинѣ средний радиусъ  $R = \frac{20}{32} = 0,91 \text{ mtr}$ . Сохраняя значение  $c = 50$ , вычисляемъ  $v = 50 \sqrt{0,91 \cdot 0,0001} = 0,48 \text{ mtr, sec}$ .

Сообразно съ этиъ живое сѣченіе должно быть  $F = \frac{10}{0,48} = 20,8 \text{ mtr}^2$ ; глубина равномернаго течения  $H = 1,64 \text{ mtr}$  средний радиусъ  $R = 0,94$ . Вторичная проверка даетъ всѣ величины съ ничтожной разницей, а именно:

$$v = 50 \sqrt{0,94 \cdot 0,0001} = 0,485 \text{ mtr sec}; \quad F = \frac{10}{0,485} = 20,6 \text{ mtr}^2,$$

$$H = 1,03 \text{ mtr}; \quad R = 0,94 \text{ mtr.}$$

Высота порога водостива надъ 12 мт (какъ обязательно, по даннымъ задачи, 1,5 + 1,03 = 2,5) *mtr*. При известной высоте  $y$  (какъ и вь случае) и влиянии въ воздухъ выбираемъ по таблицѣ 27 (стр. 188) коэффициентъ  $\alpha$  равенъ 0,276, а влиять вь водостивъ, при длинѣ порога вь 7, для  $\alpha = 0,276$  коэффициентъ равенъ 4. И такъ, вода черезъ водостивъ проходитъ, то надъ порогомъ вьсхлестъ вьтупитъ на 4 мт. Видно, что высота порога можетъ быть съ уменьшеніемъ  $\alpha$  уменьшена до 1 мт, и что коэффициентъ можетъ быть, съ увеличеніемъ  $\alpha$  увеличенъ до 10, и вь правой, втаемъ глубину рѣки передъ плотиною  $h_0 = 2,5 - 4 = -1,5$  *mtr*.

Вычисляемъ далѣе  $\frac{v^2}{2g} = \frac{\alpha^2}{g} = 0,0276$ ; поэтому утверждаемъ что кривая дѣла вь обыкновенной кривой подпруды.

Нахождение разстоянія отъ плотины до профиля съ глубиною вь 1,23 мт, вьдѣливъ, следовательно, такъ:

$$s_0 = \frac{3,135}{1,03} = 3,03; \quad \psi(s_0) = 0,0553.$$

$$s = \frac{1,08}{1,03} = 1,05; \quad \psi(s) = 0,8931 + \frac{0,0142 \cdot 1}{22} = 0,8957.$$

Поэтому:

$$s(s - s_0) = 1,08 - 3,135 = -1,03 (1 = 0,0276) (0,8957 - 0,0553),$$

такъ что

$$s - s_0 = -28,95 \text{ kmtr.}$$

Профиль съ глубиною вь 1,23 мт, т.е. съ подпрудой вь 200 мм, будетъ отстоять отъ плотины на разстояніи:

$$z = \frac{1,23}{1,03} = 1,195; \quad \psi(z) = 0,4932 - \frac{0,0101 \cdot 45}{71} = 0,4868.$$

$$i(s - s_0) = 1,23 - 3,135 = -1,905 (0,9724 (0,4868 - 0,0553))$$

$$s - s_0 = -23,365 \text{ kmtr.}$$

Профиля вь по дѣлнечъ случаевъ вычисления по ур-ю (34) главы IV (стр. 384), находимъ:

$$h_0 = 3,135 - 1,03 = 2,105 \quad \ln 2,105 - \ln 210,5 \quad \ln 100 = 0,70063$$

$$n = \frac{1,23 - 1,03}{2,105 - 1,03} = 0,2 \quad \ln 2 - \ln 10 = -1,60944$$

$$m = \frac{20(1 - 0,0276) + 2,103}{3,20 - 4,135} = 0,335.$$

Поэтому

$$s - s_0 = 0,5 \cdot 1,195 - 1,60944 \cdot 0,70063 + 0,2 - 2,105 = -1,79 \left( \frac{7}{9} = 0,335 \right).$$

Откуда

$$s - s_0 = -22,100 \text{ kmtr.}$$

т.е. почти на 6% меньше, нежели по ур-ю Бресса.

55. Разность урвней вь двухъ прудахъ - 2 мт, разстояніе между ними, считая по каналу, = 4 кмт. Вь верхній прудъ, во время наводковъ, притекаетъ до 5 *mtr*<sup>3</sup> воды вь 1 секунду. Требуется вставить при входѣ вь каналъ шлюзовое отверстие вьтечение подь напоромъ, а каналъ — выложить съ земляными стѣнками съ откосомъ 1:1,5 такъ, чтобы горизонтъ вь верхнемъ прудѣ поднимался не выше, какъ на 0,2 мт, чтобы глубина воды вь каналѣ была не болѣе 1 мт. Шлюзовое отверстие было расположено своею нижнею кромкою на ур-внѣ низа канала, а скорость вь каналѣ была = 0,5 *mtr sec*.

*Овв.* Живое сечение канала должно быть  $F = 10 \text{ мтр}^2$ . При данной глубине и откосе и ширина по дну вычисляется  $b = \frac{F}{H} = 1,5$ ;  $H = 8,5 \text{ мтр}$  (средний гидравлический радиус  $R = 0,825 \text{ мтр}$ ). Соответственно  $\gamma = 1,3$  по таблице 44 находим  $\epsilon = 35,8$ , а отсюда вычисляем  $\epsilon = 0,000237$ . Поэтому уровень в канале будет стоять в его начале на  $1,05 \text{ мтр}$  ниже уровня воды в пруду при этом расходе и при допущении повышения уровня в пруду напором для плавового отверстия (суметь =  $1,20 \text{ мтр}$ ). Считая, что это отверстие расположено во всю ширину низа канала, пренебрегая во всевыми степенями, благодаря стоякам плавов, и оценивая коэффициент расхода при плескании под уровень = 0,6, так как для допускимую длину отверстия в  $1,05 \text{ мтр}$  а следовательно, вертикальный разрыв = 0,198, т.е. почти  $0,2 \text{ мтр}$ . Допуская, что при испорном сжатии толщина вытекающей струи может достигнуть  $0,64 \cdot 0,2 = 0,128 \text{ мтр}$ , вычислим, правильно ли наше допущение об истечении под уровень. Вычисляем  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = 0,335$ ; поэтому критическая глубина в канале  $H_1 = 0,322 \text{ мтр}$ . Дробь  $\delta$  вычисляется из  $\delta = 0,175$ , а следовательно, глубина  $H_1 = 0,057 \text{ мтр}$ . Отсюда видно, что наше предположение об истечении под уровень правильно. Ясно, что ожидаемая в отверстии скорость, около  $3 \text{ мтр/сек}$  — настолько велика, что в стенах канала в его начале должны быть прочные откосы и защиты от размыва.

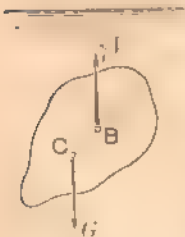
### Дополнение къ § 5, стр. 38.

#### Объ устойчивости равновѣсія плавающихъ тѣлъ.

Изъ такъ называемаго закона Архимеда слѣдуетъ, что на покоящемся тѣлѣ, вполнѣ или отчасти погруженное въ покоящуюся тяжелую жидкость, послѣдняя оказываетъ воздѣйствіе, направленное по вертикали снизу вверхъ и равное вѣсу вытѣсненнаго объема жидкости. Какъ равнодѣйствующую вѣсовъ отдѣльныхъ элементарныхъ вытѣсненныхъ объемовъ, эту силу, конечно, нужно считать приложенной въ центрѣ тяжести вытѣсненнаго объема; эту точку будемъ называть центромъ водоизмѣщенія.

Пусть тѣло вѣсомъ  $G$ , съ объемомъ  $V$ , вполнѣ погружено въ жидкость, для которой вѣсъ единицы объема равенъ  $\gamma$  (подводная лодка, мина Хайтхеда, дирижабль, аэростатъ и т. п.). Тогда на тѣло дѣйствуютъ слѣдующія силы (фиг. 215): въ центрѣ тяжести  $C$  самого тѣла—его вѣсъ  $G$ , а въ центрѣ водоизмѣщенія  $B$ —реакція  $\gamma V$ . Ясно, что тѣло будетъ всплывать или будетъ тонуть, смотря по тому, будетъ ли  $G < \gamma V$ , или, наоборотъ,  $G > \gamma V$ . Оно можетъ оставаться въ равновѣсіи только при условіи  $G = \gamma V$ , при этомъ, если тѣло и жидкость неизмѣняемы, т.е. если  $\gamma$  и  $V$  сохраняютъ свое значеніе независимо отъ величины окружающаго давления, то равновѣсіе тѣла возможно при всякой глубинѣ его погруженія, если только оно имѣло мѣсто на какой-нибудь глубинѣ.

Однако условіе  $G = \gamma V$  необходимо для равновѣсія, еще недостаточно;



Фиг. 215.

изъ фиг. 215 видно, что для равновѣсія необходимо также, чтобы линия *СВ* проходящая черезъ центръ тяжести тѣла и черезъ центръ водоизмѣщенія, т.-е. такъ называемая ось плаванія была вертикальна только при этомъ услови на тѣло не будутъ дѣйствовать приквивающая пара. При соблюденіи этого условія равновѣсіе будетъ устойчивымъ, безразличнымъ или неустойчивымъ въ зависимости отъ того, будетъ ли центръ тяжести, тѣла *С* ниже центра водоизмѣщенія *В*, совпадаютъ ли эти двѣ точки, или, наконецъ, точка *С* окажется выше точки *В*.

Если погруженное въ жидкость тѣло однородно, при чемъ весь единицы его объема есть  $\gamma_1$ , то его весь *G* можно выразить по объему *V*, наплавъ  $G = \gamma_1 V$ . По предыдущему такое тѣло, погруженное въ жидкость, будетъ въ равновѣсіи, если

$$G = \gamma_1 V = \gamma V;$$

или если

$$\Delta = \frac{\gamma_1}{\gamma} = 1,$$

т.-е. если удѣльный весь  $\Delta$  тѣла равенъ единицѣ. Понятно, что равновѣсіе въ жидкости *только* однороднаго тѣла можетъ быть только безразличнымъ.

Если тѣло плаваетъ, т.-е. находится въ равновѣсіи, не будучи вполне погружено въ жидкость, то весь воды тѣла  $V_1$  и объемъ *V* вытѣсненный имъ въ жидкости, между собою не равны; а для возможности равновѣсія попрежнему имѣетъ мѣсто равенство

$$G = \gamma V_1,$$

или въ случаѣ однороднаго тѣла

$$G = \gamma_1 V_1 = \gamma V.$$

Линія, по которой представляется свободная поверхность жидкости съ поверхностью тѣла, называется ватерлиней; квадратное содержаніе плоской фигуры, ограниченной ватерлиней, называется ватерлинейн, а поверхность тѣла, ограничающее ватерлинию, называется плоскоствѣтло плаванія.

Если вѣднн ватерлинии можно считать поверхность конуса судоцилиндрической и если считать ватерлинию содержать  $A \sin^2 \alpha$ , то всякая дополнительная нагрузка или разгрузка судна въ *Р* тон вызоветь увеличе-

\*) Если  $\gamma_2$  — удѣльный весь насыщеннаго воздуха, для котораго весь единицы объема назовемъ  $\gamma_2$ , то, вмѣсто этихъ равенствъ надо писать

$$G = \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V_2 = \gamma V.$$

Последній членъ, быкновенно называютъ мазь, что имѣетъ безъ ошибки преобрегаютъ

нѣ (или уменьшен.е) глубины погруженія судна на  $h$  *мтр.*, опредѣляемыхъ изъ соотношенія

$$1000 P = \gamma h A.$$

Для прѣсной воды нужно считать  $\gamma = 1000$  *кг мтр<sup>3</sup>*, а для морской можно положить въ среднемъ  $\gamma = 1025$  *кг мтр<sup>3</sup>*. Ясно, что въ прѣсной водѣ судно сидитъ глубже, чѣмъ въ морской, и что, имѣя нѣкоторую высоту бортовъ (такъ наз. фрибордъ), оно можетъ съ нѣю помощью поднять въ прѣсной водѣ меньшій дополнительный грузъ  $P$ , чѣмъ въ морской. Изъ последней формулы слѣдуетъ, что число тоннъ которое можетъ взять судно дополнительно на каждый сантиметръ погруженія въ морской водѣ, или величина  $t = \frac{P}{100 h}$  равна  $0,01025 A$ .

Если назвать буквой  $L$  длину судна въ предѣлахъ ватерлинии, а буквой  $B$  его ширину (наибольшую до ватерлинии), то можемъ написать:

$$A = cBL.$$

Коэффициентъ  $c$  можно назвать коэффициентомъ полноты (а также—коэффициентомъ заострення—coefficient of fineness). Такимъ образомъ для морской воды

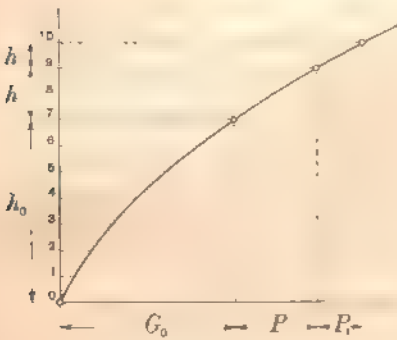
$$t = 0,01025 cBL.$$

Для судовъ наиболѣе заостренныхъ (миноносцы, малые крейсера) . . . . .	$c \sim 0,65$
„ „ узкихъ (крейсера, канонерки, баркасы) . . . . .	0,70
„ „ обыкновенныхъ (громадное большинство судовъ морскихъ и рѣчныхъ, для разныхъ водозмѣщеній и скростен) . . . . .	0,75
Для судовъ тушыхъ (болѣе грузовые пароходы умеренной скорости, малые пассажирскіе и грузовые пароходы тихоходные, буксирные, колесные рѣчные пароходы, грузовыя парусныя суда) . . . . .	0,82—0,88
Для понтоновъ, шаландъ и т. п. . . . .	до 1,00

Изъ предыдущаго ясно, что съ увеличеніемъ нагрузки увеличивается осадка судна. Только въ рѣдкихъ случаяхъ, напр. въ понтонахъ, шаландахъ и т. п. судахъ, имѣющихъ форму прямоугольнаго параллелепипеда, площадь ватерлиніи  $A$  оказывается постоянной при измѣненіи осадки судна. Въ громадномъ же большинствѣ случаевъ этого нѣтъ и тогда должны быть подсчитаны объемы, вытѣсняемые судномъ при разныхъ глубинахъ погруженія. Эти подсчеты дѣлаются приближенно, для чего выработано много методовъ, состоящихъ въ примѣненіи правила Симпсона, въ примѣненіи разныхъ приемовъ графическаго интегрированія, построенія интегральныхъ кривыхъ, планиметрированія и т. д. Кроме подсчета вытѣсняемыхъ объемовъ при разныхъ ватерлиніяхъ, необходимо опредѣлять всѣ соответствующія положенія центровъ водозмѣщенія. Въ серьезныхъ случаяхъ эти подсчеты дѣлають, начиная съ нулевой ватерлиніи, т. е. той, когда корпусъ судна только касается воды, и до грузовой ватерлинии.—т. е. той, которая соответствуетъ посадкѣ судна при плавной расчетной его нагрузкѣ. Всю глубину посадки дѣлятъ, наиримѣръ, на 10 равныхъ частей и вычи-



счисления проводить для этих 10 ватерлиній. Идея въ виду возможность перегрузки, подсчеты проводить еще легче. Пусть предположим, что плоскость плаванія передвигается параллельно самой себѣ вверх по корпусу судна еще на 1 или даже 2 стѣи такъ же, какъ бы были эти 10 ватерлиній. Результаты въ четыре значаща на такъ называемую кривую водоизмѣненія судна, представляющую важную для него характеристику (фиг. 216).



Фиг. 216.

По оси ординатъ откладываютъ глубину посадки, начиная отъ нулевой ватерлиній, т. е. съ самой низкой точки киля \*), а по оси абсциссъ—соотвѣтствующія водоизмѣненія. По такой кривой удобно, напримѣръ, видѣть, что корпусъ судна, вѣсящій  $G_0 tn$ , сидитъ на глубинѣ  $h_0 mtr$ ; грузъ  $P tn$  увеличитъ осадку на  $h_1 mtr$ , при чемъ высота фриборда  $h_1 mtr$  представляетъ запасное водоизмѣненіе въ  $P_1 tn$ . Также откладывая по оси абсциссъ равные отрѣзки, напр., по  $50 tn$ , прочтемъ по кривой соотвѣтствующую скалу измѣненія глубины посадки и т. д.

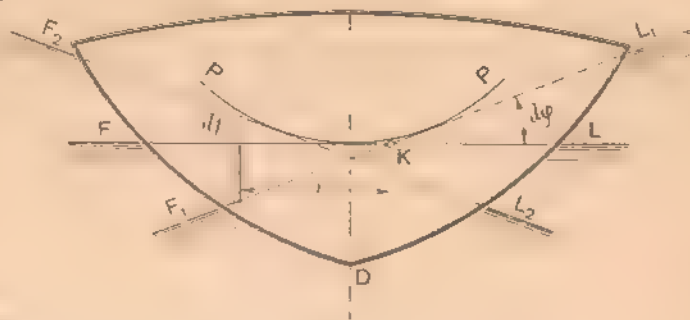
Для равновѣсія плавающего тѣла такъ же, какъ для погруженнаго, необходимо, кромѣ вышеуказаннаго равенства, соблюденіе того условія, чтобы ось плаванія была вертикальна. Пусть дано плавающее тѣло (фиг. 217). Можно себѣ представить тѣло плоскостей  $FL, F_1L_1, F_2L_2, \dots$ , которыя всѣ отсѣкаютъ отъ тѣла одинаковые объемы  $FOL, F_1OL_1, \dots$ , а, слѣдовательно, всѣ удовлетворяютъ закону Архимеда; тѣмъ не менѣе не всѣ онѣ могли бы быть плоскостями плаванія. Выяснимъ это.

Внутри тѣла въобразимъ поверхность  $PP$ , огибающую всѣ эти плоскости  $FL$ ; это такъ называемая поверхность плоскостей плаванія; плоскости плаванія къ ней касательны. Можно доказать, что двѣ смежныя плоскости плаванія пересѣкаются по прямой, проходящей черезъ центры тяжести соотвѣтствующихъ пластинокъ ватерлиній.

Въ самомъ дѣлѣ пусть  $FL$  и  $F_1L_1$  двѣ смежныя плоскости плаванія, образующія между собою весьма малый уголъ  $d\varphi$ . Для простоты чертежа на фиг. 217 положеніе тѣла представлено неизмѣненнымъ и проведены разныя относительныя положенія плоскостей плаванія. Пусть эти плоскости пересѣкаются по прямой, перпендикулярной къ плоскости чертежа и изображенной на немъ точкою  $K$ . Не трудно убѣдиться, что объемы клиньевъ  $FKF_1$  и

\* При правильномъ размѣщеніи нагрузки киль судна не параллеленъ плоскости плаванія; у кормы онъ глубже, у носа — менѣе погруженъ въ воду. Отсюда терминъ „грузовая ватерлинія съ отклоненіемъ“ по-французски charge et an difference, Konstruction Wasserlin. e. n. l. Тѣмъ термину „дифференціалъ корпуса“ соответствуетъ англійское „the trim of a ship“. Значитъ, что, какъ съ измѣненіемъ вѣтру и мѣняется положеніе ватерлиній такъ съ измѣненіемъ ея расположенія или при нагруженіи продольнымъ вѣтромъ, мѣняется также и дифференціалъ. Это вызываетъ необходимость вычетовъ относительно продольной вѣсковости судна, отличающаго тѣмъ, которые судить намѣчены выше для поперечныхъ плоскостей.

$LKL_1$  между собою равны либо при обоихъ положеніяхъ плоскостей  $FL$  и  $F_1L_1$  въ вѣѣа, а, следовательно, и его водоизмѣщеніе не мѣнялось. Выразимъ



Фиг. 217.

это аналитически. Назовемъ  $df$  элементарную площадку площади ватерлинии  $FK$ ; ея разстояніе до общаго ребра  $K$  обоихъ клиньевъ, считая въ плоскости  $FK$ , назовемъ  $x$ . Тогда объемъ клина влѣво отъ оси  $K$  есть:

$$- \int_{FA} df \cdot x \cdot d\varphi,$$

при чемъ интегралъ распространень на всю лѣвую сторону площади ватерлинии; уголъ  $d\varphi$  стоитъ вмѣсто  $tg \, d\varphi$  въ силу своей малости, а знакъ показываетъ, что  $x$  отсчитывается влѣво, или, что сводится къ тому же, что объемъ клина  $FK$  уменьшилъ водоизмѣщеніе. Подобнымъ же образомъ, при аналогичныхъ обозначеніяхъ получимъ объемъ праваго клина

$$\int_{KL} df_1 \cdot x_1 \cdot d\varphi,$$

гдѣ интегрированіе распространено на всю правую часть площади ватерлинии  $KL$ . Сравнивая оба выраженія, находимъ по сокращеніи на  $d\varphi$ :

$$- \int_{FK} x \, df = \int_{KL} x_1 \, df_1.$$

Въ этомъ уравненіи не трудно усмотрѣть равенство статическихъ моментовъ двухъ частей площади ватерлинии относительно линии  $K$ , раздѣляющей эти двѣ части; изъ равенства обоихъ моментовъ заключаемъ, что ось  $K$  проходитъ черезъ центръ тяжести всей площади, что и доказываетъ упомянутую теорему, принадлежащую Эйлеру (1749 годъ; работа Scientia Navalis).

Послѣ этого легко прийти къ заключенію, что точка касанія плоскости плаванія съ поверхностью плоскостей плаванія и центръ тяжести площади ватерлинии совпадаютъ между собою. Ибо на точку касанія есть предѣль положенія всевозможныхъ точекъ  $K$  на плоскости  $FL$  при всевозможныхъ положеніяхъ плоскости  $F_1L_1$ , лишь бы уголъ  $d\varphi = FKL$  оставался безконечно малымъ. При всѣхъ этихъ положеніяхъ точка  $K$  лежитъ всегда на прямыхъ,

проходящихъ черезъ центръ тяжести площади ватерлинии  $FL$ : въ предѣлѣ точка  $K$  обращается въ точку касанія и совмѣщается съ центромъ тяжести площади ватерлинии.

Замѣтимъ еще, что въ частномъ случаѣ, когда борта судна представляютъ вертикальную цилиндрическую поверхность, то всѣ плоскости  $F_1L_1$ , въ какую бы сторону мы ни откладывали уголъ  $\theta$ , пересѣкутся въ одной точкѣ  $K$ , совпадающей съ центромъ тяжести площади ватерлинии состоянія равновѣся. Следовательно, поверхность  $PP$  обращается въ этомъ случаѣ въ точку.

Кромѣ поверхности плоскостей плаванія въ плавающемъ тѣлѣ различимъ поверхность центровъ водоизмѣщенія, т. е. геометрическое мѣсто центровъ водоизмѣщенія  $B$ , мѣняющихся въ тѣлѣ свое расположеніе съ перемѣной положенія плоскостей плаванія  $FL$  въ  $F_1L_1$  и т. д. Эти двѣ поверхности связаны между собою интересною зависимостью, именно, можно показать, что плоскость, касательная къ поверхности центровъ водоизмѣщенія въ какой-нибудь точкѣ, параллельна соответствующей плоскости плаванія.

Пусть на фиг. 218 имѣемъ сѣчене плавающего тѣла, съ центромъ тяжести въ  $C$ .  $FL$  есть одна изъ плоскостей плаванія и соответствующее

подѣленіе центра водоизмѣщенія есть  $B$ . Въ данный моментъ пусть плоскость плаванія есть  $F_1L_1$ , а центръ водоизмѣщенія лежитъ въ  $B_1$ , и на поверхности центровъ водоизмѣщенія  $bb$ . Но это противъ нашему утверждаемъ, что объемы клиньевъ  $FKF_1$  и  $LKL_1$  между собою равны. Пусть ихъ центры тяжести лежатъ въ  $M$  и въ  $N$ . Центръ тяжести общей для обоихъ частей водоизмѣщенія  $F_1KLD$  пусть лежитъ въ точкѣ  $E$ .

Сейчасъ же видно, что въ точкѣ  $B$  приложена равнодѣйствующая вѣсовъ, сосредоточенныхъ въ  $E$  и  $M$ . Равнымъ образомъ въ  $B_1$  приложена равнодѣйствующая параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ  $E$  и  $N$ .

Поэтому утверждаемъ, что точки  $M$ ,  $B$  и  $E$  лежатъ на одной прямой, равнообразно на прямой линіи лежатъ точки  $N$ ,  $B_1$  и  $E$ . Послеъ этого на основаніи правила о сложении параллельныхъ силъ и указаннаго выше равенства объемовъ, пишемъ два равенства:

$$\frac{MB}{BE} = \frac{\text{объемъ } F_1KLD}{\text{объемъ } F_1KF'}$$

$$\frac{NB_1}{B_1E} = \frac{\text{объемъ } F_1KLD}{\text{объемъ } L_1KL} = \frac{\text{объемъ } F_1KLD}{\text{объемъ } F_1KF'}$$

Поэтому

$$\frac{MB}{BE} = \frac{NB_1}{B_1E},$$

или стало быть

$$BB_1 \parallel MN.$$

Въ предѣлѣ, при безконечно маломъ углѣ отклоненія  $FKF_1$ , получимъ, что прямая  $MN$  совпадаетъ съ плоскостью плаванія  $F_1L_1$ , а хорда  $BB_1$  совпадаетъ съ касательной  $//$  къ поверхности центровъ водоизмѣненія въ точкѣ  $B_1$ . По доказанному—эти двѣ лини между собою параллельны. То же самое можетъ быть доказано и при какомъ-нибудь другомъ отклоненнн, не въ плоскости чертежа; такимъ образомъ, вообще—плоскость, касательная къ поверхности центровъ водоизмѣненія, проведенная въ центрѣ водоизмѣненія, параллельна плоскости плаванія, соответствующей этому центру водоизмѣненія. что и требовалось показать. Эта теорема доказана Дюпеномъ ).

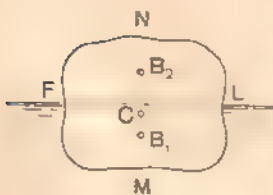
Отсюда вытекаетъ, во-первыхъ, что такая касательная плоскость горизонтальна, и, во-вторыхъ, что *нормаль, возстановленная къ поверхности центровъ водоизмѣненія въ центрѣ водоизмѣненія, при равновѣсн вертикальна, представляетъ собою ось плаванія, поэтому проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла и въ то же время перпендикулярна къ плоскости плаванія.*

Другими словами плавающее тѣло можетъ имѣть столько положеній равновѣсія, а, слѣдовательно, и столько плоскостей плаванія, сколько можно провести черезъ центръ тяжести тѣла  $C$  нормалей къ поверхности центровъ водоизмѣненія. Не входя въ подробности, отмѣтимъ, что поверхность центровъ водоизмѣненія всегда замкнутая поверхность, если само тѣло ограничено замкнутою поверхностью судна, покрытое палубой, всякій однородный или пустотѣлый поплавокъ и т. п.), и что, какъ показалъ Рншь, всегда можно провести четное число такихъ нормалей \*)

Перейдемъ къ выясненію условій устойчивости равновѣсія плавающихъ тѣлъ. Пусть (фиг. 220)  $FL$  есть начальная плоскость плаванія,  $C$ —центръ тяжести тѣла,  $B$  соответствующи центръ водоизмѣненія, такъ что  $BC$ —ось плаванія, перпендикулярная къ  $FL$  и нормальная къ поверхности  $BB_1$ . Пусть тѣло отклонилось на уголъ  $\delta\varphi$ , такъ что новая плоскость плаванія лежитъ въ  $F_1L_1$ , новый центръ водоизмѣненія въ  $B_1$ . На тѣло дѣйствуютъ его вѣсъ  $G$ , приложенный въ  $C$ , и давленіе воды, равное  $\gamma V$   $G$ , приложенное въ  $B_1$  и направленное снизу вверхъ. Другими словами, на тѣло

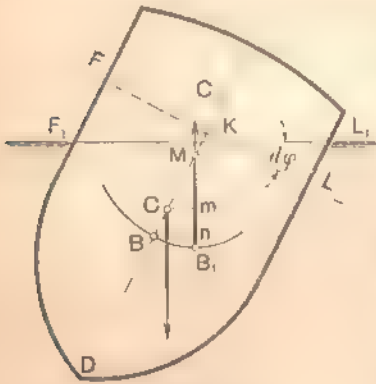
\*) Charles Dupin Applications de Gèometrie et de Mècanique à la Marine Paris, 1822.

\*\*) См. I. Реесъ въ Journal de l'École Polytechnique за 1858 г. Не для доказательства иллюстрація воображаемъ (фиг. 21<sup>00</sup>) замкнутый однородный поплавокъ съ плоскостью плаванія  $FL$  и центромъ тяжести  $C$ . Центръ водоизмѣненія пусть лежитъ въ  $B_1$ . При равновѣсн давія  $CB_1$  вертикальна. Э поплавокъ събѣена верхняя часть  $FNL$  пусть его удѣльный вѣсъ относительно жидкости равенъ 0,5; другими словами, пусть объемы  $FML$  и  $FNL$  между собою равны. Пусть даіе центръ тяжести этой верхней части лежитъ въ  $B$ , такъ что эта точка стала бы центромъ водоизмѣненія, если бы тѣло опрокинулось на  $180^\circ$ , а плоскость плаванія осталась бы та же самая. Для равновѣсія и въ этомъ случаѣ тѣла  $CB$  должна быть вертикальна. Но при услвіи однородности поплавокъ на точку  $C$  можно смотрѣть какъ на точку приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ, приложенныхъ въ  $B_1$  и въ  $B$ , а поэтому эти 3 точки лежатъ на одной прямой. Это доказыаеть, что изъ  $C$  можно провести двѣ нормали къ поверхности центровъ водоизмѣненія.



Фиг. 219.

дѣйствуетъ пара силъ: при расклоненіи, указанномъ на фигурѣ, эта пара стремится вернуть тѣло въ первъ начальное положеніе, почему его нужно признать положеніемъ устойчиваго равнѣсія. Если бы пара, наоборотъ, стремилась опрокинуть тѣло, то положеніе равнѣсія съ плѣскою плаванія  $FL$  было бы неустойчивымъ.



Фиг. 220.

Чтобы представить себѣ такой случай, достаточно вообразить, что на чертежѣ 220 центръ тяжести тѣла лежитъ не въ  $C$ , а гдѣ-нибудь на той же линіи  $BC$ —въ точкѣ  $C_1$ , взятой выше точки  $M$ . Эта послѣдняя опредѣляется какъ точка пересѣченія вертикали изъ центра водоизмѣненія  $B_1$ , съ осью плаванія. Эта точка называется метацентромъ. Припоминая всё предыдущія опредѣленія, можно сказать, что метацентръ есть точка пересѣченія двухъ смежныхъ нормалей къ поверхности центровъ водоизмѣненія; другими словами—это есть центръ кривизны этой поверхности. Имѣя въ виду это

послѣднее, нѣсколько расширенное представленіе о метацентрѣ, скажемъ, что только при бесконечно малыхъ углахъ отклоненія  $dy$  онъ лежитъ на оси плаванія: вообще же онъ болѣе или менѣе съ нею смѣщается и геометрическое мѣсто метацентровъ представляетъ нѣкоторую поверхность, которую можно разматривать какъ развертку для поверхности центровъ водоизмѣненія.

Величину момента той пары, которая нужна для удержанія тѣла въ положеніи, отклонившемъ отъ состоянія устойчиваго равнѣсія, естественно принять за мѣру устойчивости. При данномъ водоизмѣненіи  $\gamma V$  этотъ моментъ пропорц. назывъ плечу  $Cm$ , или плечу  $(Bn - a \sin dy)$  или, наконецъ, плечу  $(BM - a \sin dy)$ , при чемъ буквой  $a$  обозначена величѣ опредѣленная для каждой данной нагрузки судна длина  $BC$ . Такимъ образомъ, за мѣру устойчивости можно принять длину  $BM$ , т.е. разстояніе отъ центра водоизмѣненія до метацентра, считая по оси плаванія; эта длина называется высотой метацентра. (При конечномъ углѣ отклоненія, когда метацентръ вообще не лежитъ на оси плаванія, ту же роль играетъ разстояніе отъ центра водоизмѣненія до точки пересѣченія оси плаванія съ нормалью къ поверхности центра въ водоизмѣненія; эту точку называютъ ложнымъ метацентромъ.) Вычислимъ длину  $BM$ .

Сохраняя всё прежнія буквенныя обозначенія, отмѣтимъ на фиг. 221, что можно вообразить приложенными въ  $B$  двѣ равныя и противоположныя силы  $G_1$  и  $G_2$  по величинѣ равныя  $G$ . Поэтому можно считать, что на тѣло дѣйствуютъ опрокидывающая пара  $(G_1, -G_2)$  въ точкахъ  $C$  и  $B$ ; восстанавливающая пара  $(-G_1, G_2)$  въ точкахъ  $B_1$  и  $B$ . Кроме того, приложимъ мысленно въ центрахъ тяжести клиньевъ  $FKF_1$  и  $L_1KL$  силы  $+Q$  и  $-Q$ , равныя вѣсу воды въ объемѣ этихъ клиньевъ; первая изъ нихъ представляетъ тотъ какъ бы добавокъ нагрузки на судно, который полу-



товъ силу  $Q$  можно взять сумму моментов относительно той же оси всѣхъ составляющихъ. Следовательно, вмѣсто момента  $Q$  можно взять моментъ

$$Q = \int y \, dM = \int y \, \rho \, dF = \rho \int y \, dF,$$

гдѣ интегрирование распространяется на всю площадь ватерлиня. Въ этомъ интегралѣ узнѣмъ моментъ инерціи  $J$  площади ватерлиня, взятый относительно  $O$  и качанія  $OX$ . Тогда  $Q$  трехъ частей черезъ центр тяжести площади ватерлиня. После этого:

$$BM = \frac{J}{a} + \frac{Q}{G}.$$

такъ какъ по малости угла кач.  $\alpha$   $\sin \alpha \approx \alpha$  и  $\cos \alpha \approx 1$  въ назв. считать равными между собою.

При качаніи въ уголъ  $\alpha$  вѣсъ  $G$  судна  $G$  и сила паразительныя оси плаванія. Блѣднее выраженіе  $BM$  означаетъ силу носъ той разницей, что  $BM$  и  $BC$  нельзя считать равными, такъ что его нужно исправить, раздѣливъ правую часть на  $\cos \alpha$ ; подъ буквой  $J$  попрежнему надо подразумѣвать моментъ инерціи площади ватерлиня относительно той оси, около которой предположено угловое отклоненіе судна. Откладывая по оси абсциссъ эти углы отклоненія, а по оси ординаты соответствующіе отрѣзки  $BM$ , получаемъ такъ называемую кривую статической устойчивости. Очевидно, площадь такой кривой пропорціональна работѣ, произведенной внѣшнимъ моментомъ для полученія данного отклоненія судна.

Изъ только что найденнаго выраженія высоты метацентра  $BM$  видно, что она зависитъ отъ формы судна. Какъ было уже указано, для оцѣнки степени устойчивости важно также разстояніе  $BC$  (фиг. 220), которое мы назвали буквой  $a$ ; ясно, что эта величина зависитъ отъ нагруженія судна. Даже если общій его вѣсъ не мѣняется, но мѣняется только расположеніе на немъ нагрузокъ, положеніе центра тяжести вообще измѣняется, а, слѣдовательно, измѣняется длина  $a$ . Въ этомъ отношеніи нужно различать вліяніе перемѣщеній твердыхъ или жидкихъ грузовъ. Кроме того, грузъ можетъ перемѣщаться въ предѣлахъ судна по вертикали или по какому-нибудь горизонтальному направленію.

Если грузъ  $P$  перемѣщается по вертикали на высоту  $h$ , то центр тяжести всего судна, вѣсъ котораго есть  $G$ , подымется на  $h \frac{P}{G}$ , что легко рассмотреть изъ уравненія статическихъ моментовъ. На эту величину увеличится плечо  $a$ , а, слѣдовательно, уменьшится устойчивость судна. Рядомъ съ этимъ отмѣтимъ, что не только при перемѣщеніи груза по вертикали, но и при простомъ его подвѣшиваніи на вертикальной нити длиной  $h$ , напр. на кранѣ, происходитъ такая же точно потеря въ устойчивости, такъ какъ въ такомъ случаѣ сила  $P$  приложена къ судну не тамъ, гдѣ находится центр тяжести груза, а тамъ, гдѣ укрѣплена гибкая нить. Это особенно станетъ ясно, если представитъ себѣ, что судно съ подвѣшеннымъ грузомъ

получило какое-нибудь отклонение. Эта потеря устойчивости на ту же — сейчас же, какъ только грузъ приподнять съ мѣста; съ дальнѣйшимъ перемѣщеніемъ груза она не мѣняется.

Если грузъ перемѣщается по горизонтальной плоскости, то и тутъ нужно различать два случая. Допустимъ для простоты представлений, что судно имѣетъ борта вблизи ватерлинии въ видѣ цилиндрическихъ поверхностей, стоящихъ вертикально при положеніи устойчиваго равновѣсія. Площадь ватерлинии имѣетъ свой центръ тяжести, и мы видѣли, что двѣ смежныя плоскости плаванія могутъ пересѣкаться не иначе, какъ по прямой, проходящей черезъ эту точку. Моментъ инерціи площади ватерлинии, опредѣляющій высоту метацентра, т. е. мѣру устойчивости судна, берется именно относительно этой прямой пересѣченія двухъ плоскостей плаванія. Какъ у всякой плоской фигуры, выдѣлимъ въ плоскости ватерлинии направленія главныхъ осей инерціи, дающія наибольшія и наименьшія моменты инерціи этой плоской фигуры. Если судно имѣетъ одну плоскость симметріи, что обычно имѣетъ мѣсто, то одна изъ главныхъ осей инерціи, обыкновенно продольная для судна, лежитъ въ этой плоскости симметріи. Допустимъ, что центръ тяжести судна сначала лежитъ въ этой плоскости. Въ ней же содержится ось плаванія; на послѣдней находятся—центръ водоизмѣщенія, центръ тяжести судна и центръ тяжести площади ватерлинии—той точки, въ которую обратилась для этого случая вся поверхность плоскостей водоизмѣщенія.

Теперь представимъ себѣ, что изъ центра тяжести судна мы перенесемъ вѣкоторый грузъ  $P$  на горизонтальную длину  $l$ , оставляя его въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ одну изъ главныхъ осей инерціи площади ватерлинии. Очевидно новый центръ тяжести тѣла останется въ этой же плоскости; равновѣсіе нарушится тѣмъ, что появится пара, вращающая судно около оси, перпендикулярной къ плоскости перемѣщенія груза  $P$ . Судно повернется на уголъ  $\varphi$ , появится новая плоскость плаванія и новый центръ водоизмѣщенія, который останется въ той же вертикальной плоскости. Такимъ образомъ разысканіе новаго положенія устойчиваго равновѣсія судна сводится къ задачѣ на плоскости, разрѣшаемой изъ условія, чтобы моментъ  $Pl$ , который достаточно приложить къ судну, чтобы вернуть его центръ тяжести въ первоначальное положеніе, равнялся моменту устойчивости судна, т. е.

$$Pl = \gamma J \operatorname{tg} \varphi,$$

что легко получить, сличая первое и четвертое уравненія, написанныя выше при вычисленіи высоты метацентра, и принимая во вниманіе конечное значеніе угла  $\varphi$ . Если бы уголъ качанія былъ весьма малъ, то можно бы писать:

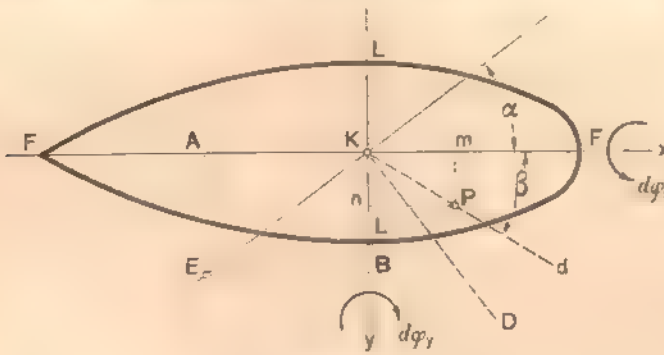
$$Pl = \gamma J d\varphi,$$

Ясно, что моментъ инерціи  $J$  ватерлинии берется относительно другой ея главной оси инерціи, той самой, по которой пересѣклись новая и прежняя плоскости плаванія, и перпендикулярно къ которой перемѣстился грузъ  $P$ .



Допустимъ теперь, что грузъ  $P$  перемѣстился горизонтально изъ центра тяжести судна на длину  $l$  въ какомъ-нибудь направленіи. Несомнѣнно, что новое положеніе центра тяжести судна будетъ лежать на этомъ же направленіи, останется на той же глубинѣ отъ плоскости плаванія, какъ и раньше; измѣнятся только его координаты въ плоскости ватерлинии.

Пусть кривая  $FLFL$  (фиг. 222) есть ватерлиния той плоскости плаванія, когда имѣетъ мѣсто устойчивое равновѣсіе, т. е. когда линия, соединяющая центръ водоизмѣщенія и центръ тяжести тѣла, вертикальна и, следовательно, перпендикулярна къ плоскости чертежа, пересѣкаясь съ ней въ точкѣ  $K$ .



Фиг. 222.

Пусть судно имѣетъ плоскость симметріи, въ нашемъ случаѣ продольную  $FF$ ; тогда, какъ ужь было объяснено, въ этой же точкѣ  $K$  лежитъ центръ тяжести фигуры  $FLFL$ , а линия  $FF$  представляетъ одну изъ главныхъ осей инерціи этой фигуры. Другая ее главная ось инерціи перпендикулярна къ оси  $FF$  и проходитъ черезъ точку  $K$ . Первую ось примемъ за ось  $x$ 'овъ, вторую—за ось  $y$ 'овъ. Пусть грузъ  $P$  перемѣстился въ плоскости  $Kd$ , такъ что проектируется на чертежъ въ точку  $P$ , въ разстояніи  $l$  отъ первоначальнаго положенія  $K$ . Моментъ  $P'l$ , конечно, вызываетъ вращеніе судна около нѣкоторой оси. Для ея предѣленія разложимъ моментъ  $P'l$  на два, разлагая его плечо  $l$  на плечи  $m$  и  $n$  соответственно по осямъ  $Kx$  и  $Ky$ .

Моментъ  $Pm$  вращаетъ судно къ главной оси инерціи  $Ky$  на уголъ  $d\varphi_y$ , опредѣляемый по предыдущему изъ уравненія:

$$Pm = \gamma J_y d\varphi_y.$$

Тутъ  $J$  моментъ инерціи фигуры  $FLFL$  относительно оси  $Ky$ , а вращеніе  $d\varphi_y$  направлено по часовой стрѣлкѣ, если смотрѣть противъ оси  $y$ 'овъ.

Такъ же точно моментъ  $Pn$  вызоветъ поворотъ  $d\varphi_x$  около главной оси инерціи  $Kx$ , относительно которой фигура  $FLFL$  имѣетъ моментъ инерціи  $J_x$ :

$$Pn = \gamma J_x d\varphi_x.$$

Это вращеніе направлено противъ часовой стрѣлки, если смотрѣть противъ оси  $Kx$ . Для нахождения итожнаго вращенія, сложимъ эти два составляющія

поворота, откладывая по направлениямъ соответствующихъ осей векторовъ пропорциональные угламъ поворота, т.-е. дѣлаемъ:

$$KA = dq_x,$$

$$KB = dq_y.$$

Послѣ этого видно, что судно повернется около оси  $KE$ , т.-е. въ плоскости  $KD$ , перпендикулярной къ оси  $KE$ , на уголъ:

$$dq = \frac{P}{\gamma} \sqrt{\left(\frac{n}{J_x}\right)^2 + \left(\frac{m}{J_y}\right)^2}.$$

Отмѣтимъ углы  $\alpha$  и  $\beta$ , образуемые съ осью  $x'$ овъ направлениемъ  $KP$ , т.-е. плоскостью момента, и направлениемъ  $KE$ , т.-е. осью вращения тѣла. Изъ чертежа имѣемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m J_x}{n J_y}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{n}{m}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{J_x}{J_y}.$$

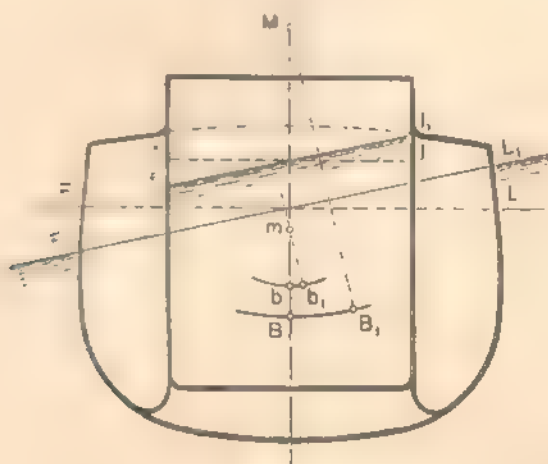
Если теперь вообразимъ построеннымъ на осяхъ  $Kx$  и  $Ky$  эллипсъ инерціи площади ватерлиніи, т.-е. если по оси  $Kx$  отложимъ длину  $\sqrt{\frac{1}{J_x}}$ , а по оси  $Ky$ —длину  $\sqrt{\frac{1}{J_y}}$ , и эти длины примемъ за полуоси эллипса, то направленія  $KP$  и  $KE$ , образующія вышеуказанные углы, будутъ направленіями двухъ сопряженныхъ диаметровъ этого эллипса\*). Такимъ образомъ, какое-нибудь горизонтальное перемѣщеніе груза заставляетъ судно качнуться около оси, представляющей диаметръ эллипса инерціи площади ватерлиніи, сопряженный съ направлениемъ, содержащимъ старое и новое положенія центра тяжести судна.

Во избѣжаніе недоразумѣній отмѣтимъ, что мы все время говоримъ объ оси качанія судна, лежащей въ плоскости плаванія. Это очевидно не вѣрно: ось, около которой тѣло будетъ поворачиваться, проходитъ черезъ его центръ тяжести и расположена параллельно указанной выше оси  $KE$ . Такимъ образомъ, говоря о качаніи судна около оси, лежащей въ плоскости плаванія, мы замѣнили надлежащее вращеніе другимъ, отличающимся отъ перваго только на поступательное движеніе; притомъ это поступательное движеніе перпендикулярно къ плоскости, содержащей обѣ разсматриваемыя оси, т.-е. направлено по горизонтали. Отсюда видно, что эта замѣна отнюдь не влечетъ за собою неправильности опредѣленія положенія осей.

Предположимъ далѣе (фиг. 223), что судно имѣетъ балластъ или грузъ, въ видѣ жидкости (наливные суда, запасы жидкаго топлива, водяной бал-

\*) Какъ известно, произведеніе тангенсовъ угловъ, образуемыхъ двумя сопряженными диаметрами эллипса съ его большою осью, равно отношенію квадратовъ его полуосей.

часть и т. п.). Пусть при нормальномъ положеніи судна плоскость плаванія есть  $FL$  и центръ водоизмѣщенія  $B$ . Въ то же время во внутреннемъ резервуарѣ жидкость налита до уровня  $fl$  и ея центръ тяжести пусть лежитъ въ  $b$ . Послѣ отклоненія на небольшой уголъ плоскость плаванія будетъ  $F_1L_1$ , центръ водоизмѣщенія  $B_1$ , уровень въ резервуарѣ  $f_1l_1$  и центръ тяжести жидкости въ немъ перемѣстится въ  $b_1$ . Если бы нагрузка резервуара была неудобоподвижная, то метацентръ былъ бы въ  $M$  и мѣрой устойчивости служила бы длина  $BM$ . Изъ чертежа ясно видно, что вслѣдствіе жидкаго груза и перемѣщенія его центра тяжести моментъ возстаивающей пары *уменьшился* на произведение изъ вѣса жидкости въ резервуарѣ, плеча  $bm$  и  $\sin$  угла наклона оси плаванія.



Фиг. 223.

Вослѣдствіе уменьшенія устойчивости, вызываемое жидкой нагрузкой, нужно имѣть въ виду при оценкѣ эффекта заливанія судна в его трюмы водоемъ. А такъ какъ причины запасы жидкаго топлива лучше размѣщать въ отдѣльныхъ большихъ помѣщеніяхъ, расходуя его послѣдовательно изъ отдѣльныхъ помѣщеній: ибо если помѣщеніе вполне заполнено жидкимъ грузомъ, то ея центръ тяжести не имѣетъ свободы перемѣщеній, а потому при этомъ уровень жидкій грузъ не отличается отъ твердаго.

Съ точки зрѣнія, какъ-то: зерновой хлѣбъ, артиллерійскіе снаряды и т. п. ведутъ себя какъ жидкости, если уголъ наклона судна превышаетъ уголъ ихъ естественнаго откоса, и потому обладаютъ тѣми же опасными свойствами. Эти потери устойчивости въ наливныхъ судахъ, хотя бы и раздѣленныхъ водонепроницаемыми переборками, могутъ вызвать въ періоды ихъ налива и опрокидыванія опасный кренъ и даже опрокидываніе, а потому эти процессы должны быть заранѣе прослѣжены на основаніи конструкціи судна, и сообразно съ этимъ долженъ быть установленъ порядокъ этихъ операций.

### Дополнение къ § 29, стр. 308.

При разсмотрѣнн явленія гидравлическаго удара мы предполагали настолько быстрое закрываніе задвижки, что ударная волна, отразившись отъ магистрали, возвращается къ задвижкѣ, когда она уже вполнѣ закрыта. Однако часто можетъ оказаться, что или время закрыванія задвижки  $T$  настолько велико, или труба настолько коротка, что отраженная волна заставетъ задвижку еще не закрытой. Въ указанномъ на стр. 290 сочиненіи итальянскій инженеръ Альеви даетъ слѣдующія ур-ія, по которымъ можно вычислять въ такихъ случаяхъ повышеніе давления въ трубѣ:

$$\left(\frac{p+p_0}{\gamma}\right)^2 - 2\frac{p-p_0}{\gamma} \frac{P-p_0}{\gamma} \frac{\lambda^2}{g} \left[\left(\frac{L}{f_0}\right)^2 - 1\right] T^2 + 2Tl - l^2 = \left(\frac{P-p_0}{\gamma}\right)^2 \quad (60)$$

$$\left(\frac{P-p_0}{\rho_0}\right)^2 - \frac{P-p_0}{\rho_0} \left[2 - \left(\frac{L}{g\rho_0 T}\right)^2\right] = 1 \quad (61)$$

Въ этихъ уравненіяхъ обозначаютъ:

$p_0$  — начальное давленіе въ трубѣ до удара.

$v$  — скорость течения въ трубѣ до удара.

$f_0$  — площадь сѣченія отверстія, изъ котораго вытекала вода до удара.

$F$  и  $L$  — площадь сѣченія и длина трубы до удара.

$P$  — полное ударное повышеніе давления, вычисляемое по ур-ію (60) на стр. 294.

$\lambda$  — скорость распространенія ударной волны (см. ур-е 61 на стр. 294).

$T$  — время въ секундахъ полного закрыванія отверстія  $f_0$ .

$l$  — время, протекшее отъ начала закрыванія до того момента, когда имѣетъ мѣсто повышеніе давленія  $p$ .

$p$  — искомое повышеніе давления сверхъ начальнаго  $p_0$ .

Пользуясь первымъ уравненіемъ, нужно вносить въ него  $l = \frac{2L}{\lambda}$ ; такимъ образомъ опредѣлится повышеніе давленія къ тому моменту, когда ударная волна вернется, отразившись отъ магистрали.

Второе уравненіе даетъ повышеніе давленія въ одинъ изъ слѣдующихъ моментовъ, подъ влияніемъ отраженной волны. Расчетнымъ повышеніемъ давленія нужно считать наибольшее изъ этихъ обоихъ опредѣленій.

По Альеви время  $T_1$  закрыванія задвижки должно быть

$$T_1 > \frac{L \lambda \gamma}{g p_1} \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{p_0}}$$

чтобы не вызвать повышенія давленія большаго, чѣмъ заданная величина  $p_1$  *kgf. mtr.* (См. стр. 23, 27, 28, 66 и 72 названнаго выше сочиненія Альеви.)

Таблица

значений коэффициентов напрягов  $\frac{r^2}{2g}$  в *мг.*

Ускорение тяжести принято  $g = 981 \text{ м/сек}^2$ , так что  $g^2 = 962,361$ ;  $12g = 11,772$ .

<i>r</i>	$\frac{r^2}{2g}$	<i>r</i>	$\frac{r^2}{2g}$	<i>r</i>	$\frac{r^2}{2g}$	<i>r</i>	$\frac{r^2}{2g}$
1.05	0.05619	3.30	0.5559	5.55	1.570	7.80	3.101
1.10	0.06167	3.35	0.5720	5.60	1.598	7.85	3.141
1.15	0.06741	3.40	0.5892	5.65	1.627	7.90	3.181
1.20	0.07339	3.45	0.6067	5.70	1.656	7.95	3.221
1.25	0.07964	3.50	0.6244	5.75	1.685	8.00	3.262
1.30	0.08614	3.55	0.6423	5.80	1.715	8.05	3.303
1.35	0.09289	3.60	0.6605	5.85	1.744	8.10	3.344
1.40	0.09990	3.65	0.6790	5.90	1.774	8.15	3.385
1.45	0.1072	3.70	0.6978	5.95	1.804	8.20	3.427
1.50	0.1147	3.75	0.7167	6.00	1.835	8.25	3.469
1.55	0.1225	3.80	0.7359	6.05	1.866	8.30	3.511
1.60	0.1305	3.85	0.7552	6.10	1.897	8.35	3.554
1.65	0.1388	3.90	0.7748	6.15	1.928	8.40	3.596
1.70	0.1473	3.95	0.7946	6.20	1.959	8.45	3.639
1.75	0.1561	4.00	0.8145	6.25	1.991	8.50	3.682
1.80	0.1651	4.05	0.8346	6.30	2.023	8.55	3.726
1.85	0.1744	4.10	0.8548	6.35	2.055	8.60	3.770
1.90	0.1840	4.15	0.8752	6.40	2.088	8.65	3.814
1.95	0.1938	4.20	0.8958	6.45	2.120	8.70	3.858
2.00	0.2039	4.25	0.9206	6.50	2.153	8.75	3.902
2.05	0.2142	4.30	0.9424	6.55	2.187	8.80	3.947
2.10	0.2248	4.35	0.9644	6.60	2.220	8.85	3.992
2.15	0.2356	4.40	0.9867	6.65	2.254	8.90	4.032
2.20	0.2467	4.45	1.009	6.70	2.288	8.95	4.083
2.25	0.2580	4.50	1.032	6.75	2.322	9.00	4.128
2.30	0.2696	4.55	1.055	6.80	2.357	9.05	4.174
2.35	0.2815	4.60	1.078	6.85	2.392	9.10	4.221
2.40	0.2936	4.65	1.102	6.90	2.427	9.15	4.267
2.45	0.3059	4.70	1.126	6.95	2.462	9.20	4.314
2.50	0.3186	4.75	1.150	7.00	2.497	9.25	4.361
2.55	0.3314	4.80	1.174	7.05	2.533	9.30	4.408
2.60	0.3445	4.85	1.199	7.10	2.569	9.35	4.456
2.65	0.3579	4.90	1.224	7.15	2.606	9.40	4.504
2.70	0.3716	4.95	1.249	7.20	2.642	9.45	4.552
2.75	0.3854	5.00	1.274	7.25	2.679	9.50	4.600
2.80	0.3996	5.05	1.300	7.30	2.716	9.55	4.648
2.85	0.4140	5.10	1.326	7.35	2.753	9.60	4.699
2.90	0.4286	5.15	1.352	7.40	2.791	9.65	4.746
2.95	0.4436	5.20	1.378	7.45	2.829	9.70	4.796
3.00	0.4587	5.25	1.405	7.50	2.867	9.75	4.843
3.05	0.4741	5.30	1.432	7.55	2.905	9.80	4.895
3.10	0.4898	5.35	1.459	7.60	2.944	9.85	4.945
3.15	0.5057	5.40	1.486	7.65	2.983	9.90	4.996
3.20	0.5219	5.45	1.514	7.70	3.022	9.95	5.046
3.25	0.5383	5.50	1.542	7.75	3.061	10.00	5.097

Таблица

значений скоростей свободного падения  $\sqrt{2gh}$  в  $m/sec$

Ускорение тяжести принято  $g = 9,81 m/sec^2$ , так что  $\sqrt{2g} = 4,429417$ .

$h$	$\sqrt{2gh}$	$h$	$\sqrt{2gh}$	$h$	$\sqrt{2gh}$	$h$	$\sqrt{2gh}$	$h$	$\sqrt{2gh}$
0,5	3,132	20,5	20,06	40,5	28,19	60,5	34,45	80,5	39,75
1,0	4,424	21,0	20,10	41,0	28,36	61,0	34,59	81,0	39,87
1,5	5,426	21,5	20,14	41,5	28,54	61,5	34,74	81,5	39,99
2,0	6,263	22,0	20,18	42,0	28,71	62,0	34,88	82,0	40,11
2,5	7,003	22,5	21,01	42,5	28,88	62,5	35,02	82,5	40,23
3,0	7,672	23,0	21,24	43,0	29,05	63,0	35,16	83,0	40,35
3,5	8,286	23,5	21,47	43,5	29,22	63,5	35,30	83,5	40,48
4,0	8,859	24,0	21,70	44,0	29,38	64,0	35,44	84,0	40,60
4,5	9,395	24,5	21,93	44,5	29,55	64,5	35,57	84,5	40,72
5,0	9,904	25,0	22,15	45,0	29,71	65,0	35,71	85,0	40,84
5,5	10,39	25,5	22,37	45,5	29,88	65,5	35,85	85,5	40,96
6,0	10,85	26,0	22,59	46,0	30,04	66,0	35,98	86,0	41,08
6,5	11,30	26,5	22,81	46,5	30,21	66,5	36,12	86,5	41,20
7,0	11,72	27,0	23,02	47,0	30,37	67,0	36,26	87,0	41,32
7,5	12,13	27,5	23,23	47,5	30,53	67,5	36,40	87,5	41,44
8,0	12,53	28,0	23,44	48,0	30,69	68,0	36,53	88,0	41,55
8,5	12,91	28,5	23,65	48,5	30,85	68,5	36,66	88,5	41,67
9,0	13,29	29,0	23,85	49,0	31,01	69,0	36,79	89,0	41,79
9,5	13,65	29,5	24,05	49,5	31,17	69,5	36,93	89,5	41,91
10,0	14,01	30,0	24,26	50,0	31,32	70,0	37,06	90,0	42,02
10,5	14,35	30,5	24,46	50,5	31,48	70,5	37,19	90,5	42,14
11,0	14,69	31,0	24,66	51,0	31,63	71,0	37,32	91,0	42,25
11,5	15,02	31,5	24,86	51,5	31,79	71,5	37,46	91,5	42,37
12,0	15,34	32,0	25,06	52,0	31,94	72,0	37,59	92,0	42,49
12,5	15,56	32,5	25,25	52,5	32,10	72,5	37,72	92,5	42,60
13,0	15,97	33,0	25,45	53,0	32,25	73,0	37,85	93,0	42,72
13,5	16,28	33,5	25,64	53,5	32,40	73,5	37,98	93,5	42,83
14,0	16,58	34,0	25,83	54,0	32,55	74,0	38,10	94,0	42,95
14,5	16,87	34,5	26,02	54,5	32,70	74,5	38,23	94,5	43,06
15,0	17,16	35,0	26,21	55,0	32,85	75,0	38,36	95,0	43,17
15,5	17,44	35,5	26,40	55,5	33,00	75,5	38,49	95,5	43,29
16,0	17,72	36,0	26,58	56,0	33,15	76,0	38,62	96,0	43,40
16,5	17,99	36,5	26,76	56,5	33,30	76,5	38,75	96,5	43,52
17,0	18,26	37,0	26,94	57,0	33,44	77,0	38,87	97,0	43,63
17,5	18,53	37,5	27,12	57,5	33,59	77,5	39,00	97,5	43,74
18,0	18,79	38,0	27,30	58,0	33,73	78,0	39,12	98,0	43,85
18,5	19,05	38,5	27,48	58,5	33,88	78,5	39,25	98,5	43,96
19,0	19,31	39,0	27,66	59,0	34,02	79,0	39,37	99,0	44,07
19,5	19,56	39,5	27,84	59,5	34,16	79,5	39,50	99,5	44,18
20,0	19,81	40,0	28,01	60,0	34,31	80,0	39,62	100,0	44,29

## Указатель предметовъ и именъ.

- Альви**, Alvert 290, 436.  
**Амслеръ**, Amstler-Lafon 406, 408.  
**Архимедъ**. Привидиъ А. 38, 422.
- Базенъ**, Bazin, 149, 161—188, 212, 336, 337, 341, 345, 347, 394.  
**Бахъ**, Bach 238.  
**Баумгартель**, Baumgarten 394.  
**Беланже**, Bélanger 93, 150, 167, 400.  
**Безанъ** 229.  
**Бернулли**. Теорема Давидъ Б. 81, 96.  
**Видоно**, Vidone 101, 115, 122, 135, 394.  
**Влэнъ**, Blaine 222.  
**Бобылевъ** 331, 391.  
**Бовей**, Bovey 120.  
**Бововое скатіе у водослива** 169, 167, 188.  
**Борда-Карно**, Borda-Carnot. Теорема Б. 92.  
**Борда**. Насадокъ Б. 135.  
**Борнеманъ**, Bornemann 119.  
**Боссю**, Bossut 119, 140, 218.  
**Брама**, Bramah 19.  
**Брессъ**, Bresse 220, 378.  
**Бригдлеъ**, Халсенъ и К°, Brügge, Hansen & Co 417.  
**Будау**, Budau 290.  
**Буссинъ**, Boussinesq 149—173, 215, 331, 371, 390, 394.
- Вагнеръ**, Wagner 353.  
**Ватерлиннъ** 423.  
**Вентура**. Водомѣръ В. 270.  
     "    Насадокъ В. 130, 137, 141, 146.  
**Вертушка** Вольгмана 407.  
     "    Гайоша 409.  
     "    Отта 409.
- Вейсбахъ**, J. Weisbach 105, 115, 120, 136, 137, 139, 140, 217, 230, 233, 235, 237, 260.  
**Вискозиметръ** 147.  
**Вислочки** 332.  
**Вихрь** 50, 52, 63.  
**Внутреннее треніе** 214, 348.
- Вѣшнее треніе** 213.  
**Водоизмѣненіе**. Центръ в. 422.  
**Водосливъ** 147—190.  
     "    безъ доступа воздуха подъ струю 170.  
     "    затопленный 179, 183.  
     "    ломанный, косою 190.  
     "    наклонный 165.  
     "    съ боковымъ скатіемъ 187.  
     "    съ несовершеннымъ скатіемъ 161.  
     "    съ толстой стѣнкой 167, 183.
- Водоструйные приборы** 271, 283.  
**Время наполненія камеръ** 206.  
     "    опороженія сосуловъ 199, 206.  
**Вуври**, Vouvy 296  
**Входъ въ трубу**. Сопротивленіе при в. 230.  
**Высота скачка** 392.  
**Вязкость** 44, 92.
- Гангилье и Куттеръ**, Ganguillet et Kutter 338—341.  
**Гарлахеръ**, Harlachner 408, 412.  
**Гельмгольцъ**, Helmholtz. Законъ Г. сохраненія вихря 63—65.  
**Гей-Люссакъ**, Gay Lussac 3.  
**Геймаръ**, Gueymard 218.  
**Гидравлическій ударъ** 289.  
**Гидродинамическое давленіе** 44, 89.  
**Гидрометрическіе приборы** 401.  
**Гидростатическое давленіе** 5, 15, 24.  
**Горловой клапанъ** 237.  
**Граскофъ**, Grashof 222.  
**Графъ**, Graeff 128, 129.  
**Гумфрей**, Абботъ, Humphrey and Abbot 347
- Давленіе гидродинамическое** 44, 89.  
     "    гидростатическое 5, 24.  
     "    на кривую стѣнку въ заданномъ направленіи 33.  
     "    на кривую стѣнку полное 35.  
     "    на плоскую стѣнку 29.  
     "    Законъ распределенія д. въ тяжелыхъ жидкостяхъ, каплярныхъ и упругихъ 14.

Дарси, Darcy 219, 260, 336, 394.

„ Трубки Пито-Д. 405.

Диафрагма 230—232.

Дифференцъ корабля 425.

Д'Обюиссонъ, D'Aubuisson 138, 236

Донный ледъ 351.

Дубовская гидрометрическая станція 336.

Дюверъ, Duverg 208.

Дюва, Du Buat 183, 218, 235, 361.

Дювонъ, Dupin 428.

Дювизъ, Dupuit 274, 382.

**Желобъ.** Вліяніе ж., приставленнаго къ отверстию 118, 127—129.

Живое сѣченіе 332.

Жидкій балластъ 434.

Жужга 351.

Жуковский 290—309.

**Загрязненная труба** 220, 227, 261.

Задвижка 237.

Задачи на гидростатику 38, 328.

„ „ движение воды 309, 418.

Затопленный водосливъ 179, 183.

Зонне, Sonne 221, 260.

**Ибевъ, Iben** 220

Игнатовъ 263, 289, 361.

Изотакен 350, 414.

Интце, Intze 206.

**Имвиль, Saligny** 234.

Каналъ. Движеніе воды въ к. 331—422.

Карно, Carnot 93.

Кастель, Castel 138.

Керосиль 237.

Кларкъ, Clark 208.

Клапанъ 237, 238—241.

Коломйцевъ 336.

Колѣно 232.

„ закругленное 235.

Короткій водопроводъ 264.

Кравъ 238.

Кривая расхода въ каналахъ 357.

Кристенъ, Christen 220, 260.

Критическая глубина 372, 390.

„ скорость въ каналахъ 390.

„ Рейвольдса 223, 224.

Кубическое распріеніе. Коэффициентъ к. р. 49

Куннингамъ, Cunningham 347, 350.

Куцъ, Couplet 218.

**Лабиринтовый сальникъ** 147.

Лампе, Lampe 221.

Лебро, Lesbros 101, 112, 115, 118, 125, 161, 168, 189.

Леспинасъ, Lespinasse 139.

Линія тока 54, 60

Лохтянъ 352.

**Мазони, Masoni** 236.

Максименко 225.

Мариоттъ, Mariotte 3, 47, 99.

Метacentръ 429.

Микелотти, Michelotti 115, 120.

**Наибольшій расходъ.** Постулатъ н. р. 150.

Напоръ 87.

Насахъ 130—147.

„ Борда, внутренніе цилиндрическіе 135.

„ Вентури, внешніе цилиндрическіе 130.

„ може наклонные 140.

„ коноидальные 140.

„ расходящіяся 141.

„ сходящіяся 138.

Невихревое теченіе тяжелой жидкости съ горизонтальной направляющей плоскостью, симметричное относительно вертикальной плоскости 65.

„ тоже, симметричное относительно вертикальной линіи 74.

Непрерывная раздача 281.

Неравнобѣрное теченіе въ каналахъ 367.

Несовершенный водосливъ 179, 183.

Неустановившееся движеніе. Частные случаи в. д. 196, 204.

Нефть, нефтяные остатки 237.

**Онвиль, Onvin** 221, 222.

Осадкѣ въ трубахъ 227.

Ось плаванія 423.

Отверстія. Истеченіе изъ о. 99—208.

Отжатая струя водослива 171.

Относительное движеніе. Теорема Д. Бернулли для о. д. 96.

**Паденіе въ каналахъ** 332, 362.

Парадоксъ гидростатическій 37.

Параллелизмъ словъ, струй 82.

Паскаль, Pascal. Принципъ П. 19.

Питаніе трубы съ двухъ концовъ 280.

Пито, Pitot. Трубки П. 404.

Плоское сѣченіе струи 81.

Плоскость плаванія 423.

Поверхности уровня 11, 15, 20, 27, 191, 193.

Подпруда. Кривая п. 374.

„ отрицательная 385.

Подтопленная снизу струя водослива 173, 176.

Понселе, Poncelet 27, 101, 112, 125.

Поплавокъ 401, 417.

„ двойной 402.

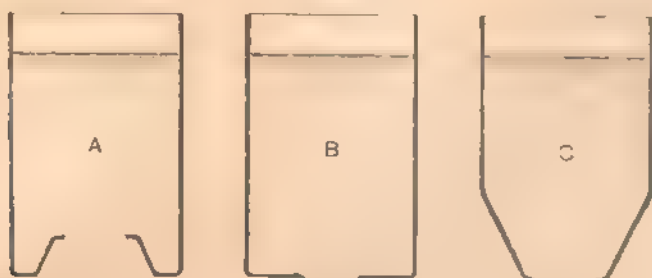
Потенциалъ силъ 10.







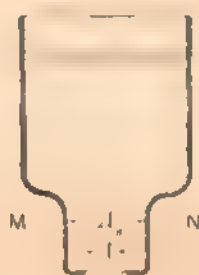
Фиг. 55 на стр. 105, фиг. 56 и 57 на стр. 106 и фиг. 58 на стр. 107, какъ ошибочныя, нужно замѣнить слѣдующими.



1.



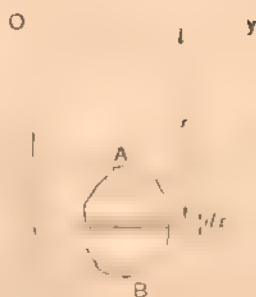
Фиг. 56.



Фиг. 57.



Фиг. 58.





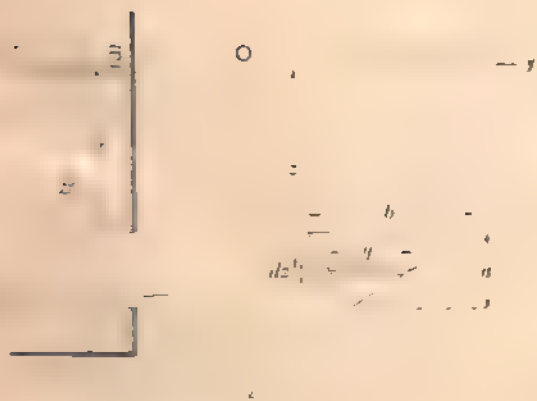
Фиг. 59 на стр. 102, фиг. 60 на стр. 102, фиг. 61 на стр. 111 и фиг. 64 на стр. 114, како вишебачна, нужно замѣнить слѣдующими.



Фиг. 59.



Фиг. 60.



Фиг. 61.



Фиг. 64.





